スリットをすぎる希薄気体の流れ*

長谷川 学**・曾根 良夫**

(受付1989年11月29日, 掲載決定1990年2月3日)

Rarefied Gas Flow through a Slit

Manabu HASEGAWA** and Yoshio SONE**

(Department of Aeronautical Engineering, Kyoto University, Kyoto 606)

(Received November 29, 1989, Accepted February 3, 1990)

1. ま え お き

スリットや円形オリフィスをすぎる流れの問題は古くから広く関心が持たれており, Knudsen による実験(1909)の十分低圧な状態における結果が, Maxwell 分布則に基づく自由分子流解の検証にもなったように, 気体論とも深いかわりをもってきた¹⁾. 特に1960年代に入ってから実験的研究, 解析的研究共に盛んになり, 希薄度の高い場合に対しては, Narasimha, Willis, Stewart らによって気体論の方程式に基づく解析が試みられている²⁾.

気体論の基礎方程式である Boltzmann 方程式³⁾は, 独立変数の数が多く複雑で, これを直接解析することは一般に容易でない. 昨今のコンピューターの急速な進歩に伴い, これに基づく任意の希薄度にわたる精密な解析も可能になってきているが, 現状では1次元問題に限られる. さきに著者らは, モデル方程式³⁾(Boltzmann 方程式の衝突項を簡単化したもの)に基づく古くから行われていた1次元問題に対する解析³⁾を応用し, 2次元問題に対する数値解析を希薄度の広い範囲にわたって行い, 物理量の局所値を精密に求めた(種々の断面の直管における希薄気体の Poiseuille 流と熱遷移流^{4,5)}).

スリットをすぎる希薄気体の流れの問題も同様の手法で解析できるが, さきの問題と異なり無限領域の問題になるので工夫を要する. ここでは, スリットより十分離れた所で漸近解を導入し, これを利用することによって

気体の振舞を解析した.

2. 問 題

厚みのない2次元スリットで境された, 微小な圧力差を持つ2つの半無限領域間に誘起される希薄気体の定常流を解析する. 但し, 無限上・下流で気体は静止しており, その温度はスリット壁面の温度に等しいとする.

3. 仮 定

(i) 気体の振舞は Boltzmann-Krook-Welander 方程式(B-K-W 方程式)³⁾に従う. (ii) スリット壁面では気体分子は拡散反射³⁾する. (iii) 2領域間の圧力差は小さく, 従って系は静止平衡状態からのずれが小さく, 方程式及び境界条件は線形化できる.

4. 記 号

$2L$: スリット幅, Lx_1 : 空間直交座標(スリット中心に原点を採り, スリット端に平行に x_3 軸を, スリット壁面上に x_2 軸を採る), $p_0(1 \pm \Delta p)$: $x_1 \leq 0$ における無限

Fig. 1 Domain of integration.

* 平成元年10月24日 第30回真空に関する連合講演会で講演 (24Ap-6)

** 京都大学工学部航空工学教室 (〒606 京都市左京区吉田本町)

遠方の圧力 (p_0 : 基準圧力), T_0 : 無限遠方及びスリット壁面の温度, n_1 : スリット壁面の気体側向き単位法線ベクトル ($n_2=n_3=0$), $p_0(RT_0)^{-1}(1+\omega)$: 気体の密度, $(2RT_0)^{1/2}u_1$: 気体の速度 ($u_3=0$), $T_0(1+\tau)$: 気体の温度, $p_0(RT_0)^{-1}(1+\sigma)$: スリット壁面における反射分子が従う Maxwell 分布の密度に対応する変数, R : 単位質量当りの気体定数, l_0 : 圧力 p_0 , 温度 T_0 の静止平衡

状態における平均自由行程, $k=(\pi^{1/2}/2)(l_0/L)=(\pi^{1/2}/2)Kn$: 希薄度を表すパラメータ (Kn : クヌーゼン数).

5. 解 析

線形 B-K-W 方程式及び拡散反射境界条件は, 巨視的変数に対する次の線形積分方程式系に変換される.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ \tau(\mathbf{x}) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\pi k} \iint_{D(\mathbf{x})} \left\{ \omega(\bar{\mathbf{x}}) \begin{bmatrix} J_0(|\mathbf{X}|/k) \\ -(\mathbf{X}/|\mathbf{X}|)J_1 \\ (2/3)[J_2-J_0] \end{bmatrix} - \frac{2\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{X}}{|\mathbf{X}|} \begin{bmatrix} J_1(|\mathbf{X}|/k) \\ -(\mathbf{X}/|\mathbf{X}|)J_2 \\ (2/3)[J_3-J_1] \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \tau(\bar{\mathbf{x}}) \begin{bmatrix} J_2(|\mathbf{X}|/k) - J_0(|\mathbf{X}|/k) \\ -(\mathbf{X}/|\mathbf{X}|)[J_3-J_1] \\ (2/3)[J_4-2J_2+(3/2)J_0] \end{bmatrix} \right\} \frac{1}{|\mathbf{X}|} dD(\bar{\mathbf{x}}) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{l(\mathbf{x})} \sigma(\bar{\mathbf{x}}) \begin{bmatrix} J_1(|\mathbf{X}|/k) \\ -(\mathbf{X}/|\mathbf{X}|)J_2 \\ (2/3)[J_3-J_1] \end{bmatrix} \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{n}(\bar{\mathbf{x}})}{|\mathbf{X}|^2} dl(\bar{\mathbf{x}}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{2}{\pi^{1/2}k} \iint_{D(\mathbf{x})} \left\{ \omega(\bar{\mathbf{x}})J_1(|\mathbf{X}|/k) - \frac{2\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{X}}{|\mathbf{X}|} J_2(|\mathbf{X}|/k) + \tau(\bar{\mathbf{x}})[J_3(|\mathbf{X}|/k) - J_1(|\mathbf{X}|/k)] \right\} \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})}{|\mathbf{X}|^2} dD(\bar{\mathbf{x}}), \quad (4)$$

$$J_n(\eta) = \int_0^\infty t^n \exp\left(-t^2 - \frac{\eta}{t}\right) dt, \quad \mathbf{X} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}. \quad (5)$$

ここに, $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$, $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$, $\mathbf{n}=(n_1, n_2)$, また, (2), (3)式における J_n 関数の引数は(1)式と同様 $|\mathbf{X}|/k$ である. また積分領域の $D(\mathbf{x})$ は気体領域のうち $\mathbf{x}$ から見える範囲の領域, $l(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ から見える壁面部分である (Fig. 1).

一方これとは別に, スリットより十分離れた所では解は大局的に変化がゆるやかであるので, 漸近理論^{6,7)}を応用して解を構成することができる. 但し, スリット側の様子を指定していないので, 解は未定定数を含む (具体形省略).

ここでは, 線形積分方程式(1)~(3) [$f=\bar{L}(f)$] を, 漸近解を利用しながら, Neumann 級数 [$f_{n+1}=\bar{L}(f_n)$] を数値的に構成する方法により, 以下の手順で解析した. まず全領域を, スリットを含む数値解領域と漸近解を用いる遠方領域に分ける. 次に数値解と漸近解で全領域の f_n が表されたとし, これから数値解領域の f_{n+1} を上の定義から数値計算によって求める. これにうまく接続するように仮に決めてあった漸近解の未定定数を決め直し, これにより全領域の f_{n+1} を得る. この手続きを f_{n+1} が収束するまで繰り返す.

6. 結 果

いくつかの k の値に対する結果を Fig. 2~5, Table 1 に示す. Fig. 2 にはスリット近傍の流れ場を示す. 図中の矢印は, その始点における無次元速度 $\mathbf{u}/\Delta p$ を表す.

Fig. 2 Flow field. (a) $k=4.0$, (b) $k=1.0$, (c) $k=0.25$. The arrows indicate the nondimensional velocity $\mathbf{u}/\Delta p$ at their starting points. The magnitude of 1.0 is shown in the figures.

Fig. 3 Velocity distribution in the slit.

Fig. 4 Nondimensional mass flux M/M_{fm} versus k .
○: the present numerical result;
----: $(1/k) \ln(1/k)$ -order correction to the free molecular flow solution [Eq. (8)].

Fig. 5 Examples showing smooth transition from the numerical solution of u_1 to the asymptotic solution for $k=1.0$. —: numerical solution ($x_{1,2} \leq 28$); ----: asymptotic solution ($x_{1,2} \geq 20$). The differences between the two solutions for $20 \leq x_{1,2} \leq 28$ are very small, and some cannot be seen in the figure.

スリット端点 ($x_1=0, x_2=1$) では, 3 方向からの極限[(i) $x_1=0, x_2 \rightarrow 1-0$: このとき $u_2=0$; (ii) $x_1 \rightarrow +0, x_2=1$; (iii) $x_1=0, x_2 \rightarrow 1+0$: このとき $u_1=0$] を考えている (各々積分領域が異なる). また Fig. 3 にはスリット内の速度分布をグラフに示す. 単位時間にスリットを x_1 方向に通過する質量流量 M (スリット方向単位長あたり) は次式で与えられる.

$$M = M_{fm} \left[(\pi^{1/2}/\Delta p) \int_0^1 u_1(0, x_2) dx_2 \right], \quad (6)$$

$$M_{fm} = 4p_0 (2\pi RT_0)^{-1/2} L \Delta p. \quad (7)$$

ここに M_{fm} は自由分子流解析解による結果である. Fig. 4 には無次元流量 M/M_{fm} をグラフに, また Table 1 にはその数値を表に示す. Fig. 4 中の破線は, 自由分子流解に対する $(1/k) \ln(1/k)$ のオーダーまでの補正

$$M/M_{fm} = 1 - (\pi^{1/2}/2 - \pi^{-1/2}) (1/k) \ln(1/k) \quad (8)$$

を表す. さらに, Fig. 5 には数値解と漸近解の接続の様子を一部示した.

謝 辞

本研究の一部は, 平成元年度文部省科学研究費補助金 [奨励(A) 特別 No. 01790361] の援助によるものである.

Table 1 Nondimensional mass flux M/M_{fm} .

k	M/M_{fm}
4	1.2439
2	1.4396
1	1.8002
0.5	2.4814
0.25	3.7827

〔文 献〕

- 1) E. H. Kennard: *Kinetic Theory of Gases*, (McGraw-Hill, New York, 1938) p. 64.
- 2) J. D. Stewart: *J. Fluid Mech.* **35** (1969) 599.
- 3) 曾根良夫, 青木一生: 希薄気体力学 (分子気体力学) 流体力学ハンドブック, 日本流体力学会編 (丸善, 1987) 第14章.
- 4) 曾根良夫, 長谷川学: 真空 **30** (1987) 425.
- 5) 長谷川学, 曾根良夫: 真空 **31** (1988) 416.
- 6) Y. Sone: *Rarefied Gas Dynamics*, ed. L. Trilling and H. Y. Wachman (Academic Press, New York, 1969) Vol. I, p. 243.
- 7) Y. Sone: *Rarefied Gas Dynamics*, ed. D. Dini (Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, 1971) Vol. II, p. 737.