論文

ウェーブレットを用いた間欠性を含む人工風速波形の生成の試み

Wavelet - Based Method to Generate Artificial Wind Fluctuation Data with Intermittency

北川徹哉*¹ 野村卓史*²
Tetsuya KITAGAWA Takashi NOMURA

SUMMARY

Special attention is paid to the phenomenon of which fluctuations due to small scale eddies in the inertial range of fully turbulent flows provide intermittency. In order to investigate this intermittent structure in natural winds, the wavelet transform is applied to the time history of a measured wind velocity fluctuation. Reflecting the intermittency, the result indicates that the probability density functions of the wavelet coefficients at high scale-parameters, which correspond to the statistical characteristics of the small scale fluctuations, deviate from the Gaussian distributions. Taking this intermittency into account, a method using the inverse wavelet transform to generate artificial wind velocity data is suggested. The characteristics of the time histories produced with the proposed method are discussed.

1. はじめに

1941年にコルモゴロフが自然風などの発達した乱流における自己相似性（フラクタル性¹⁾）をカスケード構造を仮定とする次元解析によって導いた。その後、計測機器の精度向上およびDNSなどの計算機シミュレーションの発達とともに、実際の乱流の変動は完全な自己相似ではなく、間欠性も含まれることが明らかにされつつある^{2),3),4)}。そこで、局所的な自己相似性を考慮するために多重フラクタルを導入した多様なモデルが統計乱流理論の分野において考案され⁵⁾、乱流の間欠性と統計的特性とを結びつける試みが行われている。

一方、測定された乱流信号から局所相似性を検出するのに適した方法の一つとしてウェーブレッ

ト変換^{6)~10)}がある。フーリエ変換が信号全体の波動性をとらえるのに対し、ウェーブレット変換は様々に重なり合った個々の渦による変動を抽出することに相当する。Yamadaら¹⁰⁾は自然風の風速変動データにウェーブレット変換を適用し、得られたウェーブレット係数の確率密度を調べた。その結果、測定データのスペクトルはコルモゴロフの5/3乗則に従いながらも、小スケール（高周波数）の変動ほどその確率密度が非ガウスの分布であり、むしろ指数分布に近いことが示された。すなわち、小スケールの渦による速度変動の確率密度は尖度が高く、これは乱流のダイナミクスに内在する間欠性を示唆する。

逆に考えると、乱流の間欠性を満足する形でウ

*1 日本大学理工学部土木工学科 助手 博士（工学）

Research Associate, Department of Civil Engineering, Nihon University

*2 日本大学理工学部土木工学科 教授 工学博士

Professor, Department of Civil Engineering, Nihon University

（原稿受理：平成11年5月7日）

ウェーブレット係数を予め与えることができれば、ウェーブレット逆変換を用いて自然風の変動に近い人工風速変動データを自由に作成することが可能となる。概念的には、任意のスケールの渦を任意の強さで時間軸上にちりばめることができるのである。本研究は、以上のウェーブレットの利点を活かして、与えられたスペクトル特性を有し、かつ間欠性を含む人工風速変動データの作成を目的とする。まず、Yamadaらの研究と同様に、実測された風速変動データにウェーブレット変換を適用し、自然風に含まれる間欠性について検討する。次に、間欠性を組み込んだ統計乱流モデルの一つである対数ポアソンモデル^{11), 12)}を応用してウェーブレット係数を構成し、ウェーブレット逆変換により人工風の時刻歴を生成する。そして、平均風速や乱れのスケール、乱れの強さを数通りに変え、本方法による人工風速データの特性について議論するとともに、実測データと比較する。なお、本研究は発達した乱流としての自然風を対象とし、現段階では大気の組織運動や地形の起伏などが直接もたらす間欠性については考慮していない。

2. ウェーブレット変換

2.1 離散ウェーブレット変換

離散ウェーブレット変換^{6)~10)}は、解析対象とする時刻歴 $y(t)$ とウェーブレットと呼ばれる基底関数 $\psi(t)$ との内積

$$\alpha_{j,k} = \langle y(t) | \psi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \psi_{j,k}^*(t) dt \quad (1)$$

*: 複素共役

$j, k \in \mathbb{Z}$

によって定義され、変換結果である $\alpha_{j,k}$ はウェーブレット係数と呼ばれる。ここで、 $\psi(t)$ はスケールパラメータ j とシフトパラメータ k によって、

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (2)$$

のような関数族から構成されている。 j は $\psi(t)$ を相

似変形させ、 k は $\psi(t)$ の時間軸上での位置を定める役割を担う。また、 $\psi(t)$ はアドミッシブル条件、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega)|^2 / |\omega| d\omega < \infty$$

を満たす必要がある。ここで、 $\Psi(\omega)$ は $\psi(t)$ のフーリエ変換である。

一般に離散ウェーブレットおよび、その元となるスケール関数は多重解像度解析により構成される。まず、 $L^2(R)$ の任意の関数を多重解像度レベルで表現するために、次を満足する閉線形空間 V_i を定義する。

$$\{0\} \subset \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset L^2(R)$$

ここで、 V_i は以下の条件を満たす。

1) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$ は $L^2(R)$ において密である。

2) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

3) 隣あう閉線形空間 V_i と V_{i+1} には、スケール変換、

$$g(x) \in V_i \Leftrightarrow g(2x) \in V_{i+1}$$

の関係がある。また、整数シフトを施しても属する空間は変化しない。例えば、

$$g(x) \in V_i \Leftrightarrow g(x+1) \in V_i$$

である。

次に、 V_i における V_{i-1} の直交補空間 Ω_{i-1} を定義する。

$$V_i = V_{i-1} \oplus \Omega_{i-1} \quad (3)$$

この時、

$$V_{i-1} \perp \Omega_{i-1} \quad (4)$$

であり、同時に、

$$\Omega_{i-1} \perp \Omega_i \quad (5)$$

となり、 Ω_i も直交空間として構成される。すると $L^2(R)$ は閉線形空間 Ω_i の直和、

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \Omega_i = L^2(R) \quad (6)$$

により覆われる．この Ω_i が離散直交ウェーブレットにより構成される関数空間である．また，ウェーブレット（式(2)）を生む親の空間 V_i に属する関数は，スケール関数と呼ばれる．

離散ウェーブレット $\psi(t)$ には幾つかの基底関数が考案されているが，本研究においては，Meyer⁶⁾の離散直交ウェーブレットを用いる．Meyerのウェーブレットは周波数領域においてコンパクトサポートであり，周波数との対応が比較的良好い．Yamadaら^{8),10)}は周波数領域においてスケール関数 $\Phi(f)$ を適切に定義し，式(3)に基づいてMeyerのウェーブレット（以下，単にウェーブレットとよぶ）を導いている．Yamadaらの方法により構成された周波数領域におけるウェーブレット $\Psi(f)$ の実部と虚部をFig.1に示す．また，この絶対値をスケールパラメータ $j=0, 1, 2$ の場合について示したものがFig.2である．ウェーブレットのサポートが j に対応してオクターブスケールで変化することがわかる．また，ほぼ式(6)が満足されているが，非常に低い周波数領域は最小の $j (=0)$ においてもサポートされない．すなわち，厳密には $j=-\infty$ にならないとウェーブレットのサポートはゼロに近づかないため，離散ウェーブレットでは静的成分を実用上は検出できない．そこで，静的成分の検出が必要な際にはスケール関数が用いられる． $j=0$ の場合のスケール関数 $\Phi_{j=0}(f)$ もFig.2にあわせて示している．以上に示したウェーブレットおよびスケール関数は式(4)，(5)を満たす正規直交関数である．なお，時間領域におけるウェーブレットの形状はFig.1の $\Psi(f)$ をフーリエ逆変換することにより得られる．Fig.3にその形状を示す．局在化した関数であり，この波形がシフトパラメータ k により時間軸上を移動することになる．

さらに，Yamadaら^{8),10)}はウェーブレット変換について，FFTを利用した効率的な計算法を開発しており，本研究においてもそれに従う．詳細は文献8)，10)を参照されたい．また，Yamadaらのアル

Fig. 1 周波数領域におけるMeyerのウェーブレット (Meyer wavelet in frequency domain)

Fig. 2 Meyerのウェーブレットのサポート (Support of Meyer wavelet)

Fig. 3 時間領域におけるMeyerのウェーブレット (Meyer wavelet in time domain)

ゴリズムにおけるウェーブレットのサポートは

$$\text{supp } \Psi_j(f) = \left[\frac{2^j}{3T}, \frac{2^{j+2}}{3T} \right] \quad (\text{Hz}) \quad (7)$$

である．ここで， $T(\text{s})$ は解析対象となる時刻歴の継続時間である．

今，式(7)の対数中心 $2^{j+1}/3T$ (Hz)をウェーブレッ

トのスケール領域（周波数領域）での中心とする。
 また、時間領域における中心を $kT/2^j(s)$ とおく。これらの時間スケール領域での中心位置と j および k との関係は Fig.4 に示す多重解像度ピラミッドにまとめられる。ドットがウェーブレットの中心を示している。 j が大きいほど周波数のサポートは小スケール（高周波数）側へ移動するとともに、スケール（周波数）に関する分解能は粗くなる。同時に、 k がとる値域は広くなりウェーブレットは時間軸上を細かく移動できるようになる。このような離散的な挙動が離散ウェーブレットと呼ばれる由縁であり、また、直交系の構成を可能にしている。

2. 2 ウェーブレット係数と パワースペクトルとの関係

対象となる時刻歴データのフーリエ係数を C_s とおく。するとウェーブレット係数とフーリエ係数との間には、

$$\sum_j \sum_k |\alpha_{j,k}|^2 \equiv \sum_{s \neq 0} |C_s|^2$$

の関係があり、ウェーブレット係数の総エネルギーと時刻歴データのエネルギーはほぼ等しい。また、ウェーブレットスペクトルを

$$E_j = \sum_k |\alpha_{j,k}|^2 \quad (8)$$

と定義する。この E_j と対象とする時刻歴のパワースペクトル $S(f)$ (f : 周波数) とには、次の関係がある。

$$E_j \sim f S(f) \quad (9)$$

ここで、

$$f \sim 2^{j+1}/3T \quad (10)$$

Fig. 4 離散ウェーブレットの多重解像度ピラミッド
 (●はウェーブレットの中心位置)
 (Multi-resolution pyramid of discrete
 orthogonal wavelet ; ● denotes the
 location of center of wavelet.)

であり、 j に対応する周波数を式(7)の対数中心付近にとることを意味する。以下では、乱流のスペクトルとしてカルマンのスペクトルを用いることとし、それに従う疑似風速変動データを用いて式(9)および式(10)の関係を確認する。

まず、カルマンの主流方向スペクトル

$$S_K(f) = \frac{4I_u^2 L_u U}{[1 + 70.78(f L_u / U)^2]^{5/6}} \quad (11)$$

U : 平均風速

L_u : 乱れのスケール

I_u : 乱れの強さ

に位相を一様ランダムに与え、フーリエ逆変換することにより時刻歴データを生成した。ここで、 $U=10$ (m/s), $L_u=100$ (m), $I_u=0.1$ とした。位相に与える乱数を変えた時刻歴を10本作成し、各々にウェーブレット変換を施した。そして各結果に式(8)を適用して E_j を求めた。これらの E_j の平均をとり、 $1/2^{j+1}$ を乗じた（この理由については後述する）値を j に対してプロットしたものが Fig.5 である。また、あわせて式(11)のカルマンのスペクトルも実線で示す。なお、上の横軸がカルマンのスペクトルにおける周波数 f (Hz) であり、 f と j との対応関係

Fig. 5 ウェーブレット係数のエネルギーとカルマン・スペクトルとの対応関係 (Relationship between energy of wavelet coefficients and Karman spectrum)

は式(10)にならない,

$$f = 2^{j+1}/3T \quad (12)$$

としている。両者はよく一致しており,

$$\frac{E_j}{2^{j-1}} \cong S_K(f) \quad (13)$$

が成り立ち, 式(9)に整合することがわかる。

$E_j/2^j$ が $S_K(f)$ にほぼ一致する理由は, 次のように説明できる。まず, 式(2)のフーリエ変換の絶対値の2乗は,

$$\begin{aligned} |2^{j/2} \hat{\psi}(2^j t - k)|^2 &= \left| 2^{j/2} \frac{1}{2^j} \Psi_{j=0}(f) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2^j} |\Psi_{j=0}(f)|^2 \end{aligned}$$

である。ここで, $|\Psi_{j=0}(f)|^2$ は Fig. 2 よりサポート内の広範囲の f において1をとる。また, 式(7)よりサポートの幅は $2^j/T$ であるとともに, ウェーブレットは時間軸上で 2^j 箇所 (k は0から 2^j-1 までの整数をとる) に分布する。ゆえに, ある j におけるウェーブレット自身が持つ総エネルギー K_j は大まかには

$$K_j \cong \frac{1}{2^j} |\Psi_{j=0}(f)|^2 \times \frac{2^j}{T} \times 2^j \cong \frac{2^j}{T}$$

となる。一方, FFTにおいては, ある周波数 f における基底関数 $\exp(i2\pi f t)$ がもつエネルギー F は複素共役を考慮すると $2/T$ となる。従って, ウェーブレット変換とFFTにおける各基底が持つエネルギーの比 r_j は

$$r_j \equiv \frac{F}{K_j} \cong \frac{2/T}{2^j/T} = \frac{1}{2^{j-1}} \quad (14)$$

となる。以上が反映され, E_j と $S_K(f)$ との間には式(13)の関係が成り立つ。

3 自然風に含まれる間欠性

2において離散ウェーブレット変換の概要を示した。本章においては実測された風速変動データにウェーブレット変換を適用し, 自然風に含まれる間欠性について述べる。

Fig. 6は1996年8月14日の18時40分に大鳴門橋上で観測された強風の橋軸直角方向の時刻歴である。サンプリングは20Hzであり, 測定時間は600秒(データ数12000個)だが, FFTを用いるために測定開始から409.6秒間(データ数 $2^{13}=8192$ 個)のデータを対象とする(以下, 自然風と呼ぶ)。平均風速 U は33.2m/s, 乱れの強さ I_u は0.084であり, 定常的な変動にみえる。また, この自然風のパワースペクトルがFig. 7であり, 乱れのスケール $L_u=193$ (m)におけるカルマンのスペクトル(式(11)を用いた)によく一致している。また, $-5/3$ 乗則に従う慣性小領域もみられる。この自然風のパワースペクトルに位相を一樣ランダムに与え, フーリエ逆変換によって人工的な風速変動データ(以下, 位相ランダム風と呼ぶ)を作成した。この手法は任意のスペクトル形状から定常な風速変動を人工的に作成する際に, しばしば用いられている(例えば文献10))。得られた時刻歴がFig. 8であり, やはり定常的な波形である。以下では, 自然風と位相ラン

Fig. 6 大鳴門橋において測定された自然風
(水平成分) の時刻歴
(Time history of the horizontal component
of natural wind measured on the deck of
Ohnaruto bridge)

Fig. 7 Fig. 5 のパワースペクトル
(Power spectrum of the time history shown
in Fig. 5)

Fig. 8 Fig. 6 のパワースペクトルに位相
を一樣ランダムに与えて作成した
“位相ランダム風” の時刻歴
(“Phase-randomized wind” produced with
inverse Fourier transform for power spectrum
shown in Fig. 6 with uniform random phase)

ダム風の時刻歴にウェーブレット変換を適用し、両結果を比較する。

自然風 (Fig.6) にウェーブレット変換を適用した結果、および位相ランダム風 (Fig.8) についての結果を各々 Fig.9, 10 に示す。両図の (a)~(f) はスケールパラメータ j が 7~12 のケースに各々対応する。なお、対象とする時刻歴のデータ数が 2^{13} 個であり、この時 j は 0~12 の整数値をとるが、 $j < 7$ のケースにおいては人工風、位相ランダム風ともに似た変動であったために示していない。また、各図の横軸は本来シフトパラメータ k ($0 \sim 2^j - 1$ の整数) で

あるが、理解を容易にするために時刻 (s) で表している。Fig.9 と Fig.10 とを比較すると、まず $j=7$ (Fig.9(a), Fig.10(a)) においては、自然風のウェーブレット係数 $\alpha_{j,k}$ の方が、位相ランダム風のケースよりもピークがやや多く観察される。また、位相ランダム風の $\alpha_{j,k}$ は j に関わらずほぼ定常である (Fig.10(a)~(f))。しかし、自然風については j が大きくなる (Fig.9(b)~(f)) と $\alpha_{j,k}$ の分布は非定常となり、スパイク状のピークが際立ってくる。さらに、Fig.9(f) の $j=12$ のケースにおいては、スパイク状の大きな変動が連続的に発生する時間帯と小さな変動が発生する時間帯とに分かれる傾向がみられる。また、Fig.9(a)~(f) を通じて、ある j において $\alpha_{j,k}$ の変動が大きい時間帯は、他の j の同時帯においても $\alpha_{j,k}$ の変動が大きい傾向にある。これは乱流の局所的自己相似性を意味する。

以上の $\alpha_{j,k}$ の分散を 1 に正規化し、その確率密度関数を求めた。Fig.11(a)~(d) はそれぞれ Fig.9 に示したウェーブレット係数の内 $j=9 \sim 12$ のケースについての正規化確率密度関数である。Fig.12(a)~(d) は Fig.10 に示した位相ランダム風におけるウェーブレット係数の正規化確率密度関数を $j=9 \sim 12$ について示したものである。また、平均 0、分散 1 のガウス分布も実線であわせて示してある。なお、 $j < 9$ のケースについては、算出される $\alpha_{j,k}$ の個数が少なく (k は $0 \sim 2^j - 1$ の整数 $\Rightarrow 2^j$ 個)、確率密度関数の精度が悪かったため示していない。Fig.11 と Fig.12 とを比較すると、まず、Fig.12 の位相ランダム風においては j の値にかかわらず、ほぼガウス分布に沿う。これは中心極限定理に従う結果である。しかし、Fig.11 の自然風においては、 $j=10$ (Fig.11(d)) 以降から位相ランダム風のケースとは異なる分布を示し始める。すなわち、 j の増大とともに確率密度関数はガウス分布をはずれ、指数分布に近い形状になる (尖度が大きくなる) ことが明確になってくる。この傾向は Yamada ら¹⁰⁾ の結果と同様であり、自然風においては小さなスケールの変動ほど間欠的に発生することを意味する。

Fig. 9 自然風のウェーブレット解析結果
(Result of wavelet transform for natural wind
shown in Fig. 6)
(a) $j=7$ (b) $j=8$ (c) $j=9$ (d) $j=10$
(e) $j=11$ (f) $j=12$

Fig. 10 位相ランダム風のウェーブレット解析結果
(Result of wavelet transform for phase-
randomized wind shown in Fig. 8)
(a) $j=7$ (b) $j=8$ (c) $j=9$ (d) $j=10$
(e) $j=11$ (f) $j=12$

4. 間欠性を含む風速変動データの生成

前章において、自然風の風速変動に含まれる間欠性をウェーブレット変換により検出できることを示した。一方、間欠性を位相から理解するのは難しく、与えられたスペクトルから逆FFTによって人工風速変動を作成する方法では間欠性を再現するのは困難である。そこで、間欠性を有する人工風速変動の時刻歴データをウェーブレット逆変換を用いて生成する。なお、本研究は現段階においては主流方向の風速変動のみを対象とし、また、粘性散逸域については考慮しない。

4. 1 ウェーブレット逆変換

離散直交ウェーブレットによるウェーブレット逆変換は、

$$y(t) = \sum_j \sum_k \alpha_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (15)$$

と定義される。Yamadaら¹⁰⁾が示したMeyerのウェーブレットを用いた逆変換は、式(15)を

$$Y(f) = \sum_j \sum_k \alpha_{j,k} \Psi_{j,k}(f) \quad (16)$$

$Y(f)$: $y(t)$ のフーリエ変換

のように周波数領域において計算する方法であり（詳細は文献10)を参照）、本研究においてもこれに従う。ただし、2.1において述べたように静的成分近傍の非常に低い周波数成分はウェーブレット係数には反映されない。そこでスケール関数 $\Phi_{j=0}$ (f)を用い、

$$Y(f) = \eta \Phi_{j=0}(f) + \sum_j \sum_k \alpha_{j,k} \Psi_{j,k}(f) \quad (17)$$

とする。ここで η は、

Fig. 11 ウェーブレット係数の確率密度 (自然風)
(Probability density function of wavelet coefficients in the case of natural wind)
(a) $j=9$ (b) $j=10$ (c) $j=11$ (d) $j=12$

Fig. 12 ウェーブレット係数の確率密度 (位相ランダム風)
(Probability density function of wavelet coefficients in the case of phase-randomized wind)
(a) $j=9$ (b) $j=10$ (c) $j=11$ (d) $j=12$

$$\eta = \langle y(t) | \phi_{j=0}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \phi_{j=0}^*(t) dt \quad (18)$$

$\phi(t) : \Phi(f)$ のフーリエ逆変換

である。式(17)をフーリエ逆変換すれば $y(t)$ が得られる。次節以降においては、 α_{jk} および η の発生方法について述べる。

4. 2 正規化ウェーブレット係数

生成すべき時刻歴のパワースペクトルがカルマンのスペクトル (式(11)) に従うとする。この時、パワースペクトルとウェーブレット係数との間には式(13)の関係がある。各 j におけるウェーブレット係数の数は 2^j 個であり、ウェーブレット係数の標準偏差を σ_j とすると、

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{2^j} E_j = \frac{2^{j-1}}{2^j} S_K(f) = \frac{S_K(f)}{2} \quad (19)$$

となる。ここで f と j とは、やはり式(12)により関連づけられる。式(19)より、各 j におけるウェーブレット係数の標準偏差はカルマンのパワースペクトルより求めることができる。したがって、各 j において平均がゼロ、標準偏差が1のウェーブレット係数 (以下、正規化ウェーブレット係数 a_{jk}) を 2^j 個作り、式(19)より求めた σ_j を乗ずればよい。そして、ウェーブレット逆変換を行えば、パワースペクトルは式(11)に従う時刻歴が得られる。なお、式(17)中のスケール関数による変換係数 η には、ほぼ静的成分のみが反映されるため、

$$\eta = UT^{1/2} \quad (20)$$

としてよい。

η は U を与えれば式(20)より一意に決まるが、 α_{jk} についてはベースとなる a_{jk} を適切に発生させる必

要がある。次節以降においては、対数ポアソンモデル¹²⁾を応用した $a_{j,k}$ の発生方法について述べる。

4. 3 対数ポアソンモデルの概要

コルモゴロフのカスケード理論は、慣性小領域において乱流の運動エネルギーが最も支配的なスケールの渦から小さい渦へ一定に移動してゆくプロセスを説明するものである。そして、散逸スケールの渦のエネルギーは粘性により熱に変わる(粘性散逸域)。この際、熱に変わるエネルギーを補う形で外部から大スケールの渦へエネルギーが常に供給されるために、乱流状態が定常的に保たれる(流束平衡)とされている。しかしながら、慣性小領域全体において流束平衡が保たれていても、乱流エネルギーの移行は必ずしも一定ではなく、ある時には増加し、またある時には減少することが統計乱流理論の分野において指摘されている。これが乱流変動の間欠性に帰着しており、これを統計量に反映させるために β モデル⁹⁾や多重フラクタルモデル⁵⁾、シェルモデル¹³⁾、ランダムカスケードモデル⁹⁾等、様々なモデルが考案されている。また、近年提案された対数ポアソンモデル¹²⁾はランダムカスケードモデルをベースとし、スケール間のエネルギー輸送の間欠性を確率的なモデルに表したものである。本研究においてはこれを応用する。

まず、ランダムカスケードモデルについて述べる。最大スケールの渦におけるエネルギー散逸を ε とおき、次のスケールにおける散逸はランダム変数 W_l をかけた、 εW_l であるとする。すると n 番目のスケール l における散逸 ε_l は、

$$\varepsilon_l = \varepsilon W_1 W_2 \cdots W_n \quad (21)$$

となる。ここで、ランダム変数 W_l は事象ごとに独立とし、 $W \geq 0$ 、 $\langle W \rangle = 1$ ($\langle \rangle$ は平均を意味する)、 $\langle W^q \rangle$ は有限($q > 0$)であるとする。この定義においては、個々のカスケードにおけるエネルギー散逸は必ずしも等しくならないが、アンサンブル平均は ε に等しくなる。すなわち総体的な

エネルギー流束は一定に保たれる。

対数ポアソンモデルでは、以上のランダムカスケードモデルにおけるランダム乗数過程を背景としている。まず、隣り合うスケール l_1, l_2 ($l_1 > l_2$)の間の乗数 $W_{l,2}$ に二つの事象があると仮定する。第一の事象は定数 $\gamma(>0)$ に対し、 $W_{l,2} = (l_1/l_2)^\gamma$ となる場合である。この事象においては $W_{l,2} > 1$ となるため散逸は増大し、これが繰り返されれば発散する。第二の事象は $\beta < 1$ として、 $W_{l,2} = \beta (l_1/l_2)^\gamma$ となる場合である。エネルギーが l_1 から次世代の l_2 へ移る過程で第二の事象が m 回発生するとすると、

$$\begin{aligned} W_{l,2} &= \left((l_1/l_2)^\gamma \right)^{1-m} \left(\beta (l_1/l_2)^\gamma \right)^m \\ &= \beta^m (l_1/l_2)^\gamma \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ただし、 m は平均が λ の確率変数である。また、ランダムカスケードモデルのところで述べた $\langle W \rangle = 1$ を考慮すると、

$$\lambda = \frac{-\gamma \log(l_1/l_2)}{\beta - 1} \quad (23)$$

を得る。

β と γ を $2/3$ とすると、速度相関のスケール指数¹²⁾は実験やDNSの結果と一致することがSheら^{12), 14)}によって示されており、本研究においてもこれを用いる。さらに、離散ウェーブレット空間においては隣り合うスケールの比 l_1/l_2 が常に2であることを用いて、式(22)、(23)を書き直すと、

$$W = (2/3)^m 2^{2/3} \quad (24)$$

$$\lambda = 2 \log 2 \quad (25)$$

となる。対数ポアソンモデルにおいては、 m は平均が λ のポアソン分布に従う確率変数と定義されており、 m はゼロ以上の整数になる。しかしながら、 m が整数の場合、式(24)は離散的な乱数となってしまう。本研究においては m を実数へ拡張し、平均 λ の指数分布に従うものと仮定する。

4. 4 正規化ウェーブレット係数の カスケード

前節に述べたカスケードのモデルにならない、ランダム乗数 w を用いてスケール $j-1$ のウェーブレット係数からスケール j のウェーブレット係数を求める。すなわち、

$$a_{j,k} = s \times w a_{j-1,k} \quad (26)$$

とする。ここで $\kappa (\in \mathbb{Z})$ はスケール $j-1$ における、あるシフトパラメータである。また、 s は+1もしくは-1であり、これについては次節に述べる。一方、前節に述べたモデルは散逸 ε に関するものであり、 W を直接 w に当てはめることはできない。散逸は(速度³/スケール)の次元を持ち、ウェーブレット係数は(15)式によると速度の次元を有するからである。そこで、前節のモデルを $a_{j,k}$ に対応したモデルに置き換える。まず、コルモゴロフの法則によると、渦の両端の相対速度の大きさ v と渦のスケール l との間には次の関係がある。

$$v \sim \varepsilon^{1/3} l^{1/3}$$

これに前節のランダム乗数 W を考慮すると、二つのスケール l_1, l_2 に対し次の比例関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} v_1 &\sim \varepsilon_1^{1/3} l_1^{1/3} \\ v_2 &\sim (W \varepsilon_1)^{1/3} l_2^{1/3} \end{aligned}$$

これらより、

$$v_2 \sim W^{1/3} v_1 (l_2 / l_1)^{1/3}$$

となり、速度と W の関係が得られた。ここで対象としているのは正規化されたウェーブレット係数 $a_{j,k}$ であるため、その大きさはスケールに依存しない。よって、上式における $(l_2 / l_1)^{1/3}$ を1とおいて問題はない。さらに式(26)に対応させると、 w は

$$w \equiv W^{1/3}$$

とおける。これと式(24), (26)より、

$$a_{j,k} = s \times (2/3)^{m/3} 2^{2/9} a_{j-1,k} \quad (27)$$

を得る。

4. 5 正規化ウェーブレット係数の生成

前節に述べたモデルを用いて、 $a_{j,k}$ を発生させる。最初に、乱流カスケードが存在する領域と存在しない領域の境を決定する。

式(11)に f を乗じて無次元周波数 $x = fL/U$ を変数とする関数 $P(x)$ におき直す。この時、 $P(x)$ の勾配がゼロとなる点 ($P(x)$ がピークとなる点) は $x \approx 0.15$ である。この点に対応する周波数を f_p とすると、

$$f_p = \frac{0.15U}{L_u}$$

である。さらに、この f_p に対応するスケールパラメータを j_p とすると式(12)を用いて、

$$j_p = \left\{ \log_2 \frac{0.45UT}{L_u} - 1 \right\} \quad (28)$$

を得る。ただし、 $\{ \}$ は $\{ \}$ 内の実数の小数点以下を切り上げた整数をとるものとする。

まず、 $j \leq j_p$ においては、 $a_{j,k}$ を平均値0、標準偏差1のガウス分布に従う乱数とする。これは、大スケールの渦(低周波数成分)がカスケードに関与せず、ランダムに存在すると仮定するものである。ただし、実際にコンピュータを用いてガウス乱数を発生させると、特に j が小さい場合には $a_{j,k}$ の個数(2 ^{j} 個)が少ないために、平均値や標準偏差は目標値(平均値0、標準偏差1)に必ずしも一致しない。そこで、各 j においてガウス乱数を発生させた後、各 j における $a_{j,k}$ を平均値0、標準偏差1に正規化しておく。

$j > j_p$ においてはカスケードが存在するとし、小さい j から順に $a_{j,k}$ を生成してゆく。この手順の概要をFig.13に示す。 $j-1$ における $k=i$ ($\forall i \in \mathbb{Z}$)の正規化

Fig. 13 正規化ウェーブレット係数の生成の流れ
(Discrete cascade for generation of normalized wavelet coefficients)

ウェーブレット係数 $a_{j-1, k=i}$ が時間軸上でとる位置は、次段階のスケールパラメータ j での $k=2i$ における正規化ウェーブレット係数 $a_{j, k=2i}$ の位置に一致する (Fig.4も参照)。エネルギー伝達が近隣のスケールの渦同士で行われることを模倣し、式(27)をそのまま適用して、

$$a_{j, k=2i} = s \times (2/3)^{m/3} 2^{2/9} a_{j-1, k=i} \quad (29)$$

とする (Fig.13中の操作①)。一方、 $a_{j, k=2i+1}$ については、エネルギー伝達を受ける相手が同じ位置には存在しない (Fig.4も参照)。そこで、 $a_{j, k=2i+1}$ は次式のように $a_{j-1, k=i}$ と $a_{j-1, k=i+1}$ の平均から導くことにする (Fig.13中の操作②)。

$$a_{j, k=2i+1} = s \times (2/3)^{m/3} 2^{2/9} \times \frac{2^{1/2}(a_{j-1, k=i} + a_{j-1, k=i+1})}{2} \quad (30)$$

Fig. 14 自然風のウェーブレット変換結果における $a_{11, k=i}$ と $a_{12, k=2i}$ との相関関係
(Relationship between $a_{11, k=i}$ and $a_{12, k=2i}$ in the case of the natural wind)

上式右辺において、 $2^{1/2}$ を乗じている理由は $a_{j, k=2i+1}$ の標準偏差を1にするためである。なお、MeyerのウェーブレットはFig.3の時刻1/2を中心に左右対称な波形であることを考えると、 $k=2i$ と $k=2i+1$ とのウェーブレット係数は同じ方法で生成されるのが

Fig. 15 発生させた正規化ウェーブレット係数の標準偏差
(Standard deviation of generated normalized wavelet coefficients)

自然であると思われる。本方法においてはウェーブレットの中心をFig.3の時刻ゼロに置いてアルゴリズムを構成しているため、最終的に生成される時刻歴波形には前後非対称性が含まれることが予測される。

一方、式(29)、(30)に現れる s は、4.4の最初に触れたように+1もしくは-1であり、次のスケールにおける正規化ウェーブレット係数の符号を決定する。Fig.14は、3において示した自然風のウェーブレット解析結果の内、 $j=11$ と12の結果から求めた $a_{11,k}$ に対する $a_{12,k+2}$ のプロットである。円形状の分布であり、両者の符号に相関はない。この傾向は他の j についても同様であった。これより、 s を±1の二値乱数とする。

$U=10\text{m/s}$, $I_u=0.1$, $L_u=100\text{m}$ として、式(29)、(30)を用いて $a_{j,k}$ を発生させ、各 j における $a_{j,k}$ の標準偏差 σ_j を求めた結果がFig.15である。20回の試行結果をプロットしている。なお、式(28)より $j_p=4$ である。既述したように、 $j \leq j_p$ においては $a_{j,k}$ を平均0、標準偏差1のガウス分布に従う乱数として発生させており、さらに標準偏差が正確に1になるように補正してあるため、この範囲においては常に $\sigma_j=1$ である。 $j > j_p$ においては必ずしも $\sigma_j=1$ にはならないが、そのアンサンブル平均はほぼ1である。これは4.3に述べたランダム乗数過程を反映している。しか

Fig. 16 人工風速変動データの生成の流れ
(Flow of the proposed method for generation of artificial wind velocity fluctuation)

し、求める時刻歴の乱れの強さを目標値近傍に安定させるためには、 $j > j_p$ においても $a_{j,k}$ の標準偏差が正確に1になる方が望ましい。そこで $j > j_p$ についても、式(29)、(30)より $a_{j,k}$ を発生させた後、その標準偏差を1に補正しておく。

以上、本章に述べた方法をまとめるとFig.16のようになる。本方法においては、ウェーブレット係数の大きさをカルマンの式に委ね、ウェーブレット係数の間欠性の再現に対数ポアソンモデルを応用している。

Fig. 17 乱れの強さの目標値と実現値の誤差
(Error of the turbulence intensity)

5. 人工風速変動データの生成結果

5. 1 人工風速変動データの基本的特性

前章に述べた方法により人工風速変動データを作成した。生成したデータの時間ステップは0.05(s)であり、データ数は8192個である。

Fig.17は、得られた時刻歴の乱れの強さ I_u と目標値として与えた乱れの強さ I_u^s との比 I_u / I_u^s を示す。風速 U および乱れのスケール L_u の目標値を数通りに変えている。なお、平均風速については常に目標値が厳密に再現されていた。また、乱れのスケールについては後述する。Fig.17をみると I_u / I_u^s は1近傍にあり、目標の乱れの強さが比較的良好な精度で得られているものの、 U と L_u に応じてばらついている。この原因は j が整数である故に、式(13)および式(14)に示した対応関係に誤差が生じるためである。一方、 U および L_u を一定に保ち、 I_u^s を変えても I_u / I_u^s に変化はない。これは目標のスペクトル形状(式(11))の相似性が U と L_u によって決まり、乱れの強さ(標準偏差)はスペクトルの大小のみに影響を及ぼすため、式(13)(式(14))の関係が保たれることに起因する。さらに、 U と L_u と

Fig. 18 乱れのスケールの目標値を変化させた場合の人工風速変動のスペクトル
(Power spectra of the artificial wind velocity fluctuation data with different turbulence scale configurations)
(a) $L_u = 50$ (b) $L_u = 100$ (c) $L_u = 200$

の比が等しい場合、式(28)の j_p が互いに等しくなるために I_u / I_u^s は同値をとる。これが反映された例がFig. 17の $U = 10\text{m/s}$, $L_u = 100\text{m}$ のケースと $U = 20\text{m/s}$, $L_u = 200\text{m}$ のケースであり、両者の U / L_u は等しく、 I_u / I_u^s は常に一致している。

次に、乱れのスケールについて検討する。Fig.18は目標とする平均風速および乱れの強さをそれぞれ10m/s, 0.1に固定し、乱れのスケールを変えて生成した人工風速変動のパワースペクトル

Fig. 19 Fig. 6,7の大鳴門橋において測定された自然風と同じ特性値を与えて作成した人工風速変動データ

(a) 時刻歴 (b) パワースペクトル
(Artificial wind velocity fluctuation data generated with the same parameter of the natural wind measured on Ohnaruto bridge (Fig. 6, 7) ; (a) time history, (b) power spectrum)

である。目標の乱れのスケールを50m, 100m, 200mとした場合の結果がそれぞれFig.18(a)~(c)に対応する。また、カルマンの式(式(11))もあわせて示している。本方法においてはウェーブレット係数を予め与えておき、ウェーブレット逆変換により時刻歴を作成するため、パワースペクトルにはノイズが現れる。しかし、目標とするカルマンの式に十分整合しており、乱れのスケールはほぼ目標値に一致するとみなせる。

5. 2 自然風との比較

3に示した大鳴門橋における自然風 (Fig.6, 7) と同じ特性を有する人工風速変動データの生成を試みる。 $U=33.2\text{m/s}$, $I_w=0.084$, $L_w=193\text{m}$ におけるカルマンのスペクトルを目標として与えて生成した人工風速変動の時刻歴, およびそのパワースペクトルを各々Fig.19(a), (b)に示す。 Fig.19(a)の平均風速は33.2m/s, 乱れの強さは0.085であり, 目標

Fig. 20 人工風速変動のウェーブレット係数
(Wavelet coefficients of the artificial wind velocity fluctuation)
(a) $j=7$ (b) $j=8$ (c) $j=9$ (d) $j=10$
(e) $j=11$ (f) $j=12$

値がほぼ再現されている。 Fig.19(a)とFig.6を比較すると, 人工風速であるFig.19(a)はやや高周波成分が少ないようにみえる。また, Fig.7とFig.19(b)をカルマンの式を基準に比較すると, 人工風速変動のパワースペクトル (Fig.19(b)) はやはり高周波成分がやや少ないように思われる。そこで, Fig.7およびFig.19(b)における-5/3乗則に従う高周波数領域 $0.1 \leq f \leq 10$ (Hz)を対象に, パワースペクトル $S(f)$ とカルマンの式 $S_k(f)$ (式(11))との誤差を

$$err = \frac{1}{10 - 0.1} \int_{0.1}^{10} (f^{5/3} (S(f) - S_k(f)))^2 df$$

のように算出した。ここで, 被積分項において $f^{5/3}$ を乗じている理由は誤差をスペクトルの大きさに依存しない形で評価するためである。この結果, 自然風の場合は $err = 0.40$, 人工風の場合は $err =$

Fig. 21 ウェーブレット係数の確率密度 (人工風速変動)
(Probability density function of wavelet coefficients in the case of the artificial wind velocity fluctuation)
(a) $j=9$ (b) $j=10$ (c) $j=11$ (d) $j=12$

0.27 となった。つまり、得られた人工風速変動は高周波成分が少ないのではなく、ここで比較の対象としている自然風よりもカルマンの式により近いスペクトルを有するとみなせる。

次に、人工風の源であるウェーブレット係数について述べる。Fig.20(a)~(f)に人工風におけるウェーブレット係数 α_{jk} をスケールパラメータ $j=7 \sim 12$ のケースについて示す。 $j=7$ (Fig.20(a))における α_{jk} はやや非定常であり、 $j \geq 8$ (Fig.20(b)~(f))では自然風のケース (Fig.9(a)~(f))と同様に非定常性が顕著になる。また、ある j において大きな変動を示す時間帯は他の j の同時時間帯においても大きな変動を示しており、局所的自己相似性が実現されていると思われる。しかし、自然風のケースであるFig.9(a)~(f)と比較すると、この傾向は強調されている。

正規化ウェーブレット係数 a_{jk} の確率密度関数を $j=9 \sim 12$ について、それぞれFig.21(a)~(d)に示す。 j が大きいくほどガウス分布とのずれが明確であり、間欠性が実現されている。ただし、自然風のケース (Fig.11(a)~(d))と比較すると、ガウス分布から外れる度合いが強い。この特性は式(22)、(23)の β と γ の値、および式(22)の m の確率密度関数に依存する。本モデルにおいては β と γ を文献(12)、(14)に基づいて2/3としたが、これは実験や数値シミュレーションと整合するように定められた理想的な値である。また、 m の確率密度には指数分布を暫定的に用いている。これらの設定には改良の余地があ

Fig. 22 非定常性が強く現れた人工風速変動の時刻歴
(Time history of the artificial wind velocity fluctuation with high unsteadiness)

ろう。

本方法においては、任意のパワースペクトルに従い、かつ間欠性を含む人工風速変動を作成できる一方、時刻歴波形は乱数の並びに応じて様々な様相を呈する。例えばFig.22はやはり $U=33.2\text{m/s}$ 、 $I_u=0.084$ 、 $L_u=193\text{m}$ を与えて生成した人工風速変動の時刻歴であるが、Fig.19(a)と比べると非定常性が強く現れている。なお、このパワースペクトルはFig.19(b)とほぼ同様であり、ウェーブレット係数の確率密度関数もFig.21と同様であった。このような人工風速変動データをいくつか用いてガスト応答の時刻歴応答解析を行い、その応答を比較した場合、どのような違いが現れるのかは興味深いところである。

6. おわりに

本研究は、より自然風に近い人工風速変動データを離散ウェーブレット逆変換を用いて作成する方法を提案したものである。本方法の特徴を以下にまとめる。

(1)人工風速変動データの源となるウェーブレット

係数のエネルギーは目標とするスペクトルの式から導出し、ウェーブレット係数の生成過程には対数ポアソンモデルを応用している。スペクトルの形状と変動の間欠性を独立に扱う手法であるため、目標のスペクトルにほぼ従い、かつ間欠性を有する風速変動データを作成できる。ただし、対数ポアソンモデルの応用部分におけるパラメータの設定、および確率密度関数の与え方には改良の余地がある。

- (2)本研究においては目標のスペクトルにカルマンのスペクトルを与えたが、これ以外にも適当な形で定式化されているスペクトルであれば適用できる。
- (3)各スケールにおけるウェーブレット係数の生成方法を乱流カスケードに準じて構築しているため、局所的自己相似性を時刻歴に反映できる。
- (4)ウェーブレット係数の生成過程に乱数を多く用いるために自由度が高く、乱数の並びに応じて波形は様々に変化する。

構造関数におけるべき指数を用いて、得られた人工風速変動の妥当性をより詳細に検証する必要がある。また、本方法で応用した対数ポアソンモデルを含め、考案されている様々なスケーリングモデルは乱流の統計的普遍性の記述を目的としており、乱流の構造自体を表すには十分であるとは言えない。乱流のメカニズムには未解明な部分が多く残されており、本方法により作成された人工風速変動データも実際の乱流構造を十分に反映したものであるか否かは未明と言わざるを得ない。

謝辞

本州四国連絡橋公団より大変貴重な自然風の実測データを提供していただきました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Mandelbrot, B. B. : The fractal geometry of nature, W.H. Freeman and Company, 1983.
- 2) Anselment, F., Gangne, Y., Hopfinger, E. J. and Antonia,

- R. A. : High-order velocity structure functions in turbulent shear flow, *Jour. Fluid Mech.*, Vol. 140, pp.63- 89, 1984.
- 3) Vincent, A. and Meneguzzi, M. : The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence, *Jour. Fluid Mech.*, Vol. 225, pp.1-20, 1991.
- 4) Yamamoto, K. and Kambe, K. : Gaussian and near-exponential probability distributions of turbulence obtained from a numerical simulation, *Fluid Dynamics Res.*, Vol. 8, pp.65-72, 1991.
- 5) Frisch, U. : *Turbulence*, Cambridge University Press, 1995.
- 6) Meyer, Y. : *Wavelets and operators*, Cambridge University Press, 1992.
- 7) Daubechies, I. : *Ten lectures on Wavelets*, Soc. Indust. Applied Math., 1992.
- 8) 佐々木文夫, 前田達哉, 山田道夫: ウェーブレット変換を用いた時系列データの解析, 構造工学論文集, Vol. 38B, 日本建築学会, pp. 9-20, 1992.
- 9) 北川徹哉, 若原敏裕, 藤野陽三, 野村卓史: ウェーブレット変換を用いた強風の非定常性の検出の可能性, 土木学会第49回年次学術講演会講演概要集1-B, pp. 956-957, 1994.
- 10) Yamada, M. and Ohkitani, K. : Orthonormal wavelet analysis of turbulence, *Fluid Dynamics Res.*, Vol. 8, pp.101-115, 1991.
- 11) Dubrulle, B. : Intermittency in fully developed turbulence : log-Poisson statistics and generalized scale covariance, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 73, pp.959-962, 1994.
- 12) She, Z. and Waymire, E. C. : Quantized energy cascade and log-Poisson statistics in fully developed turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 74, pp.262-265, 1995.
- 13) Ohkitani, K. and Yamada, M. : Temporal intermittency in the energy cascade process and local lyapunov analysis in fully-developed model turbulence, *Prog. Theor. Physics*, Vol. 81, No.2, pp.329-341, 1989.
- 14) She, Z. and Leveque, E. : Universal scaling laws in fully developed turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 72, pp. 336-339, 1994.