円柱状凝縮相から真空中への定常蒸発流の気体論的解析*

杉元 宏**・曾根 良夫**

(受理1994年1月17日, 掲載決定1994年2月5日)

Kinetic Theory Analysis of Steady Evaporating Flows from
a Cylindrical Condensed Phase into a Vacuum

Hiroshi SUGIMOTO and Yoshio SONE

(Department of Aeronautical Engineering, Kyoto University, Kyoto 606-01)

(Received January 17, 1994, Accepted February 5, 1994)

1. ま え お き

さきに, 著者らは真空中に置かれた球状凝縮相からの定常蒸発流を気体論に基づいて解析し, その全容を明らかにした¹⁾. この流れは, 凝縮相の条件 [すなわち, 凝縮相の温度の飽和蒸気の平均自由行程と凝縮相の半径で決まる (代表) Knudsen 数] にかかわらず, 局所的な流れの変化を支配する局所 Knudsen 数 (局所平均自由行程/局所代表長; 局所代表長: 諸量の有意の変化に要する距離) が流れに沿って限りなく増大する. 従って凝縮相から遠く離れるに従って流れは自由分子流に近づく. このため, 速度分布関数の高さや気体の温度が流れと共に限りなく小さくならず, ある一定の大きさにとどまる. しかし, 2次元物体である円柱状凝縮相から真空中への蒸発流においては, 流れの局所 Knudsen 数は, 等エントロピー流としての評価によれば, 流れの全域を通じて代表 Knudsen 数と同程度の大きさに保たれる. このことから, 円柱状凝縮相の場合, 遠方場の振舞は球状凝縮相の場合と大きく異なることが予想される. このような違いに注目して, 本研究では文献2に引続き, 円柱状凝縮相から真空中への定常蒸発流を解析し, その全容を明らかにする.

2. 問 題

真空中に置かれた円柱状凝縮相 (半径: L , 温度: T_w , 温度 T_w における飽和蒸気圧: p_w) から定常な蒸発流が

起こっている. このときの蒸発流の振舞を気体論に基づいて解析する. 解析は次の仮定の下で行う. (i) 気体の振舞は Boltzmann-Krook-Welander (BKW) 方程式^{3,4)}に従う; (ii) 凝縮相を離れる分子の速度分布は, 温度 T_w , 圧力 p_w の静止平衡分布の対応する部分である (完全凝縮型境界条件)⁴⁾.

3. 解 析

基礎方程式および境界条件を無次元変数を用いて表すと, Knudsen 数 $Kn_w (=l_w/L, l_w$: 温度 T_w , 圧力 p_w の静止平衡状態における平均自由行程) のみをパラメーターとして含む微積分方程式の境界値問題に帰着する. この境界値問題を, パラメーター Kn_w 全域にわたって差分法により数値解析する. 凸型物体まわりの流れを扱う本問題では, 気体中で速度分布関数は不連続である^{1,5)}. 幸いこれには文献5で開発した, 通常差分方程式に不連続線に沿っての改良を加えたものを利用することができる. しかし, 本問題では, 結果を見ればわかるように, 無限遠の状態への近づき方が極めて遅く, 広大な計算領域が必要になる. このため, 遠方場で十分な解析精度を保つために必要な改良 (速度分布関数の変化の激しい所での特性線座標の導入) を上記の方法に加えて用いる.

4. 結 果

以下では次の記号を用いる. r : 円柱中心軸からの距離; ξ_r, ξ_θ, ξ_z : 空間中の各点での分子速度の半径, 円周, 軸方向の成分; $\xi_r = \xi \cos \theta_\xi$, $\xi_\theta = \xi \sin \theta_\xi$; ρ, u, T : 気

* 平成5年10月28日 第34回真空に関する連合講演会で講演

** 京都大学工学部航空工学教室 (〒606-01 京都市左京区吉田本町)

Fig. 1 The profiles of the density ρ , the velocity u , and the temperature T for various Knudsen numbers Kn_w . (a) ρ/ρ_w vs r/L , (b) $u/(2RT_w)^{1/2}$ vs r/L , (c) T/T_w vs r/L . In (a), the data for $Kn_w=0$ (the continuum limit), 0.005, 0.01, 0.1, 1, 10, and ∞ (the free molecular flow) are shown. In (b) and (c), the data for $Kn_w=0, 0.01, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10$, and ∞ are shown. The dashed lines in (b) indicate the limiting values at infinity for $Kn_w=0.01, 0.1, 1$, and 10 .

体の密度，流速（半径方向の成分のみを持つ），温度； f ：気体分子の速度分布関数； R ：単位質量当りの気体定数； $\rho_w = \rho_w/RT_w$ ； m_f および e_f ：単位時間当りに凝縮相の単位表面積から気体中へ流出する質量およびエネルギー； $g = \int f d\xi_z$ ， $h = \int \xi_z^2 f d\xi_z$ （周辺速度分布関数）； $T_r = (R\rho)^{-1} \int (\xi_r - u)^2 f d\xi_r d\xi_\theta d\xi_z$ ， $T_\theta = (R\rho)^{-1} \int \xi_\theta^2 f d\xi_r d\xi_\theta d\xi_z$ ， $T_z = (R\rho)^{-1} \int \xi_z^2 f d\xi_r d\xi_\theta d\xi_z$ （半径，円周，軸方向の温度）。

気体の密度，流速，温度の振舞を **Fig. 1** に示す。これらはいずれも円柱近傍で急激に変化した後，ゆっくりと無限遠の状態に近づいていく。遠方では，密度は $1/r$ に比例する形で零に近づき，これと質量保存則（ $\rho u r = \text{一定}$ ）に対応して，流速は一定値 [Fig. 1(b) 中の点線] に近づくが，その近づき方は Kn_w の増大と共に極めて遅くなる [Fig. 1(b) の横座標に注意せよ]。上記の極限値 u_∞ は次のようにして算定した：流れに垂直な単位面積を単位時間を通してエネルギー（エネルギー流束）を w とし， $r \rightarrow \infty$ のとき $(w - \rho u^2/2)/\rho u \rightarrow 0$ であることを数値的に確かめ， $u_\infty^2/2 = \lim_{r \rightarrow \infty} w/\rho u$ ($= \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r w / 2\pi r \rho u = 2\pi L e_f / 2\pi L m_f$) $= e_f/m_f$ より次に示す m_f および e_f から求めた。気体の温度は流れと共に，自由分子流を除き，零に近づくが，その近づき方は Kn_w の増大と共に

Fig. 2 The mass and energy flow rates m_f and e_f from unit surface area of the condensed phase versus Kn_w . ●,: $m_f/\rho_w(2RT_w)^{1/2}$; ○, —: $e_f/\rho_w(2RT_w)^{1/2}$. The — and at $Kn_w=\infty$ coincide.

Fig. 3 The ratios T_θ/T_r and T_z/T_r for various Knudsen numbers. (a) T_θ/T_r vs r/L , (b) T_z/T_r vs r/L . The data for $Kn_w=0, 0.01, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10$, and ∞ are shown. The dashed lines in (a) indicate the estimated values at infinity for $Kn_w=0.01, 0.1$, and 0.2 .

非常に遅くなる。凝縮相から気体中への質量およびエネルギーの流出率 m_f および e_f を **Fig. 2** に示す。これらは $Kn_w=0$ および ∞ では球の場合と一致するが，中間値の Kn_w では球の場合よりやや（高々3%）小さい。これは，凝縮相を離れた分子のうち，分子衝突のため凝縮相に戻る分子の割合が球の場合よりも大きいことを示している。流れの非平衡度の目安となる T_θ/T_r および T_z/T_r を **Fig. 3** に示す（平衡状態では $T_r=T_\theta=T_z$ ）。前者は $r \rightarrow \infty$ のとき Kn_w に応じた0から1までのある一定値に近づく。後者はこのとき $Kn_w=\infty$ を除く全ての Kn_w に対して1に近づくが，その近づき方は Kn_w の増大と共に非常に遅くなる。

自由分子流（ $Kn_w=\infty$ ）の場合，速度分布関数は円柱から直進して来る分子に対応する分子速度では円柱上の

それと等しく、その他の分子速度では零である（特に円柱上では入射分子に対しては零となる）。従って分布は $|\theta_\xi| < \text{Arcsin}(L/r)$ に局在し、流れに沿って限りなく狭くなり、その範囲では円柱上の $\theta_\xi = 0$ の分布に近づいていく。従って分布の高さは流れに沿って一定で、流れの方向の分布の拡がりも零でない一定値に近づいていく[†]。以下、有限の Kn_w に対して衝突効果によって周辺速度分布関数 g の振舞がどのように変わるかを計算結果に基づき Figs. 4-7 を援用して説明する[‡]。 $Kn_w = 5$ の場合 (Fig. 4), 分子同士の衝突の効果は、円柱からあまり離れない範囲では僅かで、分布の変化は小さい分子速度付

Fig. 4 The marginal velocity distribution function g for $Kn_w = 5$ at (a) $r/L = 1$, (b) $r/L = 5.024$, and (c) $r/L = 988.1$. The surface $g(r, \xi_r, \xi_\theta)$ is shown by two sets of the lines $\xi_r^2 + \xi_\theta^2 = \text{const}$ and $\xi_\theta/\xi_r = \text{const}$. Only the part for $\xi_\theta > 0$ is shown since g is symmetric with respect to ξ_θ . The vertical stripes represent the discontinuity of the velocity distribution function. Note the differences of the scales between (b) and (c).

近のみに見られ、自由分子流の特徴をよく残している [Figs. 4(a), (b)]. 分子衝突の効果は緩やかにしかし流れ全体では大きく現れ、分布の高さおよび拡がり（特に流れ方向の拡がり）は流れに沿って限りなく小さくなる [Fig. 4(c)]. 後者の縮退は極めて遅く、Fig. 4(c) では僅かに減少のきざしが見える程度であるが、Fig. 1(c) よりわかる]. これに伴い、当然ながら不連続の大きさも小さくなるが、分布の高さに相対的な大きさはむしろ増大する. 分布は流れ場全体を通して、不連続を境に異質な二部分から成り立っている [Figs. 4(a)-(c)]. なお不連続が相対的にかなりの大きさで無限遠まで残るのはずっと小さな Kn_w , 即ち $Kn_w = 0.2$ まで見られる. $Kn_w = 0.1$ の場合 (Fig. 5), 円柱に入射する（すなわち返ってくる）分子は衝突効果によりかなり増えるが、円柱上では不連続は大きく、分布も不連続を境とする異質な二部分から成り立っていることに変わりはない [Fig. 5(a)]. 流れに沿って不連続は速やかに減衰し、円柱から数 l_w 程度離れた所では実質的に消滅する. そこでは衝突効果が分布全体にいきわたり、その一体化が進んでいる [Figs. 5(b), 7(a). ここでは未だ小さな不連続が見える]. 流れに沿って分布はさらに変形を続けるが、円柱半径の100倍程度離れると大きな変形はおさまり、

[†] 厳密には、流れ方向の分子速度 ξ_r に関する拡がりを指す（以下同様の表現を用いる）。また、 ξ_θ 方向の拡がりには変わらない。以下で説明する g では ξ_θ 方向の情報は積分され消えている。

[‡] 第34回真空に関する連合講演会講演予稿集 p. 32, Fig. 4(a) の縦軸の座標 0.1, 0.2 はそれぞれ 0.4, 0.8 の誤りである。

Fig. 5 The marginal velocity distribution function g for $Kn_w = 0.1$ at (a) $r/L = 1$, (b) $r/L = 1.219$, (c) $r/L = 119.4$, and (d) $r/L = 1125$. (See the caption of Fig. 4.)

Fig. 6 The marginal velocity distribution function g for $Kn_w = 0.01$ at (a) $r/L = 1$, (b) $r/L = 1.0005$, (c) $r/L = 1.101$, and (d) $r/L = 903.7$. (See the caption of Fig. 4.)

Fig. 7 Similarity behavior of g in the far field. (a) $Kn_w=0.1$ and (b) $Kn_w=0.01$. Here — indicates g/g^* on the line $\xi_\theta=0$, or g/g^* on the line $\xi_r=\xi_r^*$, where ξ_r^* is the maximum point of g on $\xi_\theta=0$ and g^* is the maximum value of g . In (b) the corresponding curves of the local Maxwellian g_e/g_e^* , where g_e is the local Maxwellian, g_e^* is its maximum, ξ_r^* is its maximum point, are shown by The curves — and on $\xi_r=\xi_r^*$ cannot be distinguished at $r/L=1.101$.

かなり相似した変化を続けその高さ、拡がりがありなく、 $Kn_w=5$ のときに比べてかなり速く、減少していく [Fig. 5(b)→(c)→(d); Figs. 3(a), 7(a)]. T_θ/T_r は g の拡がりの等方性の度合を示す]. この程度の小さい Kn_w においても流れは全場にわたってかなり局所平衡状態からずれている. $Kn_w=0.01$ の場合 (Fig. 6), 円柱に返ってくる分子はさらに増えるが、不連続はかなりの大きさで、分布が二体的であることに変わりはない [Fig. 6(a)]. しかし流れに沿って不連続はきわめて短い距離 (数 l_w/L 程度) で実質的に消滅する [Fig. 6(b)]^{1,5)}. この短い距離での分布の変化は分子速度の小さい所と不連続の付近に限られ分布全体にはいきわたっておらず、円柱上での二体的特徴は十分残っている [Fig. 6(b)]. 流れに沿って一体化が進み、円柱から $10l_w$ 程度離れた所では局所平衡分布[†]に近くなる [Figs. 6(c), 7(b)]. これより下流では局所平衡分布に近い分布を保ちつつ、密度および温度の減少に対応して、分布の高さおよび拡がりがありなく ($Kn_w=0.1$ のときに比べて高さは遅く、拡がりは速く) 減少していく [Fig. 6(c)→(d); Fig. 7(b)]. 以上のように円柱から真空への蒸発流は、(真空状態に近い遠方場を含め) 流れの場全体を通して各 Kn_w 固有の振舞を示す. 一方、先に調べたように¹⁾、球からのそれは、球の近くでは円柱の場合と同様な Kn_w 固有の振舞を示すが、遠方では Kn_w のいかにかわらず自由分子流的振舞を示し、分布の高さや流れの方向の拡がりはほとんど変化せず無限遠まである大きさを保っている.

真空中への流れにおいては、流れに沿って気体の密度がどんどん減少し、分子同士の衝突が限りなく少なくなっていく. このような状況で、上に述べたように、円柱

状凝縮相と球状凝縮相の場合では遠方場に本質的な差異が見られたが、これは次のような事情による. 気体の密度は円柱の場合は r^{-1} に、球の場合は r^{-2} に比例して減少する. これに対応して、平均自由行程 l^* は前者では r に、後者では r^2 に比例して大きくなる. 従って、流れに沿って無限遠まで達するまでに分子が衝突する回数は、 dr 進むときの平均的衝突回数が dr/l であることを考慮すると、円柱の場合は無限回、球の場合は有限回である. このため遠方場では両者に大きな違いを生ずる. もう少し数学的に述べると、速度分布関数の変化を支配する Boltzmann 方程式において、その移動項 (通常左辺) と衝突項 (通常右辺) との比重は、局所 Knudsen 数によって決まる. この値は円柱の場合は流れを通して代表 Knudsen 数 Kn_w 程度であるが、球の場合は流れに沿って限りなく大きくなる^{†††}. 従って、遠方場では球の場合は代表 Knudsen 数にかかわらず自由分子流的振舞を示すが、円柱の場合は代表 Knudsen 数に応じた振舞を示す.

【文 献】

- 1) Y. Sone and H. Sugimoto: Phys. Fluids A 5, 1491 (1993).
- 2) 杉元 宏, 曾根良夫: 日本航空宇宙学会第24期年会講演会講演集, p. 157 (1993).
- 3) M. N. Kogan: *Rarefied Gas Dynamics*, (Plenum, New York, 1969), p. 79.
- 4) 曾根良夫: 分子気体力学講義録 (京都大学航空工学科) 第1章 (1987).
- 5) H. Sugimoto and Y. Sone: Phys. Fluids A 4, 419 (1992).

[†] ここでは局所平衡分布に対応する g を指す.

^{††} ある程度下流では、Mach 数が多いことに対応して流速を分子の平均速さとしてとった平均自由行程.

^{†††} 上述の l の変化と局所代表長 l^* の程度であることによる.