渦度を考慮した強非線形強分散波動方程式により再現された ソリトン波の解析

Numerical Simulation of Solitary Waves using a Fully-nonlinear Strongly-dispersive Wave Equation with Vorticity

吉江祐人¹・中山恵介²

Yuto YOSHIE and Keisuke NAKAYAMA

To analyze the influence of vorticity on surface and internal waves, Kakinuma and Nakayama (2007) proposed a fully-nonlinear strongly-dispersive internal wave equation by taking into account vorticity effects (FSI model). In this study, we made an attempt to apply the FSI model to reproduce the trochoidal waves in order to investigate the reliability of the FSI model in flow fields with vorticity. As a result, we obtained good agreement between the FSI model and the theoretical solutions. Furthermore, we applied the FSI model into solitary waves with positive vorticity, which results in the suppression of wave celerity and wave height.

1.はじめに

水面波の観測において、しばしば有義波高よりも大きい波の発生が確認されており、中でも特に大きな振幅の波はfreak waveなどとして知られ、有義波高の数倍にもおよぶ大波となる。このfreak waveにおいては未だ多くの問題が未解決であるが、発生原因の一つとして強非線形な孤立波の共鳴が考えられている (Funakoshi, 1980; 辻・及川, 2006, Tsuji・Oikawa, 2007)。

これに対し、辻・及川 (2006) やFunakoshi (1980) は、KP方程式及びBoussinesq方程式を利用し、2次元空間における孤立波の共鳴により振幅が4倍程度まで増大することを示した。しかし、KP方程式では進行方向に直交する成分の再現性が低いという問題が指摘されており、共鳴現象によるソリトン波の増幅を議論するためには、弱非線形方程式ではなく強非線形方程式を使用するべきであると考えられる。実際に、Liら (2011) は室内実験を利用した検討により、増幅率の最大値が約3倍程度にとどまることを示している。Tanaka (1993) による報告でも増幅率の最大値は3倍程度となっており、KP理論に基づいたMiles (1977) により示されている4倍よりも小さな値となった。この、数値計算と実験における増幅率の整合性についてKodama (2010) は理論解と直接比較できるように補正する必要性を示している。

これらの問題を解決するため、過去のソリトン波の共鳴現象に関する研究において、KP方程式よりも高次の項

まで考慮できる強非線形強分散内部波モデル (FSI model) (柿沼, 2001; Nakayama・Kakinuma, 2010) を利用することが提案されている。これらの検討では、高精度な解析を行うためにMirie・Pennel (1989) による9次精度の解を利用して初期条件として与えている。例えば、中山ら (2011) では、内部波に対する検討ではあるが、振幅が約3倍にもおよぶソリトン波の再現計算に成功している。また、性質の異なる研究ではあるが、佐藤ら (2013) は同モデルを利用し、実際の地形において沿岸域に到達した津波のソリトン化について計算している。

しかし、これらの研究で利用されているモデルは、ポテンシャル場を対象に導かれたものであり、実現象においては複雑な地形や流れの影響により生成される渦度の影響を受ける可能性がある (Nakayama・Imberger, 2010; Nakayama, 2012, 2014)。よって、本研究では、ポテンシャル場に対して導かれたFSI modelを柿沼・中山 (2007) を利用して渦度場にも適用できるように拡張し、拡張したモデルの計算精度について渦の効果を検討できるトロコイド波を用いて検証し、ソリトン波に対し渦度を考慮した計算を行い、渦度がソリトン波に与える影響を検討することを目的とする。

2.渦度を考慮した強非線形強分散波動方程式

本研究では、柿沼・中山 (2007) で提案されているとおり図-1に示す上・下面が固定水平板と接する2層流体におけるFSI modelを渦度場にも利用できるように拡張する。拡張されたモデルには、図-1中に示す μ 及び ν のような渦度に関する未知変数が増えることとなる。上層及び下層をそれぞれ第1層及び第2層と呼び、両層の流体が互いに混合しないものとする。第 i 層における次数 α の鉛直

1 正会員 工修 (株)アルファ水工コンサルタンツ 技師
技術第4部 技術4課
2 正会員 工博 北見工業大学工学部教授
社会環境工学科

分布関数を $\phi_i = f_i \cdot Z^a$, $\mu_i = m_{i,a} Z^a$, $v_i = n_{i,a} Z^a$ とし、次式のように N 個のべき関数の重み付き級数に展開する。

$$\phi_i(x, z, t) = \sum_{\alpha=0}^{N_i-1} \{f_{i,\alpha}(x, t) \cdot Z^\alpha\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\mu_i(x, z, t) = \sum_{\alpha=0}^{N_i-1} \{m_{i,\alpha}(x, t) \cdot Z^\alpha\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$v_i(x, z, t) = \sum_{\alpha=0}^{N_i-1} \{n_{i,\alpha}(x, t) \cdot Z^\alpha\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $f_{i,\alpha}$, $m_{i,\alpha}$, $n_{i,\alpha}$ は i 層目における次数 α の重みである。

変分法(柿沼, 2001)を適用し、式(4)～(6)のような界面変動 $\eta_{i,j}$ のべき乗を含む関数 Q_i , R_i 及び $S_{i,j}$ を導入すると、柿沼・中山(2007)と同様に式(7)～(10)のような渦度を考慮した非線形方程式系が得られる。

$$Q_i[\alpha] = \frac{1}{\alpha+1} (\eta_{i,1}^{\alpha+1} - \eta_{i,0}^{\alpha+1}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$R_i[\alpha, \beta, \gamma] = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+\gamma-1} (\eta_{i,1}^{\alpha+\beta+\gamma-1} - \eta_{i,0}^{\alpha+\beta+\gamma-1}) & (\alpha\beta \neq 0) \\ 0 & (\alpha\beta = 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$S_{i,j}[\alpha, \beta, \gamma] = \begin{cases} \alpha\beta\eta_{i,j}^{\alpha+\beta+\gamma-2} & (\alpha\beta \neq 0) \\ 0 & (\alpha\beta = 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6)$$

[Euler-Lagrange方程式]

$$\begin{aligned} \eta_{i,1}^\alpha \frac{\partial \eta_{i,1}}{\partial t} - \eta_{i,0}^\alpha \frac{\partial \eta_{i,0}}{\partial t} + \nabla \cdot (Q_i[\alpha+\beta] \nabla f_{i,\beta}) \\ - R_i[\alpha, \beta, 0] f_{i,\beta} + \nabla \cdot (Q_i[\alpha+\beta+\gamma] m_{i,\beta} \nabla n_{i,\gamma}) \\ - R_i[\alpha, \gamma, \beta] m_{i,\beta} m_{i,\gamma} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} Q_i[\alpha+\beta] \frac{\partial m_{i,\beta}}{\partial t} + \eta_{i,1}^{\alpha+\beta} m_{i,\beta} \frac{\partial \eta_{i,1}}{\partial t} - \eta_{i,0}^{\alpha+\beta} m_{i,\beta} \frac{\partial \eta_{i,0}}{\partial t} \\ + \nabla \cdot (Q_i[\alpha+\beta+\gamma] \nabla f_{i,\beta} m_{i,\gamma}) - R_i[\alpha, \beta, \gamma] f_{i,\beta} m_{i,\gamma} \\ + \nabla \cdot (Q_i[\alpha+\beta+\gamma+\delta] m_{i,\beta} m_{i,\gamma} \nabla n_{i,\delta}) \\ - R_i[\alpha, \delta, \beta+\gamma] m_{i,\beta} m_{i,\gamma} n_{i,\delta} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} Q_i[\alpha+\beta] \frac{\partial n_{i,\beta}}{\partial t} + Q_i[\alpha+\beta+\gamma] \nabla f_{i,\beta} \nabla n_{i,\gamma} \\ + R_i[\beta, \gamma, \alpha] f_{i,\beta} n_{i,\gamma} + Q_i[\alpha+\beta+\gamma+\delta] m_{i,\beta} \nabla n_{i,\gamma} \nabla n_{i,\delta} \\ + R_i[\gamma, \delta, \alpha+\beta] m_{i,\beta} n_{i,\gamma} n_{i,\delta} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

図-1 渦度を考慮した2層流体システム

図-2 波高0.05m及び波長4mにおけるトロコイド波

図-3 トロコイド波理論における渦度及び解析における渦度の初期条件

$$\begin{aligned} \eta_{i,1}^\beta \frac{\partial f_{i,\beta}}{\partial t} + \eta_{i,1}^{\beta+\gamma} m_{i,\beta} \frac{\partial n_{i,\gamma}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta_{i,1}^{\beta+\gamma} \nabla f_{i,\beta} \nabla f_{i,\gamma} + \frac{1}{2} S_{i,j}[\beta, \gamma, 0] f_{i,\beta} f_{i,\gamma} \\ + \eta_{i,1}^{\beta+\gamma+\delta} \nabla f_{i,\beta} m_{i,\gamma} \nabla n_{i,\delta} + S_{i,j}[\beta, \gamma, \delta] f_{i,\beta} m_{i,\gamma} n_{i,\delta} \\ + \frac{1}{2} \eta_{i,1}^{\beta+\gamma+\delta+\epsilon} m_{i,\beta} m_{i,\gamma} \nabla n_{i,\delta} \nabla n_{i,\epsilon} \\ + \frac{1}{2} S_{i,j}[\delta, \epsilon, \beta+\gamma] m_{i,\beta} m_{i,\gamma} n_{i,\delta} n_{i,\epsilon} \\ + g \eta_{i,j} + \frac{\sum_{k=1}^{i-1} (\rho_i - \rho_k) g h_k}{\rho_i} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\Delta = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ であり、 g , $P_{i,j}$, ρ_i , h_i は、それぞれ重力加速度、界面における圧力、 i 層の密度及び i 層の静水深である。

3. トロコイド波理論を用いた方程式の検討

波の非線形項を考慮するいわゆる有限振幅波理論のうち、唯一の厳密解はGerstnerによって求められたものと

してトロコイド波理論が知られており、深海波を対象とするものである。また、トロコイド波は円軌道を描くことから、ラグランジュ的な取り扱いをすることができ、渦度を容易に求めることができる。したがって、本研究では、渦度場に拡張したFSImodelを用いてトロコイド波理論を再現することによって、本モデルを評価するものとする。

(1) トロコイド波理論による再現波形

再現対象とするトロコイド波形は、図-2に示す波高0.05m及び波長4mの波とする。なお、この波形の渦度はトロコイド波理論に示されている渦度の式から図-3の赤線で示されるような分布を持つ。

(2) 渦度を考慮したFSImodelの計算条件

計算条件は図-4のような計算領域を用い、メッシュ間隔を0.1 mとし、計算領域の側方を完全反射境界とした。算時間間隔は 4×10^{-4} sとした。境界左端から与えるものとし、波形はトロコイド波理論で与えられる波形と同様に波高0.05 m、波長4 mとして与えた。また、鉛直分布関数の計算次数を2次及び3次の2パターンで計算を行い、トロコイド波の再現を行った。渦度に関しては、渦の効果を容易に理解できるようにするため、図-3黒実線及び黒破線で示すような、水表面を $\omega=0.012 \text{ s}^{-1}$ 及び $\omega=0.006 \text{ s}^{-1}$ 河床を $\omega=0 \text{ s}^{-1}$ とする線形分布を与えた正方向の渦度を2パターン用意し領域全体に与え、比較を行うため渦なしの計算も同様に行った。なお、再現計算で与えている渦度の鉛直分布は初期条件として計算次数を2次まで考慮している。この次数は渦度の鉛直分布を決定づけるものであり、次数を上げると図-3で示す黒線の鉛直渦度分布が赤線の理論値に近づくことになるが、初期条件及び後述する水平流速分布の算出が煩雑になるため試験的に渦度の次数を2次としている。本研究の解析では、渦度を考慮することによって発生する流速成分の水深平均値を0とすることで計算を行った。例として、計算次数2の場合、渦度による水平流速は式(2)～(3)を考慮して、以下の式により示される。

$$u_{\omega} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = (m_1 + m_2 z) \frac{\partial}{\partial x} (n_1 + n_2 z) \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 m 及び n は渦度に関する変数である。式(11)を水深方向に鉛直積分を施し、0とする m 及び n を求めることで図-5のように水深方向の渦度による流速の収支を0とすることができる。また、鉛直方向の平均流速を0とする m と n の値は同時に図-3の黒線で示す渦度も満足していなければならないが、誌面の都合上、導出方法は割愛させていただく。

図-4 初期水位及び計算領域

図-5 各渦度によって発生する水平流速

図-6 各計算次数における渦あり及び渦なし条件のトロコイド波理論波形の再現結果

表-1 渦度を考慮することによる波長及び波高の変化

	2nd order of calculation			3rd order of calculation		
	$\omega=0$	$\omega=0.006$	$\omega=0.012$	$\omega=0$	$\omega=0.006$	$\omega=0.012$
波長(m)	5.1	5.0	5.0	4.2	4.1	4.0
振幅(m)	0.0234	0.0235	0.0236	0.0240	0.0245	0.0248

(3) 渦度を考慮したFSImodelによる再現計算

図-6 (a) に示す計算次数2の波形は、渦なし及び渦あ

りの計算において波長が5 m程度となっており、トロコイド波理論で示される波長4 mよりも1 m程度長くなっていることが分かった。これは、計算次数2では計算される流速の鉛直分布が線形的な分布を持つため流速が過大に評価されてしまい、トロコイド波の波速及び波長が十分に再現できなかったためと考えられる。これにより、深海波に近い条件のトロコイド波の再現には、より高次でべき乗に展開する必要があることが分かった。一方、図-6 (b) に示す計算次数3の結果は、再現対象としたトロコイド波理論で示される波長及び波高を概ね再現できていた。図-6 (a) (b) に示す2つの結果において、黒線で示す渦度ありの結果は、表-1に示すとおり、渦度が大きくなると波長が0.1 m ~ 0.2 m程度短くなっていることが分かる。特に、トロコイド波の波長を概ね再現できている図-6 (b) に示す計算次数3の結果は、渦度を考慮することにより、波高が渦なしの結果と比べて大きくなっており、初期条件として定めた振幅0.025 mに近づいていることが分かる。これは、正方向の渦度を考慮することにより、水中に反時計回りの渦が発生しているためであると考えられる。

次に、トロコイド波理論における位相速度と渦度を考慮した計算次数2及び3の結果における位相速度を図-7に示すように比較を行った。トロコイド波理論における位相速度は、図-7の赤線で示すように約2.5 m/sとなった。黒実線で示す計算次数2の結果は、位相速度が赤線で示す理論値よりも大きな値を示していることから、計算次数2とした計算ではトロコイド波を再現できないことが分かる。一方、黒破線で示す計算次数3の結果は、渦度を考慮することによりトロコイド波理論の位相速度に近づいた。特に、水表面の渦度を $\omega=0.012 \text{ s}^{-1}$ とした結果は約2.52 m/sとなっており、渦なしの結果である約2.55 m/sと比べ、理論値に近づく結果となった。これより、初期条件として与える渦度の鉛直分布が線形であってもトロコイド波の再現計算としては十分な精度の再現結果が得られることが分かる。

次に、計算次数3におけるトロコイド波理論の再現性が概ね確認されたので、図-8に計算次数3における渦度の変動について記述する。計算条件に関しては、最もトロコイド波理論を再現できていた水面に渦度を $\omega=0.012 \text{ s}^{-1}$ 与え鉛直方向に線形分布を持たせた結果について示す。なお、渦度の変化は、観測地点を図-4に示す計算領域の左端から40mの位置と定めて結果を示す。図-8において、およそ15 s付近から振幅が大きくなっていることから、この時間から波が観測地点に到達したと考えられる。この時間から渦度が各水深で振動しているが、振動の平均値が常に一定の値を示していることから、初期に与えた渦度と同じ値が波の通過後も維持されているという結果

図-7 トロコイド波の位相速度及び各計算波形における位相速度

図-8 トロコイド波の計算による渦度の変化 ($\omega=0.012 \text{ s}^{-1}$)

図-9 渦度を考慮したソリトン波の遡上計算における計算領域及び初期界面状態

(a) 初期波形

(b) 渦度の初期分布

図-10 渦度を考慮したソリトン波の遡上計算における初期条件

図-11 渦なし及び渦ありにおけるソリトン波の計算結果 (時刻 $t=75 \text{ s}$)

が得られた。

4. 渦度を考慮したソリトン波の遡上に対する検討

続いて本章では、河床勾配を持つ領域について渦度を考慮したソリトン波が遡上する場合の検討を行う。

計算条件は図-9のような計算領域を用い、メッシュ間隔を0.5 mとし、計算領域の側方を完全反射境界とした。計算次数は2次とする。使用する河床勾配は1:200の傾斜を与えた。計算時間間隔は 2.5×10^{-4} sとした。波は境界左端から与えるものとし、図-10 (a) に示す初期のソリトン波形状には、過去の研究において示されている3次オーダーの内部波の方程式 (Mirie・Pennell, 1989) を利用した3次オーダー解を用い、水深2 mにおける振幅0.35 mとして計算領域の左端から与えた。渦度に関しては、図-10 (b) に示すように、試験的に正方向の渦度である $\omega=0.005 \text{ s}^{-1}$ を水深方向に一定として計算領域に与えた。これは、トロコイド波理論のようにソリトン波における渦度が明確に式化されていないことや、初期渦度の次数を計算次数より1次減らすことにより計算がより安定し易くなるという条件のもと、渦度がソリトン波に与える影響を確認できる値を使用した。渦度を考慮することによって発生する流速成分の水深平均値は、前章と同様の手順を用い、鉛直方向の平均流速を0として計算を行った。また、渦なしの計算も同時に行い、渦ありと渦なしの結果について比較を行った。

図-11はソリトン波の遡上に関して、渦あり及び渦なしの結果を示したものである。なお、波形は計算開始から75秒後の結果を比較したものである。計算の結果、トロコイド波理論の計算と同様に、図-11において破線で示す渦ありの計算結果は、実線で示す渦なしの結果と比べて、同時刻におけるソリトン波の到達距離が約1メッシュ分遅れていることから、波速が遅くなっていることが分かった。また、若干ではあるが、渦度を考慮した結果は、渦度を考慮しない場合に比べて、波高が約0.02 m程度小さくなっていることが確認された。これらの結果から、ソリトン波に渦度を考慮した場合、トロコイド波を用いた計算と同様に波速が遅くなることが示された。また、本ケースのように浅水域の波に渦度を考慮した計算を行った場合、波高が小さくなる可能性も示された。これは、第3章の計算と同様に、計算条件として与えた渦度が正方向であることから、水中に反時計回りの渦が生じており、特に水面付近では、渦度による波の進行方向と逆方向の流れが生じているため、波速が減衰したものであると考えられる。

5. おわりに

本研究で得られた結論を要約すると以下のとおりである。

- (1) 深海波の計算において、渦度を考慮した結果は、渦度を考慮しない場合と比べて波長が短くなり、波高に関しても若干高くなる可能性を得られた。
- (2) 渦度を考慮したFSImodelをトロコイド波理論に使用

した結果、計算次数3において、トロコイド波理論で示される波形及び波速を概ね良好に再現できた。

- (3) 渦度を考慮したFSImodelを用いて、渦度を持つソリトン波の遡上計算を行った結果、正方向の渦度を考慮した場合は波速が遅くなり、波高も若干ではあるが小さくなる。

参考文献

- 磯部雅彦 (1985) : 有限振幅波の諸理論と応用範囲, 第21回水工学に関する夏期研修会講義集Bコース, 土木学会。
 柿沼太郎 (2001) : 浸透性海浜における内部派の挙動の数値計算, 海岸工学論文集, 第48巻, pp.146-150。
 柿沼太郎, 中山恵介 (2007) : 渦度を考慮した非線形波動方程式による表面波及び内部波の数値解析, 海岸工学論文集, 第54巻, pp.6-10。
 佐藤之信, 吉江祐人, 中山恵介, 柿沼太郎, 駒井克昭 (2013) : 河川津波の進行・発達と河道内における変形に関する解析, 土木学会論文集B2 (海岸工学), 第69巻, pp.161-165。
 辻 英一・及川正行 (2006) : Extended Kadomtsev-Petviashvili方程式の孤立波解の斜め相互作用, 応用力学研究集会報告, No.17ME-S2, No.37。
 中山恵介, 柿沼太郎, 及川正行, 辻 英一, 丸谷靖幸 (2011) : ソリトン共鳴により発生する大振幅ソリトンの解, 土木学会論文集B2 (海岸工学), 第58巻, pp.6-10。
 堀江清司 (1991) : [新編]海岸工学, 東京大学出版会, 384p。
 Funakoshi, M. (1980) : Reflection of obliquely incident solitary waves, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.49, No.6, pp.2371-2379。
 Kodama Y. (2010) : KP solitons in shallow water, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol.43, 434004-434057. doi:10.1088/1751-8113/43/43/434004。
 Li W, Y0eh H. and KODAMA Y. (2011) : On the Mach reflection of a solitary wave: revisited, Journal of Fluid Mechanics, Vol.672, pp326-357。
 Miles J.W. (1977) : Resonantly interacting solitary waves. Journal of Fluid Mechanics, Vol.79, pp.171-179。
 Mirie, R.M. and S.A. Pennell. (1989) : Internal solitary waves in a two-fluid system, Physics of Fluids, A1 (6), pp.986-991。
 Nakayama K. and J. Imberger. (2010) : Residual circulation due to internal waves shoaling on a slope, Limnology and Oceanography, Vol. 55, pp.1009-1023, doi: 10.4319/lo.2010.55.3.1009。
 Nakayama K. and T. Kakinuma. (2010) : Internal waves in a two-layer system using fully nonlinear internal-wave equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.62 (5), pp.574-590, doi: 10.1002/flid.2037。
 Nakayama K., T. Shintani, K. Kokubo, Y. Maruya, T. Kakinuma, K. Komai and T. Okada. (2012) : Residual current over a uniform slope due to breaking of internal waves in a two-layer system, Journal of Geophysical Research, vol.117, C10002, 11pp., doi:10.1029/2012JC008155。
 Nakayama K., T. Shintani, K. Shimizu, T. Okada, H. Hinata and K. Komai. (2014) : Horizontal and residual circulation driven by wind stress curl in Tokyo Bay, Journal of Geophysical Research, doi: 10.1002/2013JC009396。
 Tanaka M. (1993) : Mach reflection of a large-amplitude solitary wave, Journal of Fluid Mechanics, Vol.248, pp.637-661. doi:http://dx.doi.org/10.1017/S0022112093000941
 Tsuji H. and Oikawa M. (2007) : Oblique interaction of solitons in an extended Kadomtsev-Petviashvili equation, Journal of Physical Society of Japan, Vol. 76, pp.84401-84408。