排気速度測定用テストドーム内壁の気体分子流束分布

松 田 七美男*

(受理2002年3月2日, 掲載決定2002年4月6日)

Molecular Flux Density Distribution on the Wall of a Test Dome for Measuring the Speed of a Vacuum Pump

Namio MATUDA*

*Department of Material Engineering, Tokyo Denki University
Nisiki-chou 2-2, Chiyoda-ku, 101-8457 Tokyo

(Received March 2, 2002, Accepted April 6, 2002)

A new solution has been obtained on the distribution of the molecular flux density striking the wall of a test dome for measuring the speed of a high vacuum pump. The calculation was carried out based on solving Clausing's integral equations by using iterative approximation method. It is found that the exact position of the wall of the tube where flux density shows the same value as exhaust end of the tube ($\approx 0.5D$, where D is tube diameter) is little affected by the gas inlet position nor the angular distribution of inlet gas.

1. はじめに

真空排気ポンプの排気速度を測定する目的に設計されたテストドームでは, 排気口での入射頻度に等しい入射頻度を示す位置に真空計を取りつける必要がある. Fig. 1のように, 直径 D 高さ $1.5D$ の円筒型テストドームにおいては, この真空計取り付け位置は排気口から $D/2$ の高さが最適であることを, Boeckmann¹⁾がモンテカルロ法を用いて示している. それ以前にはテストドームよりも簡単な構造, すなわち両端が開いている管について, Helmer²⁾が数値積分法を用いて壁面の入射頻度を計算している. この報告では, テストドーム形状に対して数値積分法による計算結果を示し, モンテカルロ法との結果を比較する.

2. 計算方法

2.1 基礎積分方程式

壁からの拡散が無視できる程度の圧力における定常状

Fig. 1 Schematics of a test dome for measuring the speed of a high vacuum pump.

態では, 真空容器内のあらゆる面において気体分子の入射頻度とその放出速度は等しくなっている. したがって, テストドーム内壁のガス放出速度 (= 入射頻度) 分布は, 以下のように積分方程式として定式化される^{3,4)}. 一端が閉じている, 直径 D , 長さ L の円形導管の閉端部から距離 x の位置にある管壁の微小部分に入射する気体分子の分子流束を $q_w(x)$, 閉端部の円上, 中心から距離 r にある微小面での分子流束を $q_c(r)$, 開口部

* 東京電機大学工学部物質工学科, (〒101-8457 東京都千代田区神田錦町 2-2)

(排気口)でのガス放出速度を同様に $q_o(r)$ とおく。また、ガス導入管からのガス導入速度を Q_i とし、ビーム効果の影響を確かめる意味で角度分布が $\cos^n \theta$ ($n \geq 1$)に比例するとする。まず $q_o(r)$ は、円筒壁と閉端部から飛来する気体分子流の和と考えられる。ガス導入口は閉端部側を向いており、ガス導入口から直接排気口に飛来する分子はない。一方、 $q_c(r)$ は、ガス導入口からの直接の入射、円筒壁および(捕獲率が1でなければ)排気口からの入射の和と考えられる。 $q_w(x)$ は、円筒壁の他の部分および閉端部からの入射および排気口からの入射、さらに $x < x_0$ ではガス導入口からの直接入射があり、それらの和と考えられる。なお排気口での捕獲率を α とすれば $(1-\alpha)q_o(r)$ が反射され、 q_c あるいは q_w への入射に寄与すると考えられる。以上を整理して、次のような $q_o(x)$, $q_c(x)$, $q_w(x)$ に対する連立積分方程式が得られる。

$$q_o(r) = \int_0^{L/D} q_w(\xi) H_w(L-\xi, r) d\xi + \int_0^{1/2} q_c(z) I_c(L, z, r) dz \quad (1)$$

$$q_c(r) = Q_i J_{ic}(x_0, r) + \int_0^{L/D} q_w(\xi) H_w(\xi, r) d\xi + \int_0^{1/2} (1-\alpha) q_o(z) I_c(L, z, r) dz \quad (2)$$

$$q_w(x) = Q_i J_{iw}(x_0 - x, 1/2) + \int_0^{L/D} q_w(\xi) G(\xi, x) d\xi + \int_0^{1/2} q_c(r) H_c(x, r) dr + \int_0^{1/2} (1-\alpha) q_o(r) H_c(L-x, r) dr \quad (3)$$

$$G(\xi, x) = 1 - |\xi - x| \frac{2(\xi - x)^2 + 3}{2\{(\xi - x)^2 + 1\}^{3/2}} \quad (4)$$

$$H_c(\xi, r) = \frac{16\xi r(1 + 4\xi^2 - 4r^2)}{\{(1 + 4\xi^2 + 4r^2)^2 - 16r^2\}^{3/2}} \quad (5)$$

$$H_w(\xi, r) = \frac{8\xi(1 + 4\xi^2 - 4r^2)}{\{(1 + 4\xi^2 + 4r^2)^2 - 16r^2\}^{3/2}} \quad (6)$$

$$I_c(\xi, z, r) = \frac{2z\xi^2(\xi^2 + z^2 + r^2)}{\{(\xi^2 + z^2 + r^2)^2 - 4z^2r^2\}^{3/2}} \quad (7)$$

$$J_{ic}(\xi, r) = \frac{(n+1)\xi^{n+1}}{2\pi(\xi^2 + r^2)^{n+3/2}} \quad (8)$$

$$J_{iw}(\xi, r) = \begin{cases} \frac{(n+1)r\xi^n}{2\pi(\xi^2 + r^2)^{n+3/2}} & (0 \leq \xi) \\ 0 & (\xi < 0) \end{cases} \quad (9)$$

ここに、 ξ, x, r は直径 D で正規化した変位である。また、ガス導入口の直径は無視できるものとし、その位置を x_0 とおいている。なお長さの正規化値は1.5に固定し

ている。

2.2 $q(x)$ の数値積分による解

積分方程式の解として $q(x)$ を解析的に求めることは困難である⁵⁾。したがって、モンテカルロ法による数値解析が用いられるのであるが、精度の高い結果を得るためにはかなり大きな計算機資源が必要となる。そこで、積分方程式を解くという観点からはモンテカルロ法よりもむしろ古典的かつ直接的な、逐次近似法による数値積分を用いてみる。この方法はクラウジング係数の計算にしばしば用いられてきた¹⁶⁾。逐次近似法とは

$$\begin{aligned} q^{(0)}(x) &= Q(x) \\ q^{(1)}(x) &= Q(x) + \int_0^{L/D} q^{(0)}(\xi) G(\xi, x) d\xi \\ &\dots \\ q^{(i)}(x) &= Q(x) + \int_0^{L/D} q^{(i-1)}(\xi) G(\xi, x) d\xi \quad (10) \end{aligned}$$

により逐次 $q^{(i)}(x)$ を求め、 $i-1$ 番目と i 番目の差が許容誤差以下になった時の解を近似解とする方法である。

今回は $1 - |x_i/x_{i-1}|$ の許容誤差を 1×10^{-6} として計算を実行した。

3. 計算結果

3.1 ゲージ取り付け位置 $h \approx 0.5D$ の確認

ガス導入口の位置が0.5、角度分布が余弦則に従う($n=1$)場合について、円筒部分の分割数を512、断面の円の分割(同心円環)数を256とし、単純な求積法を用いて計算した結果を以下に示す。収束判定は $q_w(x)$ に対してのみ行っている。Fig. 2は、ガス導入口の位置 x_0 を0.5とし、排気口での捕獲率 α をパラメータとして計算した結果である。捕獲率が小さくなるに連れて、入射頻度の傾きは小さくなるが、排気口での入射頻度 Γ_0 に等しくなる位置、すなわち $\Gamma/\Gamma_0=1$ となる位置に大きな変化はない。Fig. 3に示すように、 $\Gamma/\Gamma_0=1$ 付近を拡大

Fig. 2 Normalized flux density distribution of the wall (the gas inlet position $x_0=0.5$).

Fig. 3 Normalized flux density distribution of the wall (the gas inlet position $x_0=0.5$): Zoom in near by $\Gamma/\Gamma_0=1$.

Fig. 4 $\Gamma/\Gamma_0(x)$ for varying gas inlet position $x_0=\beta$.

Fig. 5 $\Gamma/\Gamma_0(x)$ for varying gas inlet position $x_0=\beta$: Zoom in near by $\Gamma/\Gamma_0=1$

すれば、僅かに変化していることが判る。この図から、排気口での入射頻度 Γ_0 に等しくなる壁面の位置は、直径を D として、開口部から $0.531D \sim 0.534D$ と読み取れる。

3.2 ガス導入口位置の影響

テストドームでは真空計を取りつける位置 $h=0.5D$ としているが、上記結果から、ガス導入口の位置が $0.5D$ の場合には厳密には正しくないことになってしまう。そこで、捕獲率 $\alpha=1$ の場合について、ガス導入口の位置をパラメータ ($=\beta$) として $h=0.5D$ となる最適値を探

Fig. 6 $\Gamma/\Gamma_0(x)$ for varying n in $\cos^n \theta$ which represents angular distribution of the inlet gas.

してみた、結果を Fig. 4 に示す。 β を大きくすると、 $\Gamma/\Gamma_0=1$ となる位置が 0.5 に近づいていくが、この図では判別できない。 Fig. 5 に示すように拡大すると、 $\beta=1.001$ が最適値であることが判った。

3.3 ガス導入口における角度分布の影響

ガス導入の配管による全体への影響を少なくするには、パイプを細くすべきであるが、その場合いわゆるビーム効果が生じ、放出されるガスの角度分布は軸方向に揃い、余弦則からは逸脱する。そこで、角度分布を仮に $\cos^n \theta$ として計算を実行してみた。ただし、捕獲率 $\alpha=1$ 、導入口位置 $x_0=0.5$ としている。 Fig. 6 に $n=1, 2, 3, 4, 8$ の結果をまとめる。結論からいえばあまり変化がなく、 n の増加につれてわずかに天井側へとシフトすることが判った。

4. ま と め

円筒型テストドーム内壁の入射頻度分布を積分方程式に基づく数値計算により求めた。モンテカルロ法による結果とほぼ同一であるが、排気口での入射頻度 Γ_0 に等しい入射頻度となる壁面の高さ h の直径 D に対する比は 0.5 よりも僅かに大きく、 $0.531 \sim 0.534$ となっていることが判った。この値はガス導入口の位置によって若干変化し、捕獲率 $\alpha=1$ の場合、丁度 0.5 となるには $\beta=1.01$ 、すなわち排気口からは $0.49D$ の位置であるという結果が得られた。ただし、この程度の影響は実際のテストドームの設計に変更をもたらすものではない。また、導入ガスの角度分布が余弦則から逸脱した場合にも、この位置に大きな変化はないことが判った。

【文 献】

- 1) M. D. Boeckmann: J. Vac. Sci. Technol. **A4** (1985) 353.
- 2) J. C. Helmer: J. Vac. Sci. technol. **4** (1967) 360.
- 3) E. M. Sparrow, V. K. Jonsson and T. S. Lundgren:

- Trans. ASME Ser. C, J. Heat Transfer, **85** (1963) 111.
 4) D. J. Santeler, M. D. Boeckmann: J. Vac. Sci. Technol. **A5** (1987) 2493.
 5) C. M. Davis and C. B. Lucas: J. Phys. D, **16** (1986) 1.
 6) W. Steckelmacher: Rep. Prog. Phys. **49** (1986) 1083.

A 付 録

A.1 微小面間の相互入射頻度

微小面 dS_1 , dS_2 上の単位時間あたりの入射数は面間を R , 面を結ぶ直線と面の法線との余弦をそれぞれ $\cos \psi_1$, $\cos \psi_2$ とおくと,

$$d\Gamma_{12} dS_1 dS_2 = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi R^2} dS_1 dS_2 \quad (11)$$

で与えられる.

Fig. 7 のように座標を定め, 導管断面の円内の微小面を dS_c , dS_e に垂直で円筒の中心軸を向いている微小面を dS_w とおくと,

$$R^2 = \xi^2 + z^2 + r^2 + 2zr \cos \theta \quad (12)$$

$$\cos \psi_c = \frac{\xi}{R} \quad (13)$$

$$\cos \psi_w = \frac{z + r \cos \theta}{R} \quad (14)$$

dS_w での入射頻度 (単位面積単位時間あたりの入射数) は, 式(11)を dS_w で割り, dS_c を円環上で積分して

$$H_c^*(\xi, r, z) dr \quad (15)$$

$$= \int_{\text{円環}} d\Gamma_{cw} dS_c \quad (16)$$

$$= \frac{r dr}{\pi} \cdot 2 \int_0^\pi \frac{\xi(z + r \cos \theta) d\theta}{(\xi^2 + z^2 + r^2 + 2zr \cos \theta)^2} \quad (17)$$

$$= \frac{\xi r dr}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[- \int_0^\pi \frac{d\theta}{\xi^2 + z^2 + r^2 + 2zr \cos \theta} \right]$$

$$= \frac{\xi r dr}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{-1}{\sqrt{c^2 - b^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{c-b}{c+b}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right]_0^\pi$$

$$c = \xi^2 + z^2 + r^2, b = 2zr$$

$$= \frac{\xi r dr}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{-2}{\sqrt{(\xi^2 + z^2 + r^2)^2 - 4z^2 r^2}} \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{2\xi r z (\xi^2 + z^2 - r^2)}{\{(\xi^2 + z^2 + r^2)^2 - 4z^2 r^2\}^{3/2}} dr \quad (18)$$

円筒内壁では $z = 1/2$ であるから, この値を代入して

$$H_c(\xi, r) dr = H_c^*(\xi, r, 1/2) dr \quad (19)$$

$$= \frac{16\xi r (4\xi^2 + 1 - 4r^2)}{\{(4\xi^2 + 1 + 4r^2)^2 - 16r^2\}^{3/2}} dr \quad (20)$$

Fig. 7 Axes and positions of the differential areas.

逆に, 開口部の微小面 dS_e 上の入射頻度は, dS_w を半径 z , 幅 $d\xi$ の微小円筒上で積分して

$$H_w^*(\xi, r, z) d\xi \quad (21)$$

$$= \int_{\text{円筒}} d\Gamma_{ew} dS_w \quad (22)$$

$$= \frac{z d\xi}{\pi} \cdot 2 \int_0^\pi \frac{\xi(z + r \cos \theta) d\theta}{(\xi^2 + z^2 + r^2 + 2zr \cos \theta)^2} \quad (23)$$

$$= \frac{z\xi d\xi}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[- \int_0^\pi \frac{d\theta}{\xi^2 + z^2 + r^2 + 2zr \cos \theta} \right]$$

$$= \frac{2z^2 \xi (\xi^2 + z^2 - r^2)}{\{(\xi^2 + z^2 + r^2)^2 - 4z^2 r^2\}^{3/2}} d\xi \quad (24)$$

円筒内壁では $z = 1/2$ であるから, この値を代入して $H_w(\xi, r)$ を得る.

導管断面の円に平行な微小面を dS_p とおくと, 直交している場合よりも単純な関係

$$R^2 = z^2 + z^2 + r^2 + 2zr \cos \theta \quad (25)$$

$$\cos \psi_c = \cos \psi_p = \frac{x}{R} \quad (26)$$

が得られる. dS_p での入射頻度は, dS_w の場合と同様に考えて, dS_c を円環上で積分して

$$I_c^*(\xi, r, z) dr \quad (27)$$

$$= \int_{\text{円環}} d\Gamma_{cw} dS_c \quad (28)$$

$$= \frac{r dr}{\pi} \cdot 2 \int_0^\pi \frac{\xi^2 d\theta}{(\xi^2 + z^2 + r^2 + 2zr \cos \theta)^2} \quad (29)$$

$$= \frac{r dr}{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[- \int_0^\pi \frac{d\theta}{\xi^2 + z^2 + r^2 + 2zr \cos \theta} \right]$$

$$= \frac{2r\xi^2 (\xi^2 + z^2 + r^2)}{\{(\xi^2 + z^2 + r^2)^2 - 4z^2 r^2\}^{3/2}} dr \quad (30)$$

逆の場合は r, z を入れ換えたものとなる.