鉛直壁による波群の反射について

Reflection of Wave Groups from a Vertical Wall

喜岡 渉¹・北野利一²・肥後克紀³

Wataru KIOKA, Toshikazu KITANO and Katsunori HIGO

The third-order interactions between the normal incident and reflected wave groups due to a vertical wall are investigated by numerical simulations based on Zakharov's equations with kernel functions valid for the cases of finite depth. The amplitude modulation occurs due to the unstable disturbance of class I for water depths except for near $kh=1.36$. The results of the temporal surface elevations computed on the basis of Zakharov's equation indicate that in intermediate water depths nonlinear waves both having side-band disturbance and bimodal spectrum undergo strong modulation and their maximum wave height in the group increases with time above the initial height. The changes in phase velocity of the reflected wave groups are also significant.

1. はじめに

Molinら（2005）は、深海の水面に固定された箱型浮体（長さ5m、幅1.2m、喫水深0.24m）に不規則波（有義波高 $H_s=0.15$ m、ピーク周期 $T_p=1.6$ s、ピーク形状パラメータ $\gamma=1$ ）を直角入射させ、入射側の浮体中央部付近の波高は他の場所と比べて2倍以上、線形回折波理論値と比べると3倍以上大きくなり、かつ入射側中央部付近では波形の位相が若干遅れることを示し、反射領域におけるこうした変調・増幅現象は入射波の波形勾配 $H/L>0.03$ で現れ、入射波の非線形干渉により生じることを示唆した。喜岡ら（2008）は、中間水深（ $h/L=0.2\sim0.3$ ）における鉛直壁からの規則波と波群の反射実験を行い、規則波では入射波の波形勾配 $H/L>0.05$ 、波群については $H/L>0.04$ （ただし、 H は入射波群中の最大波高）で位相の遅れが生じ、波群中の最大波の波高や打上げ高は有限振幅波理論値を大きく上回ることを示した。この波群変形は、弱非線形の波群の反射を扱った喜岡ら（1996）および寛田・水口（1997）の理論では説明できない。

本研究は、波群が鉛直壁により完全反射するときの波高の増大と位相遅れの現象を説明し得る最低次数の数値モデル、すなわち3次オーダーの4波相互干渉モデルを用いた数値解析を行い、波群中の最大波の波高に及ぼす非線形相互作用の影響を調べ、増幅が生じる入射条件を明らかにしようとするものである。

2. Zakharov 方程式モデル

有限水深下での波列のゆっくりとした時間変動を記述する、微小パラメータ ε について3次オーダーのZakharov

積分方程式（Stiassnie・Shemer, 1984）は、次式のように表すことができる。

$$i\frac{dB_j}{dt} = T(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_j) |B_j|^2 B_j + \sum_{n \neq j} 2T(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_n) |B_n|^2 B_j \\ + \sum_{\substack{p, q \neq j \\ 2\mathbf{k}_j = \mathbf{k}_p + \mathbf{k}_q}} T(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_q) B_p^* B_q \exp\{i(2\omega_j - \omega_p - \omega_q)t\} \\ + \sum_{\substack{n, p, q \neq j \\ \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_j = \mathbf{k}_p + \mathbf{k}_q}} T(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_q) B_n^* B_p B_q \exp\{i(\omega_j + \omega_n - \omega_p - \omega_q)t\} \quad (n, j, p, q=1, 2, \dots, N) \quad \dots (1)$$

ここに、*は複素共役を示し、複素振幅 B は水位変動と次の関係にある。

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega(|\mathbf{k}|)}{2g} \right)^{1/2} [B(\mathbf{k}, t) \times \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(|\mathbf{k}|)t)\} + \text{c.c.}] d\mathbf{k} \quad \dots (2)$$

式（1）の右辺第3項、第4項の波数各成分に対応する角周波数 ω は、次の共鳴近傍条件を満たすものである。

$$|\omega_j + \omega_n - \omega_p - \omega_q| \leq 0(\varepsilon^2) \quad \dots (3)$$

複素振幅 B は自由波のもので、 ε^2 および ε^3 オーダーの次式（4）、（5）で与えられる複素振幅 B' 、 B'' の拘束波がそれぞれ励起される。

$$i\frac{dB'_j}{dt} = \sum_{\mathbf{k}_j = \mathbf{k}_p + \mathbf{k}_q} V^{(1)}(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_q) B_p B_q \exp\{i(\omega_j - \omega_p - \omega_q)t\} \\ + \sum_{\mathbf{k}_j = -\mathbf{k}_p + \mathbf{k}_q} V^{(2)}(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_q) B_p^* B_q \exp\{i(\omega_j + \omega_p - \omega_q)t\} \\ + \sum_{\mathbf{k}_j = -\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_q} V^{(3)}(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_q) B_p^* B_q^* \exp\{i(\omega_j + \omega_p + \omega_q)t\} \quad \dots (4)$$

1 フェロー Ph.D. 名古屋工業大学教授 大学院工学研究科
2 正会員 博(工) 名古屋工業大学准教授 大学院工学研究科
3 工修 愛知県道路公社建設部

$$i \frac{dB_j}{dt} = \sum_{\mathbf{k}_n + \mathbf{k}_j = \mathbf{k}_p + \mathbf{k}_q} T(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_q) B_n^* B_p B_q \times \exp[i(\omega_j + \omega_n - \omega_p - \omega_q)t] \quad (5)$$

拘束波成分の B' , B'' の時間変動は B に比べると相当に速いので, 両式は Stiasnie・Shemer (1987) のように t について積分した式に書き換えることができるが, ここでは B の変動が大きく拘束波の時間スケールでも一定と見なせないケースも扱うことから, 両式も数値積分によって求めた. 式 (5) の計算においては, 式 (3) の共鳴近傍条件を満たす波数の組合せは除外される. なお, 式 (1), (4), (5) 中の核関数 T , $V^{(1), (2), (3)}$ には Stiasnie・Shemer (1984) ならびに Mase・Iwagaki (1986) によって与えられている関数式を用いた.

3. 側帯波モード

波数 k の波に $k \pm p$ の振幅の小さい側帯波を加えて入射波群とし, 鉛直壁で完全反射する 1 次元伝播を考える. すなわち, $\mathbf{k}_1 = k_0 (1, 0)$, $\mathbf{k}_2 = k_0 (1+p, 0)$, $\mathbf{k}_3 = k_0 (1-p, 0)$, $\mathbf{k}_4 = -\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_5 = -\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_6 = -\mathbf{k}_3$ の 6 成分を用い, $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4$ の初期振幅を a_0 , 側帯波成分については εa_0 , それぞれの初期位相角を $0, \theta_1, \theta_{11}$ とし, 複素振幅 $B(\mathbf{k}, t)$ を 2. に示した有限水深に拡張した Zakharov 方程式モデルより求めた. 側帯波の p は $0 < p < 1.5$, $k_0 = 1$ として, a_0 は $0.1 \sim 0.2$, ε は $0.05 \sim 0.2$, 位相角 θ_1, θ_{11} は $0, \pm 4/\pi$, 相対水深は $h=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ の 4 種類とし各成分の振幅変調を計算した.

図-1 (b) に示すように, 重複波 (6 モード) の各成分においても (a) の進行波 (3 モード) と同様な周期で再帰性

が見られ, $\mathbf{k}_1$ と $\mathbf{k}_4$, $\mathbf{k}_2$ と $\mathbf{k}_5$, $\mathbf{k}_3$ と $\mathbf{k}_6$ は対称で, 振幅は常に等しい. 詳しく見ると, 側帯波 $\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_5$ の最大振幅の方が側帯波 $\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_6$ より常に大きい. 側帯波の p の増加とともに振幅変調は小さくなり, この水深 $h=1.0$ では $p > 0.45$ の高調波 $p=1.3$ 付近を除いて振幅は初期値と変わらず一定値をとり, 振幅変調は起こらない. 図-2 に示す $p=1.3$ 付近の変調を除けば, 重複波モードの変動周期, 最大および最小振幅は進行波モードとほぼ一致する.

図には示さないが, 相対水深が $h=0.5$ と浅くなると振幅の変動周期はさらに短くなり, $\omega_1 t < 80$ の間隔で再帰性が見られるようになる. 側帯波の最大振幅は $h=1.0$ のときより若干大きくなる. 水深 $h=1.5$ では再帰間隔は $\omega_1 t = 1800$ と極めて長くなり, $p < 0.1$ を除いて有意な振幅変調は現れなくなる. さらに深く $h=2.0$ になると再帰間隔は幾分短くなり, 振幅の変動も大きく現れる (図-3). このケースでは, 重複波の再帰間隔の方が幾分長くなっている. すなわち, 水深に関しては進行波と同様に, 波の線形性が理論的に最も強まる $h=1.36$ に近い $h=1.5$ のケースを除いて, 再帰性を伴う有意な振幅変調が起こる.

図-4 (a) に示すように, 側帯波の振幅を大きくすると, 図-1 (b) と比べて変動周期は短く現れ, 振幅の変調幅はより大きくなる. 初期振幅 a_0 を小さくすると, 図-4 (b) に示すように, 変動周期はより長く, 振幅変調は小さく現れる. 初期位相は振幅の変調幅や周期には影響を与えず, 位相のずれのみが生じる (図-4 (c)).

重複波 6 モードの振幅変動の 1 周期における最大値を読み取り, $a_0=0.2$ のケースについて側帯波 $\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_5$ 成分の p に対する最大振幅を示したものが図-5 である. この最大

(a) 進行波 3 モード

(b) 重複波 6 モード

図-1 振幅変調 ($h=1.0, p=0.1, a_0=0.2, \varepsilon=0.1, \theta_1=\theta_{11}=-4/\pi$)

(a) 進行波 3 モード

(b) 重複波 6 モード

図-2 振幅変調 ($h=1.0, p=1.25, a_0=0.2, \varepsilon=0.1, \theta_1=\theta_{11}=-4/\pi$)

(a) 進行波3モード

(b) 重複波6モード

図-3 振幅変調 ($h=2.0, p=0.1, a_0=0.2, \varepsilon=0.1, \theta_I=\theta_{II}=-4/\pi$)

振幅は側帯波 k_3 , k_6 成分より常に大きい。最大振幅が大きいほど共鳴近傍干涉による振幅変調が著しく現れ、一方で初期振幅 $a_{2,5}/a_0=0.1$ と変わらない p の領域においては非線形干涉による振幅変調は起こらない。ただし、図中の $h=0.5$ の $p<0.8$ における変調幅は式 (3) の共鳴近傍条件を厳しく ($\varepsilon \approx a_0 k$ の値を計算条件より小さく) とすると抑制されるので、他の相対水深における側帯波モードとの共鳴干涉とは異なる現象である。

4. 多成分解析

側帯波成分 $k_0(1+p)$, $k_0(1-p)$ を含む $-4k_0$ から $4k_0$ の波数を $N=160$ 分割して、重複波の B に加えて、2次オーダーの拘束波成分 B' , 3次オーダーの共鳴近傍を除く拘束波成分 B'' をそれぞれ式 (4) および (5) により計算して、 $(B+B'+B'')$ を水位変動に換算して時間波形を求めた。

図-6 (b) は、波群重複波において著しい波高増大が見られた計算結果の一例で、進行波の時間波形と比較したものである。波群は時間とともに前傾し、かつ尖鋭化している。時間 $\omega_1 t=320$ 付近で重複波の波高は最大になり、この位相は図-3 (b) で基本波成分と側帯波成分の振幅がほぼ等しくなる $\omega_1 t$ に一致している。図-6 (a) の進行波と比べて位相速度は遅くなり、波群周期は若干長くなる。このケースでは、図-7 に示すように重複波のスペクトルは時間とともに高波数側に広く分布し、主として拘束波 B' の寄与により波高が増大する。同様な条件下で重複波群の極大化が生じることは造波水路実験 (喜岡ら, 2008)

(a) $h=1.0, p=0.1, a_0=0.2, \varepsilon=0.2, \theta_I=\theta_{II}=-4/\pi$ (b) $h=1.0, p=0.1, a_0=0.12, \varepsilon=0.1, \theta_I=\theta_{II}=-4/\pi$ (c) $h=1.0, p=0.1, a_0=0.2, \varepsilon=0.1, \theta_I=-4/\pi, \theta_{II}=4/\pi$

図-4 重複波の振幅変調

図-5 側帯波 k_2, k_5 の最大振幅 ($a_0=0.2, \varepsilon=0.1, \theta_I=\theta_{II}=-4/\pi$)

によっても確かめられているが、実験においては極大化の直後に碎波が生じており、ここで用いた3次オーダーの理論では碎波限界付近の極大波を再現することはできない。波頂高が碎波限界に近いケースについては、より高次の非線形干涉モデルによる検証が必要である。

図-8 (a), (b) に非線形干涉による振幅変調が比較的穏やかな相対水深 $h=1.5$ の計算結果を示す。規則的な重複波

(a) 波群進行波

(b) 波群重複波

図-6 波群の時間発展 ($h=2.0, p=0.1, a_0=0.2, \varepsilon=0.1$)

群が形成されており、入射振幅の小さい(b)ではほぼ前後対称の波群が生じている。図-8(c)は振幅変調が全く現れない $h=2.0, p=0.5$ の計算結果で、このときの波高変動は主に基本自由波の波数和と差の拘束波成分 B' と3次の B' による。図-8に示したケースにおいては、図-6のような波群中の波高の極大化は現れない。

これら波群中の最大波頂高 η_{max} を入射振幅 $a=a_0(1+2\varepsilon)$ で除して、ストークス重複波第3次近似解と比較したものを図-9に示す。図中の白抜き記号は、非線形干渉による振幅変調が生じない側帯波 p を選んだケースの最大波頂高を示し、波高増幅は自由波の波数和と差の拘束波によって生じ、ストークス重複波理論に近い値をとっている。最大波頂高は、 $h=1.36$ 付近を除く相対水深において側帯波が $p<0.4$ の値をとるとき、入射振幅 a_0 が大きい側帯波の振幅 εa_0 が大きいほど、ストークス重複波理論値を大きく上回る。

次に、バンド幅パラメータ $m=20$ とした Wallops型波数スペクトルにより初期スペクトルを与え(安田ら, 1995), $30T_p$ (T_p はピーク波数 k_p に対応するピーク周期)進行後の B を入射波群として $100T_p$ 後の B および拘束波 B' を初期位相角3通りに対して計算し、その平均をとって重複波のスペクトルを求めた。

ピーク波数 $k_p=1$ として、 $H_s=0.24$ すなわち波形勾配 $ak_p=0.12$ ($a=H_s/2$)、水深は $h=1.0, 2.0$ の2通り、計算領域を $-4k_p$ から $+4k_p$ とし成分数 $N=1024$ (入射波領域について $N=512$)を用いた。計算時間の都合上、拘束波成分は2次オーダー B' についてのみ求めた。図-10(b)の $h=1.0$ の波数スペクトルは(a)の $h=2.0$ の分布と比べて、低波数領

図-7 波群重複波の振幅スペクトル ($\omega_1 t=430$) (a) $h=1.5, p=0.1, a_0=0.2, \varepsilon=0.1$ (b) $h=1.5, p=0.1, a_0=0.12, \varepsilon=0.1$ (c) $h=2.0, p=0.5, a_0=0.2, \varepsilon=0.1$

図-8 波群重複波の時間発展

域と $k/k_p=2.0$ 付近で増幅している。また、(b)の $h=1.0$ のケースでは、 $k/k_p>2.0$ の高波数領域において初期スペクトルと比べて緩い勾配に変形しており、高次干渉理論による安田ら(1995)の進行波のスペクトル計算結果と同様な変形特性を示している。

最大波頂高 η_{max}/H_s は、相対水深 $h=1.0, 2.0$ についてそれぞれ1.95, 1.47となり、不規則波群の個々波に有限振幅波理論(ストークス第3次近似解)を用いて求めた値を

図-9 波群重複波の最大波頂高（曲線はストークス重複波理論第3次近似解）

表-1 波頂高および平均連長

	$h=2.0$	$h=1.0$
$\eta_{\max}/H_s$	1.47	1.95
$\bar{j}_1(H_c=2H_s)$	1.78	1.72
$\bar{j}_1(H_c=2H_{med})$	2.86	3.04

ともに上回る。100 T_p 後の波列から、 $H_c=2H_s$ および $H_c=2H_{med}$ （ただし、中央値 H_{med} は30 T_p 進行後の入射波の波高値）以上の波高をもつ不規則波群中の連長を求め、平均をとった結果を表-1に示す。 H_{med} で定義した平均連長 $\bar{j}_1$ は $h=1.0$ のケースで若干長く現れており、波群形状が $h=1.0$ では扁平化することを示唆している。

5. おわりに

中間水深においてはピーク波数 k に対して側帯波の波数 $k \pm p$ が $p < 0.2$ ，すなわち5波以上の波群長をもつような波が入射するとき、非線形干渉により鉛直壁前面における波頂高は極めて大きくなる。このとき、波群の個々波を有限振幅波と見なす解析では、打上げ高などを過小に算定する。しかし、入射波の波形勾配が $a_0k=0.2$ 程度でも波頂高の計算結果は碎波限界の重複波に近く、より高次の非線形干渉モデルや実験による検証が必要である。

(a) $h=2.0$

(b) $h=1.0$

図-10 100 T_p 後のスペクトル分布

参考文献

- 喜岡 渉・山根 聡・青木伸一（1996）：波群とそれに伴う長周期波の反射，海岸工学論文集，第43巻，pp.166-170.
- 喜岡 渉・岩塚雄大・肥後克紀・北野利一（2008）：鉛直壁からの強非線形波の反射について，海岸工学論文集，第55巻，pp.11-15.
- 寛田博章・水口 優（1997）：波群の反射と長周期波，海岸工学論文集，第44巻，pp.201-205.
- 安田孝志・森 信人・加藤 茂（1995）：不規則波列の波群諸量に及ぼす高次干渉と浅水化の影響，第42巻，pp.276-280.
- Mase, H. and Y. Iwagaki (1986) : Wave group analysis of nature wind waves based on modulational instability theory, Coastal Engineering, Vol.10, pp.341-354.
- Molin, B., F. Remy, O. Kimmoun and E. Jomois (2005) : The role of tertiary wave interactions in wave-body problems, J. Fluid Mech., Vol.528, pp.323-354.
- Stiassnie, M. and L. Shemer (1984) : On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves, J. Fluid Mech., Vol.143, pp.47-67.
- Stiassnie, M. and L. Shemer (1987) : Energy computations for evolution of class I and II instabilities of Stokes waves, J. Fluid Mech., Vol 174, pp 299-312.