一方向流中に設置された固体群に作用する流体力に関する数値計算

Numerical Simulation of Fluid Force acting on Solids placed in Unidirectional Flow

竹岡佑介¹・重松孝昌²・中條壮大³

Yusuke TAKEOKA, Takaaki SHIGEMATSU and Sota NAKAJO

There is few research on fluid force acting on solids and turbulent flow in a pore of porous media because of the difficulty of measurement in experiments. In order to get fundamental knowledge of them, 2-D unidirectional fluid flow is investigated numerically using the Immersed Boundary method, which rigorously satisfies with the boundary condition on the solid surface with Cartesian grid and Lagrangian grid. Calculation results on pressure drop through circular cylinders reasonably agree with experimental formula by Ergun. In addition, fluid force acting on each cylinder, which varies markedly in time and space, is also presented.

1. 序論

石積堤などの多孔質構造物内部を通過する流れや移動粒子群周りの流体運動は、固体が近接・隣接しているために極めて複雑な流況を示す。実際、構造物の安定性の検討や沈降粒子群の分散挙動などの予測には、このような複雑な流体運動に起因する流体力の正確な予測が不可欠である。固体群に作用する巨視的な流体力については、浸透流速を対象として経験的に定式化された公式が援用されることが少なくない（例えば、Ergun, 1952）。しかし、固体群を構成する個々の固体に作用する流体力に関する知見、あるいは間隙部におけるせん断力等の知見は、流れを乱さずに狭隘な固体群間の流動を把握することが困難であるために不足している。Booijら（1998）は石積み構造物下部の砂の吸出し現象を把握するためにLDVを構造物間隙に設置して流速変動等について考察しているが、定点計測では固体群内部の流動を網羅的に把握することは難しい。また、数値シミュレーションにおいても、複雑形状を有する固体群周りの計算は、固体境界条件の設定法や格子解像度に起因する計算負荷の点から容易ではない。

本研究では、固体群間隙部の流動場、および固体群を構成する個々の固体に作用する流体力に関する知見を得ることを目的とし、比較的計算負荷の小さい直交格子法の一つであり、固体境界上の流体力を同時に算定できるImmersed Boundary法（以下、IB法）を導入した2次元数値モデルを構築した。このモデルを用いて、一方向流中の円柱群を対象として計算を行い、流体力に関する既往の知見との比較からその妥当性について検証した後に、円柱群周り流れの特性について検討した。

2. 数値モデルの概要

(1) 基礎方程式

本研究で使用した基礎方程式は以下の非圧縮性Navier-Stokes式と連続の式である。

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \vec{f} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 ρ は流体密度、 $\vec{V}$ は流体速度ベクトル、 P は圧力、 μ は流体の粘性係数である。また、 $\vec{f}$ はIB法において固体表面における流体の境界条件を満足させるために導入した強制外力であり、固体境界面における作用・反作用を考え、以下の式で与えられる。

$$\vec{f} = \int_{\Omega} \vec{f}_k \delta(\vec{x} - \vec{x}_k) d\vec{x}_k \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 δ はDiracのデルタ関数、 $\vec{x}_k$ は固体境界に沿って定義されるLagrange点の位置ベクトル、 $\vec{f}_k$ はLagrange点に作用する強制外力である。

(2) 強制外力項の算定

$\vec{f}_k$ の算定に際しては、李ら（2007）と同様に、Lima e Silvaら（2003）の提案するPVM（Physical Virtual Model）を用いた。PVMは運動方程式の各項と釣り合う強制力 $\vec{f}_k$ を固体境界上に導入することにより境界条件を満足させる。すなわち、 $\vec{f}_k$ は以下の式で算定される。

$$\vec{f}_k = \rho \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial t} + \rho (\vec{V}_k \cdot \nabla) \vec{V}_k - \mu \nabla^2 \vec{V}_k + \nabla P_k \quad \dots\dots (4)$$

ここに、 $\vec{V}_k$ 、 P_k はそれぞれLagrange点上における流速ベクトル、圧力である。式（4）では、Lagrange点における $\vec{V}_k$ 、 P_k の空間微分値が必要となるが、それらは以下

1 学生会員 大阪市立大学大学院工学研究科
2 正会員 博(工) 大阪市立大学教授 大学院工学研究科
3 正会員 博(工) 京都大学特定研究員 防災研究所

図-1 Lagrange点と補間に使用した点の位置関係

図-2 単一円柱周り流れ解析における領域と境界条件

のLagrange補間多項式より求める.

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x} = \frac{(x_k - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_k)} \phi_1 + \frac{(x_k - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_k)} \phi_2 + \frac{(x_k - x_1) + (x_k - x_2)}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)} \phi_k \quad \dots (5)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} = \frac{2\phi_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_k)} + \frac{2\phi_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_k)} + \frac{2\phi_k}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)} \quad \dots (6)$$

上式は x 方向成分についてののみ示しており, x_1, x_2 は, 図-1のようにLagrange点上の座標 x_k から, 流体側の x 方向にそれぞれ $\Delta x, 2\Delta x$ 離れた位置における x 座標である. x_1, x_2 の位置での物理量である ϕ_1, ϕ_2 は, それぞれ近傍の値から補間され, Lagrange点上の物理量である ϕ_k については, 固体内部領域も含めた近傍の値から補間される. また, y 方向成分についても同様に微分値が算定される. 式(4)の右辺第一項は慣性力を表し, Lagrange点の移動速度 $\vec{V}_{kb}$ を用いて, $(\vec{V}_{kb} - \vec{V}_k) / \Delta t$ (Δt : 刻み時間)と差分化できる. 本研究では静止物体を扱うため, $\vec{V}_{kb} = \vec{0}$ とした.

式(4)を用いて算定された固体壁に作用する強制外力 $\vec{f}_k$ を流体計算における反作用項として直交格子上に分布させるためのデルタ関数は, 次式のように離散化した分布関数 D_{ij} で表現される.

$$D_{ij} = \frac{f_1[(x_k - x_i)/\Delta x] f_1[(y_k - y_j)/\Delta y]}{\Delta x \Delta y} \quad \dots (7)$$

$$f_1 = \begin{cases} f_2(r), & \text{if } |r| < 1 \\ \frac{1}{2} - f_2(r), & \text{if } 1 < |r| < 2 \\ 0, & \text{if } 2 < |r| \end{cases} \quad \dots (8)$$

$$f_2(r) = \frac{3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4|r|^2}}{8} \quad \dots (9)$$

ここに, r は $(x_k - x_i) / \Delta x$, または, $(y_k - y_j) / \Delta y$ である. 式(7)を用いて式(3)を書き換えると以下の式となる.

$$\vec{f} = \sum D_{ij} \vec{f}_k \Delta k^2 \quad \dots (10)$$

ここに, Δk はLagrange点間の距離である.

(3) 基礎方程式の離散化

基礎方程式の時間差分には, 2次のAdams-Bashforth法を用い, 空間差分には2次の中心差分を用いて計算を行った. 計算はSMAC法のスキームに従い, 式(11)から予測流速 $\bar{u}_i^n$ を算定し, 修正圧力 ϕ^n のポアソン方程式(式(12))をMICCG法により解き, 次時刻の圧力を式(13)から, 次時刻の流速 u_i^{n+1} を式(14)からそれぞれ算定した.

$$\frac{\bar{u}_i^n - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^n}{\partial x_i} + \frac{3}{2} \{ (A_i^n + V_i^n + f_i^n) - (A_i^{n-1} + V_i^{n-1} + f_i^{n-1}) \} \quad \dots (11)$$

$$\frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial \bar{u}_i^n}{\partial x_i} \quad \dots (12)$$

$$P^{n+1} = P^n + \phi^n \quad \dots (13)$$

$$u_i^{n+1} = \bar{u}_i^n - \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial \phi^n}{\partial x_i} \quad \dots (14)$$

ここに, A は対流項, V は粘性項である.

3. 単一円柱周り流れにおける数値モデルの精度検証

構築した数値モデルが有する流体力および流れ場の再現精度について検証するため, 一方向流中に設置された単一円柱周り流れの計算を複数のReynolds数条件下で行い, 既往の実験および数値計算結果と比較した.

(1) 計算条件

計算領域については, 図-2に示すように $30d \times 30d$ (d は円柱直径10mm)を設定し, その中心 $(15d, 15d)$ に円柱を配置している. なお, 計算領域の決定に際しては, 予備実験として流入・流出端および側方境界までの距離を変化させた感度解析を行なっている. 流入境界(同図の左端; $x=0$)には, 大きさ U_{in} の一方向流を与え, 流出境界にはSommerfeld放射条件を, 側方境界にはslip条件を課している. なお, 計算には等方格子を用いている.

図-3 瞬時の流況と無次元渦度 ω^* の分布

円柱後方に形成される渦の再現精度は格子解像度 Δx に依存することが予測される．そこで，Reynolds数 $Re=U_{in}d/\nu$ （動粘性係数 $\nu=1.0\times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ ）が80となる条件において，抗力係数 C_D （ $C_D=2F_D/(\rho U_{in}^2 d)$ ； F_D は円柱に作用する抗力）に対する $d=\Delta x$ の感度解析を行なった．その際， F_D はLagrange点上の強制力の x 成分である f_{kx} の積分値， $F_D=\sum f_{kx}\Delta k^2$ として算定した．また，Lagrange点解像度 Δk と Δx の比， $\Delta k/\Delta x$ はLima e Silvaら（2003）の知見に基づき0.9以下としている．その結果， $d/\Delta x\geq 10$ の条件では Δx に依存することなく，ほぼ一定の抗力係数を得ることができた．よって，本計算は $d/\Delta x=10$ ， $\Delta k/\Delta x=0.523$ と設定し， U_{in} を変化させて $Re=10\sim 1000$ となる条件で行った．

(2) 計算結果の検証

図-3は， $Re=40$ および50における円柱周辺の流速，および渦度 ω^* （ U_{in} および d で無次元化）の瞬時分布を示している．図より， $Re=40$ では円柱後流域の流れは対称で安定な双子渦が形成されているが， $Re=50$ では流れは非対称な分布となっている．Williamson（1996）によれば，円柱後流におけるKarman渦の発生条件は $Re=47$ 程度であり，本計算結果はそれと定性的に一致している．図-4は，円柱の抗力係数 C_D とReynolds数 Re の関係を示したものである．この図より，本モデルでの計算結果は， $Re=10\sim 300$ でWieselsberger（1922）による実験結果およびLima e Silvaら（2003）の数値計算結果と良好な一致を示すことがわかる．一方， $Re=1000$ では，既往の実験結果と異なる値を示しているが，Reynolds数がこの程度になると，流れは3次元性を有するために実験結果と2次元計算では結果が異なることがWilliamson（1996）により示されており，丸岡ら（1998）はそれにより流体力が過大に評価されることを明らかにしている．本結果はこのような知見と一致するものである．

図-4 円柱の抗力係数 C_D とReynolds数 Re の関係 図-5 Strouhal数 St とReynolds数 Re の関係

図-5は，Karman渦の放出周波数 f の無次元量であるStrouhal数 $St=f d/U_{in}$ とReynolds数 Re の関係を示したものである．同図より，本モデルの計算結果はWilliamson（1996）による実験，およびLima e Silvaら（2003）による数値計算結果と良好に一致することが分かり，Reynolds数が増加するにつれ，Strouhal数は0.2程度に収束していくのが見て取れる．

以上のように，単一円柱周り流れにおける流体力および流れ場については，既往の研究結果を矛盾なく再現することができ，本数値モデルの妥当性が示された．

4. 円柱群通過流れの数値計算

ここでは，管路内の一方向流れ場中に設置された円柱群を通過する流れを対象に2次元数値計算を行い，充填層通過時の圧力降下に関する巨視的経験則との比較を行った．

(1) 計算条件

計算領域および境界条件を図-6に示す．流入境界においては平行平板ポアズイユ流の理論解を与え，流出境界にはSommerfeldの放射条件を課した．また，側方境界にはno slip境界条件を与えている．管路幅は $8.3d$ （ $d=12\text{mm}$ ：円柱の直径）とし，流入端より同じ距離だけ離れた地点より円柱を千鳥状に計50個配置して円柱群を作成した．円柱群の延長は $14.4d$ ，円柱群下流端から流出境までの距離は $27.3d$ である．またこの時，円柱群の間隙率は $\varepsilon=0.675$ である．格子解像度は，単一円柱周り流れで得た知見を参考に $d/\Delta x=12$ とした．断面平均流速 U を変化させることによって，Reynolds数 $Re=Ud/\nu$ （ $1-\varepsilon$ ） $=5\sim 1000$ となる条件で計算を行った．

(2) 計算結果の検証

図-7は $Re=98, 245, 490$ における瞬時の渦度 ω^* の分布を示している． $Re=98$ では対称性の強い流れが円柱群周り

図-6 解析領域と境界条件

図-7 温度 ω^* の瞬時分布

に形成されており、定常的な流れとなっていることが読み取れる。 $Re=245$ になると、円柱群後端から噴流状に噴出する流れが後流域で混合し、 $3d$ 程度流下すると徐々にKarman渦のように規則正しく正負の渦列を形成するようになることが読み取れる。これは円柱群後流域における流れの非対称性・非定常性の発現を示唆しているという点で興味深い。さらに $Re=490$ においては、円柱群の間隙部においても、その中流域から下流域にかけて ($5 < x/d < 15$) 非対称な温度分布を示すようになるとともに、円柱群後流域では、極めて複雑で非定常性の大きい流れを形成していることがわかる。円柱群の上流域 ($0 < x/d < 5$) では円柱周りの渦度が流軸に対して対称的に分布している点を考えると、円柱群間隙部流れの非定常性は後流側から生じていると推察される。

次に、円柱群通過流れの計算結果の精度について検証する。延長 ℓ の充填層内を流下する際の圧力降下量 ΔP は、Ergun (1952) によって経験的に以下のように定式化されている。

$$\frac{\Delta P}{\ell} = 150 \frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3} \frac{\mu U}{D_p^2} + 1.75 \frac{(1-\epsilon)}{\epsilon^3} \frac{\rho U^2}{D_p} \quad \dots (15)$$

ここに、 D_p は等価直径である。 $D_p=d$ とすると、式 (15) より経験的な解としての圧力降下量 ΔP が求められる。

図-8 無次元圧力降下量 C_f とReynolds数 Re の関係 図-9 断面平均の圧力値 P^* の分布

この経験解としての ΔP と、計算結果として得られる ΔP を以下の式で表される無次元量 C_f で比較する。

$$C_f = \frac{\Delta P}{\ell} \frac{D_p}{\rho U^2} \frac{\epsilon^3}{(1-\epsilon)} \quad \dots (16)$$

図-8は C_f とReynolds数 Re の関係を示している。本数値モデルによる計算結果は、 $Re=5 \sim 1000$ の範囲内で式 (15) と良好な一致を示しており、Reynolds数が増加するにつれ、充填層内が層流状態で成立するBlake-Kozenyの式から、乱流状態で成立するBurke-Plummerの式への遷移過程が良好に再現されている。また、図-9は、 $Re=5$ および490における断面平均圧力の無次元量 $P^* = (P - P_{in}) / (\rho U^2 d / 2)$ (P_{in} : 流入境界における圧力) の分布を表している。円柱群中を流れが通過するとともに P^* は、流れが定常状態である $Re=5$ 、非定常的である $Re=490$ のどちらにおいてもほぼ線形的に減少していくことがわかる。この事実は、圧力降下量を巨視的に取り扱うことの妥当性を示しているが、 $Re=490$ においては平均的な圧力勾配よりも急峻になる地点や逆勾配となる地点も存在している。このことは円柱群に作用する流体力を巨視的に取り扱うことの限界も示唆していると考えられる。

最後に、個々の円柱に作用する流体力の特性について述べる。図-10は、 $Re=490$ における円柱群を通過する流れの流況と合わせて、瞬時の流体力ベクトル F^* ($\frac{1}{2}\rho U^2 d$ で無次元化) を各円柱毎に図示したものである。 F^* の始点は各円柱の中心に配置している。図より、円柱群の間隙部およびその後流域では複雑な流体運動が観察されるとともに、各円柱に作用している F^* の向きは円柱群内で

一様ではないことが明らかである。また、上流域に位置する円柱に作用する F^* は、時系列的にはほぼ変化していないのに対して、後流域近くの円柱に作用する F^* は、その向きや大きさが変化している。これは図-7において渦度分布に非対称性・定常性が確認された事と対応している。図-11は、 $Re=98, 245, 490$ における流軸上の代表的な円柱 (a)~(d) (それぞれの座標は $(x/d, y/d) = (0, 0), (5.8, 0), (11.5, 0), (14.4, 0)$ である) に作用する F^* の絶対値の時系列変化を示したものである。 $Re=98$ では、どの円柱に作用する F^* も時系列的に変化していないが $Re=245$ では、最後列の円柱 (d) でわずかではあるが変動している。 $Re=490$ になると、円柱群最前列の円柱 (a) においても F^* は周期的な変動を示し、中央域の円柱 (b) では、その変動の振幅は大きくなり、円柱 (c) で

図-10 流速ベクトルと各円柱に作用する流体力ベクトル F^* の時系列変化 ($Re = 490$)

図-11 円柱に作用する流体力 F^* と Reynolds 数 Re の関係

は、わずかながら F^* の変動振幅は一定ではなくなる。さらに最後列の円柱 (d) では、その変動には明瞭に複数の周期・振幅が含まれていることがわかる。このように、円柱に作用する流体力の Reynolds 数に対する依存性に加えて、個々の円柱に作用する流体力は流下方向に異なることが明らかとなった。さらに、流れの非定常性が顕著に見られるようになると流体力の時間変動特性は大きくなることも明らかになった。このような流体力の時空間的な変動は、式 (15) のように時空間平均値を用いる従来の巨視的な流体力の算定法では取り扱うことが困難である。

5. 結論

IB法を導入した数値モデルを構築することにより、複雑な境界形状を有する固体群中の流動を解析した。モデルの妥当性は、単一円柱周り流れを対象として、円柱に作用する抗力や後流域における渦周期と Reynolds 数の関係は既往の知見と良好に一致することを確認することによって検証した。また、本数値モデルを用いて円柱群を通過する流れを解析した結果、円柱群の通過に伴う圧力降下量と Reynolds 数の関係は既往の知見と良好に一致することを確認した。円柱群を通過する流れが、Reynolds 数の変化に伴い非定常性の強い流れへと遷移する過程を明らかにし、その変化は後流域より上流域に向かって生じることが示唆された。また、各円柱に作用する流体力は円柱群中の位置によって変化し、流れに非定常性が見られるようになると、周期的な変動および複数の周期・振幅を含む変動が見られるようになることが確認された。

参考文献

- 丸岡 晃・太田真二・平野廣和・川原睦人 (1998) : 広範囲な Reynolds 数域での円柱周りの2次元及び3次元数値流体解析, 土木学会論文集, No.591, pp.139-150.
- 李光浩・水谷法美 (2007) : Immersed Boundary法による数値波動水槽の構築とその応用に関する研究－水平円柱周りの波浪場への適用－, 海岸工学論文集, 第54巻, pp.821-825.
- Booij, R., W. S. J. Uijtewaald, P. van Os, H. L. Fontijn, J. A. Battjes (1998) : The influence of pressure fluctuations on the flow between armour elements, Proceedings 26th International Conference On Coastal Engineering, pp. 1898-1905.
- Ergun, S. (1952) : Fluid flow through packed columns, Che. Eng. Prog., Vol.48, No.2, pp. 89-94.
- Lima e Silva, A. L. F., A. Silveira-Neto, J. J. R. Damasceno (2003) : Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method, J. Comp. Phys., Vol.189, pp. 351-370.
- Wieselsberger, C. (1922) : New data on the laws of fluid resistance, NACA TN, No.84
- Williamson, C. H. K. (1996) : Vortex dynamics in the cylinder wake, Annu. Rev. Fluid. Mech., Vol.28, pp.477-539.