浅水流方程式と乱流モデルを組み合わせた砕波を伴う孤立波遡上の数値計算

Coupling between Shallow Water Equation and $k-\omega$ Model for Simulating Breaking Solitary Wave Run-Up

Mohammad Bagus Adityawan¹・田中 仁²

Mohammad Bagus Adityawan and Hitoshi TANAKA

Higher order equation with advanced numerical scheme is able to provide realistic solution for breaking wave case, yet difficult to apply in practical application. Recent development has enhanced SWE, by coupling with $k-\omega$ model for better bed stress assessment, and applying FORCE-MUSCL shock capturing scheme to handle breaking wave. In this study, this enhanced SWE model is used to simulate and investigate bed stress accumulation under breaking solitary wave run up (canonical problem). Comparison of bed stress accumulation to the conventional Manning method shows similar general conclusion that bed stress is more significant during run down. Further comparison to non breaking wave case shows that bed stress during run down is greatly emphasize in the breaking wave case.

1. はじめに

2004年12月に発生したインド洋大津波や、2011年3月の東日本大震災による被災としては、強い流れがもたらした人的・物的被害の他に、多量の土砂の輸送・海浜の侵食なども報告されている(西畑ら, 2005; 高橋ら, 2008; 田中ら, 2011)。津波による土砂移動についてはこれまで多くの計算がなされているが、いずれも抵抗則として定常流のマニングの粗度係数や摩擦係数を援用している。現実の津波の下での底面境界層は複雑な非定常性を伴うものであるにも関わらず、その点を反映させた数値計算の事例は皆無である。底面境界層の扱いを高度化することにより、遡上現象・流速値などの改善も期待される。

そこで、著者らは通常用いられるマニング則に代わり、乱流モデルを浅水流方程式に連立させ、孤立波の遡上過程を解析する手法を開発し、その精度を検証している(Adityawan・田中, 2010)。ただし、前報の計算においては非砕波条件での数値計算であった。そこで、本研究においては砕波を伴うケースを対象とし、Shock Capturing Schemeを使用した。

2. 数値計算手法と検証データ

(1) 数値計算手法の概要

水理モデルの基礎式は浅水流方程式である。式中の底面摩擦の項には通常マニング式等の定常流の知見に基づく表示式を用いることが多いが、ここでは代表的な乱流

モデルとして、Wilcox (1988) による鉛直二次元の $k-\omega$ モデルを使用した。これは、既往の研究により、同モデルの底面せん断力評価精度が $k-\epsilon$ モデルなどの他のモデルに比べて優れていることによる(Suntoyoら, 2008; Sanaら, 2009)。

Adityawanら (2009) においては、まず、通常の計算手法と同様にマニングの粗度係数を用いて浅水流方程式を数値的に解き、次の過程において、得られた流速値を境界層外縁流速として用い、これを鉛直一次元の乱流モデルの圧力勾配に代入して底面境界層の数値計算を行っている。その後提案した手法(Adityawan・田中, 2010)においてはこのようなマニングの粗度係数を用いた計算が不要であり、鉛直二次元の境界層方程式を用いて浅水流方程式と $k-\omega$ モデルを連立させて解いている。 $k-\omega$ モデルの数値計算にはSanaら (2009) と同様に陰形式の差分法を用いている。境界層内の鉛直方向の格子数は50であり、底面から離れるにしたがい等比級数的にメッシュ間隔が広がるように設定している。

本研究による手法が前報と異なる点は、砕波を伴う現象の再現である。砕波に伴う数値計算上の不安定性を回避するために、これまで人工的な粘性項や数値粘性の強く作用するスキームが用いられている。ただし、これらの手法を用いる際には、過剰な減衰などに注意が必要である。

ここでは、FORCE-MUSCLスキーム(Mahdavi・Talebeydokhti, 2009)を用いた。なお、近年、下園ら(2006, 2007)はTVDスキームを用いたShock Capturing Schemeにより、砕波を伴う風波の遡上モデルを提案している。FORCE-MUSCLスキームは複数の差分スキームを

1 学生会員 M. Eng. 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻
2 フェロー 工博 東北大学教授 工学研究科土木工学専攻

組み合わせて数値計算を行う手法であり、保存形の基礎式を用いている。制限関数 Ψ_i としては、下園ら（2006, 2007）と同様な次式のSuperbeeタイプの式を用いている（Toro, 2001）。

$$\Psi_i = \begin{cases} 0 & r_i \leq 0 \\ 2r_i & 0 \leq r_i \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 \leq r_i \leq 1 \\ \min(r_i, \frac{2}{1+r_i}, 2) & \text{else} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 r_i は次式で定義され、また、 i は格子番号を表す。

$$r_i = \frac{\Delta_{i-1/2}(hU)}{\Delta_{i+1/2}(hU)} \quad r_i = \frac{\Delta_{i-1/2}(\eta)}{\Delta_{i+1/2}(\eta)} \quad \dots (2)$$

ここで、 h ：水深、 U ：水平流速、 η ：水位であり、また、 $\Delta_{i+1/2}(hU)$ および $\Delta_{i-1/2}(hU)$ はそれぞれ次式のように前進差分および後退差分から得られる。

$$\Delta_{i+1/2}(hU) = (hU)_{i+1} - (hU)_i \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\Delta_{i-1/2}(hU) = (hU)_i - (hU)_{i-1} \quad \dots\dots\dots (4)$$

さらに、セル間のフラックスの評価にはLax Friedrichs法とLax Wendroff法を組み合わせ、時間項の離散化には3次精度のRunge-Kutta法を用いている（Mahdavi・Talebbeydokhti, 2009）。

斜面上を遡上する波の先端条件には微小な打ち切り水深を与えた。なお、波の最先端部に形成される薄層流れの厚さは境界層厚さを下回ることもあり、このような場合には境界層モデルの適用が困難となる。そこで、波動境界層厚さの見積もりをもとに、先端部の水深が1.2cmより小さい部分についてはElfrink・Fredsoe（1993）の計算法を用いて、 k - ω モデルは使用していない。この値は、底面境界層厚さが全水深の1/3を超えない条件として定めた。

(2) 検証データ

検証データとしてはSynolakis（1987）による実験結果を対象とした。実験水路の底面はガラス製の滑面からな

る。実験の概要ならびに以下で用いる変数の定義を図-1に示した。斜面勾配は1/19.85であり、後述する表-1に示されるとおり波高・水深比を六種類に変化させている。実験条件ならびに以下に用いられる座標と物理諸元の定義を図-1に示した。また、Synolakis（1987）による孤立波遡上高さの実験式との比較も行った。さらに、碎波条件・非碎波条件の代表例として、 $H/h_0 = 0.3$ および $H/h_0 = 0.019$ のケースを選び、波の伝播・遡上過程における底面せん断力の大小の評価を行った。ここで、 H ：波高、 h_0 ：静水深である。

二つの代表的なケースについて、平坦床部における入射波条件をもとにSuntoyoら（2009）、Sumerら（2010）の定義に従って孤立波の下でのレイノルズ数 R_e を計算した。定義は、以下の通りである。

$$R_e = \frac{U_c a_m}{\nu} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 U_c ：波峰での最大流速、 a_m ：境界層外縁における水粒子の軌道距離、 ν ：動粘性係数である。入射波条件に基づくレイノルズ数は、 $H/h_0 = 0.3$ および $H/h_0 = 0.019$ のケースについて、それぞれ、18,000および1,600であった。この値は、Sumerら（2010）による限界レイノルズ数（ $2 \times 10^5 < R_e < 5 \times 10^5$ ）に比べて低い値であり、水平床部において境界層は層流である。ただし、前者のケースでは斜面上で乱れ（k）の発生が見られたのに対し、後者のケースでは全域においてほとんど乱れが見ら

図-1 Synolakis（1987）の実験条件

表-1 Synolakis（1987）による経験式、マンニング式を用いた数値計算、本数値計算の比較

H/h_0	R/h_0			$(R/h_0 - R/h_0 \text{ Run up Law})^2$	
	Runup Law	Manning Method	New Method	Manning Method	New Method
	(1)	(2)	(3)	$((1)-(2))^2$	$((1)-(3))^2$
0.05	0.194	0.189	0.196	0.00003	0.00000
0.07	0.236	0.227	0.237	0.00008	0.00000
0.10	0.290	0.285	0.293	0.00002	0.00001
0.15	0.368	0.357	0.370	0.00011	0.00001
0.20	0.435	0.420	0.443	0.00021	0.00007
0.25	0.495	0.489	0.500	0.00004	0.00003
0.30	0.550	0.546	0.555	0.00002	0.00002
			RMSE	0.009	0.005

れなかった。

3. 結果

(1) 斜面上の水面波形

本研究による数値計算と、Synolakis (1987) の砕波条件での水理実験による水面波形との比較の一例を図-2に示す。ここで、図中の無次元時間 t^* 、無次元水位 η^* 、無次元水平座標 x^* は次式により定義されている。

$$x^* = x/h_0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\eta^* = \eta/h_0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$t^* = t(g/h_0)^{0.5} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 t ：時間、 g ：重力加速度、 x ：水平座標である。

本研究の数値計算結果と実験結果を比べると、水面形は良好な一致を示しており、モデルの妥当性が示された。破線はマンシングの式を用いた計算であり、さらに、Lin・Xu (2006) によるNEWFLUMEモデルによる数値計算結果も示している。これらを比較すると、本モデルの結果がより実験に近い。

(2) 遡上高さ

表-1は無次元遡上高さ R/h_0 に関して、Synolakis (1987) による経験式、マンシング式を用いた数値計算、本数値計算の比較を示したものである。本研究の手法による推定値はRMSEも小さく、きわめて高い精度が得られていることが分かる。図-3は砕波・非砕波の両ケースに遡上高さを示したものであり、本研究のモデル、およびマンシングの粗度係数を用いた結果も示した。ここで、マンシングの粗度係数として $n = 0.01$ を用い、これにより誤差が最小化された。全体的に、ここで提案された新しい計算法により、良好な結果が得られている。また、非砕波から砕波への遷移過程も良好に再現されている。

(3) 砕波時と非砕波時の底面せん断力特性

土砂輸送の総量、移動方向に密接な関係を有する物理量として、①一周期平均せん断力、②正值せん断力の平均、③負値せん断力の平均、の3つの物理量を選び、本手法およびマンシングの式による数値計算をもとに算定し

図-3 Synolakis (1987) による経験式との比較

た。それぞれの物理量の定義を以下に示す。

$$\overline{\tau_0^*}_{(-)} = \sum_{t^*=1}^{T^*} \tau_0^*(t^*)_{(-)} / N_{(-)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\overline{\tau_0^*}_{(+)} = \sum_{t^*=1}^{T^*} \tau_0^*(t^*)_{(+)} / N_{(+)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\overline{\tau_0^*} = \sum_{t^*=1}^{T^*} \tau_0^*(t^*) / N \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $\overline{\tau_0^*}_{(-)}$ ：負のせん断力の平均値、 $\overline{\tau_0^*}_{(+)}$ ：正のせん断力の平均値、 $\overline{\tau_0^*}$ ：時刻0から T^* までのせん断力の平均値、 τ_0^* ：せん断力、 $\tau_0^*(t^*)_{(-)}$ 、 $\tau_0^*(t^*)_{(+)}$ ：正および負のせん断力であり、 N ：計算における時間格子数、 $N_{(+)}$ 、 $N_{(-)}$ ：それぞれ、正のせん断力、負のせん断力が現れる位相の時間ステップ数、 T^* ：計算を行った総時間の長さ（無次元）であり、120とした。また、せん断力の符号は、岸向きを正としている。

図-4は、砕波時 ($H/h_0 = 0.3$)、および非砕波時 ($H/h_0 = 0.019$) について、上記の式 (9)、(10)、(11) に基づく底面せん断力の特性値を示したものである。また、図の上段には対応する箇所での η^* および無次元流速 U^* の経時変化を示している。ここで、 U^* の定義は次式である。

$$U^* = U/U_c \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、

$$U_c = (g/h_0)^{0.5} H \quad \dots\dots\dots (13)$$

である。まず、図-4 (b) の非砕波時では、静水時汀線付近 ($x^* = 0$) においていずれのせん断力も大きな値を示している。一方、砕波時の図-4 (a) で、岸向きせん断力は非砕波時と同様に汀線付近に最大値が見られるものの、他の二つの値については最大値の発現箇所が沖側 ($x^* = 2$) に移動している。この現象は、引き波時に生じる跳水に類似した現象によるものである。砕波時には引き波時の底面せん断力により顕著な振動が見られる。また、引き波により、図-4 (a) 上段の四角で囲んだ時間帯で顕著な負の流速が発生している。

図-2 遡上波形の比較

(a) 砕波ケース ($H/h_0=0.3$) (b) 非砕波ケース ($H/h_0=0.019$)

図-4 本モデルによる底面せん断力特性の比較

(4) マニング則による底面せん断力特性との比較

図-5は、砕波時および非砕波時について、マニング式による抵抗則を用いた場合の計算結果である。マニング則を用いた計算においても、全体的な傾向は新たなモデルによるものとはほぼ類似している。しかし、浅水域においてマニング式による計算値は全体的に大きな値を示している。ただし、最大値については、局所的ではあるものの、本計算の手法がより大きなピーク値を与えている。

砕波・非砕波のいずれについても、マニング則・本計算手法に共通して見られることは、波のピーク時の岸向

(a) 砕波ケース ($H/h_0=0.3$) (b) 非砕波ケース ($H/h_0=0.019$)

図-5 マニング則による底面せん断力特性の比較

きせん断力は値としては大きいものの、継続時間が短いいため、式(11)で定義される時間平均のせん断力は沖向きが支配的である。

図-6は、最大せん断力 $\tau_{0*}^{(max)}$ と負の最小せん断力 $\tau_{0*}^{(min)}$ を砕波時・非砕波時の双方に対して図示したものである。やはり、岸向きよりも沖向きの値が大きな値を示している。

4. おわりに

- (1) 砕波を伴う孤立波の遡上過程を精度良く計算するための数値モデルを提案した。抵抗則として、これまで多用されているマニングの粗度係数に代わり $k-\omega$ モデルを連立している。また、砕波をモデル化するために FORCE-MUSCL スキームを用いた。これにより、表面波形の良好に再現することが出来た。
- (2) 斜面上の遡上高さについても従来の手法に比べて精

(a) 砕波ケース ($H/h_0=0.3$) (b) 非砕波ケース ($H/h_0=0.019$)
図-6 セン断力の最大値と最小値

度が向上し、Synolakis (1987) による経験式と良好な一致を示している。

- (3) 本モデルによるせん断力評価によれば、非砕波時・砕波時において平均のせん断力の値に大きな相違が見られる。また、いずれのケースにおいても冲向きせん断力が卓越している。本手法の使用により、津波による土砂移動現象・地形変化のモデル化の精度が向上するものと期待される。

謝辞：本研究に対して、日本学術振興会科学研究費（基盤研究（B）、No. 22360193）、中国四川大学国家重点実験室のOpen Fund Research、および（財）河川環境管理財団による河川整備基金の助成を受けた。ここに記して関係各位に深甚なる謝意を表する。

参考文献

- 下園武範・佐藤慎司・舟山英男（2006）：衝撃捕捉法によるボア状砕波の形成および遡上の解析，海岸工学論文集，第53巻，pp.26-30。
- 下園武範・草野真史・田島芳満・佐藤慎司（2007）：Shock Capturing Schemeの浅海短周期波への適用，海岸工学論文集，第54巻，pp.26-30。
- 高橋 潤・後藤和久・大家隆行・柳澤英明・今村文彦（2008）：スリランカ・キリンダ漁港を対象とした2004年インド洋大津波による土砂移動過程の解析，海岸工学論文集，第55巻，pp.251-255。
- 田中 仁・真野 明・有働恵子（2011）：2011年東北地方太平洋沖地震津波による海浜地形変化，土木学会論文集B2（海岸工学），Vol. B2-67。（印刷中）
- 西畑 剛・田島芳満・森屋陽一・関本恒浩（2005）：津波による地形変化の検証 -2004年スマトラ沖地震津波 スリランカ・キリンダ港-，海岸工学論文集，第52巻，pp.1386-1390。
- Mohammad Bagus Adityawan・Bambang Winarta・田中 仁・山路弘人（2009）：静水域に伝搬する波動下の底面境界層特性，土木学会論文集B2（海岸工学），Vol. B2-56, No.1, pp.71-75。
- Mohammad Bagus Adityawan・田中 仁（2010）：浅水流方程式と乱流モデルを組み合わせた孤立波遡上の数値計算，土木学会論文集B2（海岸工学），Vol. B2-57, pp.91-95。
- Elfink, B. and J. Fredsøe (1993): The effect of the turbulent boundary layer on wave run up, Prog. Rep. 74, Tech Univ. Denmark, pp. 51-65.
- Lin P. and W. Xu (2006): NEWFLUME: a numerical water flume for two-dimensional turbulent free surface flows, J. Hydr. Res., Vol.44, pp.79-93.
- Mahdavi, A. and N. Talebbeydokhti (2009): Modeling of non-breaking and breaking solitary wave run-up using FORCE-MUSCL scheme, J. Hydraulic Res., Vol.47, No.4, pp. 476-485.
- Sana, A., Ghumman, A. R. and Tanaka, H. (2009): Modeling of a rough-wall oscillatory boundary layer using two-equation turbulence models, Journal of Hydraulic Engineering, Vol.135, No.1, pp.60-65.
- Sumer, B.M., P. M. Jensen, L. B., Sørensen, J. Fredsøe, P. F. Liu and S. Carstensen (2010): Coherent structures in wave boundary layers, Part 2. Solitary motion, J. Fluid Mech., Vol.646, pp. 207-231.
- Suntoyo and H. Tanaka (2009): Numerical modeling of boundary layer flows for a solitary wave, J. Hydro-environment Res., Vol.3, No.3, pp.129-137.
- Synolakis, C. E. (1987): The run up of solitary waves, J. Fluid Mech., Vol. 185, pp.523-545.
- Toro, E.F.: Shock-capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows, Chichester UK, 2001.
- Wilcox, D.C. (1988): Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models, AIAA Journal, Vol. 26, No. 11, pp. 1299-1310.