深水域から浅水域に伝播する内部孤立波の数値解析

Numerical Analyses of Internal Solitary Waves Propagating from Deep Water to Shallow Water

山下 啓¹・柿沼太郎²・木村晃彦³

Kei YAMASHITA, Taro KAKINUMA and Akihiko KIMURA

Internal solitary waves propagating from deep water to shallow water in a two-layer fluid are numerically simulated by solving the set of nonlinear equations in consideration of both strong nonlinearity and strong dispersion of waves. As an internal solitary wave travels from deep water to shallow water, almost all its wave energy is transmitted from the deep- to the shallow-water regions. A BO soliton propagates into a shallow-water region, generating KdV solitons, the characteristics of which depend on the positional relationship between the interface and the critical level. In the case where the static interface is below the critical level in a shallow-water region, disintegration of an internal solitary wave occurs remarkably, after which the available potential energy of the wave train becomes larger than its kinetic energy.

1. 序論

水深急変地点である陸棚上を潮流が通過するとき、半日周期を有する内部潮汐が発生し、沿岸域へ伝播することが知られている(例えば、日比谷, 1988)。他方、外洋を伝播する内部波が陸棚上へと到達する場合がある(Ostrovsky・Stepanyants, 1989)。Grimshaw ら(2004)は、外洋から陸棚へと入射する内部孤立波を対象として、KdV 理論を拡張した eKdV 方程式(Lee・Beardsley, 1974)を適用した数値解析を行ない、非線形内部波の変形解析を行なっている。

ところで、海洋を2層流体であると仮定した場合、深水域である外洋の内部波に対しては、Benjamin-Ono (BO) 方程式(Benjamin, 1967; Ono, 1975)及びChoi・Camassa (1999)によるDeeper version ($O(h_1) \ll O(h_2)$; h_1 及び h_2 は、それぞれ、上・下層の層厚である。)が適用性が高い。他方、浅水域である陸棚上の内部波に対しては、KdV 方程式及びChoi・Camassa (1999)によるShallower version ($O(h_1) = O(h_2)$)の適用性が高い。すなわち、水深変化が大きい、深水域～浅水域を伝播する内部波を、摂動法に基づく鉛直積分型波動方程式系を用いて解析する場合、BO 方程式及びKdV 方程式といった層厚比に対する適用条件が異なる方程式系を接続する必要がある。また、異なる方程式系を接続する場合、解析結果は、理論モデルの精度のみならず、これらの接続方法にも影響を受けるであろう。このため、深水域～浅水域を伝播する非線形内部波の挙動を精度よく把握することが困難と

なり、深水域～浅水域を伝播する非線形内部波を統一的に取り扱った研究事例は、殆ど存在しない。

他方、変分原理に基づいて導かれた柿沼(2001)の波動方程式系は、波の非線形性及び分散性に対して仮定が課されていない。このため、浅水域への適用性(例えば、Kakinuma・Nakayama, 2007; 中山ら, 2010; 山下・柿沼, 2013)のみならず、深水域への適用性(Nakayama・Kakinuma, 2010; Yamashita ら, 2013)も高いことが確認されている。すなわち、異なる方程式系を接続することなく、深水域～浅水域を伝播する非線形内部波を一つの理論モデルによって精度高く解析することができる。

そこで、本研究では、非線形波動方程式系(柿沼, 2001)に基づく数値解析を行ない、深水域である外洋から、浅水域である陸棚上に伝播する内部孤立波の挙動を調べる。そして、陸棚斜面上における内部波の変形や、外洋と陸棚の間に存在する水深急変部における内部波の反射を検討する。また、陸棚上を伝播する内部波の、短周期内部波への変遷過程に関し、陸棚上における界面位置とcritical level(船越・及川, 1989)の位置関係に着目して調べ、深水域から浅水域へと伝播する内部波のエネルギー特性に関して議論する。

2. 基礎方程式系及び数値解析手法

非粘性・非圧縮性である2層流体の非回転運動を対象とする。上層及び下層をそれぞれ第1層及び第2層と呼ぶ。ここでは、内部波の特性に着目するため、2層流体の最上面を固定水平板とする。第*i*層の速度ポテンシャル ϕ_i を次式のように、 N_i 個のべき関数の重み付き級数に展開する。

$$\phi_i(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{\alpha_i=0}^{N_i-1} \{ f_{i,\alpha_i}(\mathbf{x}, t) \cdot z^{\alpha_i} \} \dots\dots\dots (1)$$

変分法(柿沼, 2001)を適用すると、内部波に対する

1 正会員 博(工) 東北大学 産学官連携研究員
災害科学国際研究所
2 正会員 博(工) 鹿児島大学大学院 准教授
理工学研究科 生命環境科学専攻
3 学生会員 修(工) 鹿児島大学大学院
理工学研究科 生命環境科学専攻

図-1 Case Aの計算対象領域(黒色の実線: 水底面, 赤色の破線: critical level, 赤色の実線: 内部波の線形理論による波速の領域Iの値に対する相対値; 深水域Iにおける全水深及び下層厚は, それぞれ, h 及び $h_2 = 99h_1$ である.)

図-2 図-1の領域Iから入射させる内部孤立波の数値解(実線: 上層及び下層の速度ポテンシャルの展開項数をそれぞれ3及び5としたときの数値解, 破線: BOソリトン解)

非線形方程式系(山下ら, 2014)が得られる。これを基礎方程式系とし, Nakayama・Kakinuma (2010)と同様の陰的な差分法を適用して時間発展を解く。

また, 深水域から浅水域における非線形内部波を再現するために, 上・下層における速度ポテンシャルの展開項数をそれぞれ $N_1 = 3$ 及び $N_2 = 5$ とする。そして, 浅水域の水平距離が比較の長い場合と短い場合の両者に関して検討を行なう。なお, 簡単のために, 底面摩擦や流速shearによるエネルギー減衰を考慮しない。

3. 深水域から水平距離が比較の長い浅水域へと伝播する内部孤立波の挙動

(1) 計算条件及び Critical Level

上・下層の密度比を $\rho_1/\rho_2 = 0.98$ とする。図-1に, 計算対象領域の一例 (Case A) を示す。ここで, 鉛直軸 z の原点は, 流体層の最上面に位置する。領域 I, II 及び III は, それぞれ, 深水域, 一様勾配斜面域及び浅水域である。このうち, 深水域Iにおける全水深を h とし, 静水時の上層厚及び下層厚をそれぞれ $h_1 = 0.01h$ 及び $h_2 = 0.99h$ とする。また, 領域 II の斜面勾配は, 陸棚斜面の勾配と同程度である $s = 0.1$ とする。更に, 浅水域IIIにおける静水時の下層厚が $h_2 = 4h_1$ である場合を Case A, $h_2 = h_1$ である場合を Case B, そして, $h_2 = 0.5h_1$ である場合を Case C とする。

図-1において, 水色の直線が静水時の界面位置 $z = \eta(x, t)$ を表わし, 黒色の実線が底面位置 $z = b(x)$ である。赤色の実線は, 内部波の線形浅水波理論による局所的な波速 $C_{i,0}(x)$ の, 領域Iの値 $C_{i,0,1}$ に対する相対値 $C_{i,0}/C_{i,0,1}$ を示す。なお, $C_{i,0}/C_{i,0,1}$ の変化が大きい場合ほど, 水深急変部において反射が生じやすい。また, 赤色の破線は, 次式で表わされる critical level z_c (船越・及川, 1989) の位置を示す。

$$z_c = b / \left(1 + \sqrt{\rho_2 / \rho_1} \right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

静水時の界面位置が, critical level より上方に位置する

場合, 下に凸の内部孤立波が安定する。そして, critical level を超える振幅を有する内部孤立波は, 存在しない。他方, 静水時の界面位置が, critical level より下方に位置する場合, 上に凸の内部孤立波が安定し, critical level を超える振幅を有する内部孤立波が存在しない。すなわち, critical level と静水時の界面の位置関係が, 内部孤立波の安定する波形と振幅の極限値を規定する。従って, Case Aの浅水域では, 下に凸の内部孤立波が安定し, Case Bでは, 内部孤立波が存在しない。そして, Case Cの浅水域では, 上に凸の内部孤立波が安定する。すなわち, Case Cでは, 浅水域へと内部波が伝播する際に, 界面位置が critical level を超えるため, 深水域と浅水域における内部孤立波の特性が反転する。こうした, 特性が反転する内部孤立波は, 浅水域を対象としたKdV 理論に基づく数値解析 (Helfrich ら, 1984) や, 現地観測 (Orr・Mignerey, 2003) においても, その存在が確認されている。

なお, 大気と水のように, 密度差が十分に大きい場合, critical level は, 水面の遥か上方に位置する。このため, 大気と水の界面を安定して伝播する水面孤立波は, 上に凸である。

図-2 に, 領域 I から入射させる入射波の波形を示す。これは, 内部孤立波の数値解を求めるための手法 (山下・柿沼, 2013) を適用して得られた, 本方程式系に対する内部孤立波の数値解である。ここで, 波高上層厚比は, $|a|/h_1 = 0.1$ である。図中には, BO 方程式の内部孤立波解であるBO ソリトンも併せて描かれているが, 本数値解とBO ソリトンがほぼ一致していることがわかる。

また, 側方境界条件には, 完全反射条件を適用する。計算格子間隔及び計算時間間隔は, それぞれ, $\Delta x/h = 0.01$ 及び $C_{i,0,1}\Delta t/\Delta x = 0.01$ とする。

(2) 深水域～浅水域を伝播する内部孤立波の変形特性

図-3 (a) に, Case Aの内部波の界面形の時間変化を示す。斜面上を伝播するとき, 波形が殆ど変化しない。そして, 水深急変部において, 反射波が殆ど生じていないことがわかる。すなわち, 深水域における内部波のエネルギーの大部分が浅水域へと透過している。透過した内

図-3 深水域から浅水域に伝播する内部孤立波の界面形の時間変化(深水域 I における全水深及び下層厚は、それぞれ、 h 及び $h_2 = 99h_1$ であり、斜面勾配は、 $s = 0.1$ である。)

部波が浅水域を伝播するとき、前傾化した後、下に凸である孤立波状の二つの波が発生している。そして、第一波の波高は、深水域における波高と比較すると大きくになっているが、その差は、僅かである。

図-3 (b) に、Case B の内部波の界面形の時間変化を示す。この場合、水深急変部での反射が僅かに確認される。そして、浅水域において、顕著な分裂が生じている。Case B における波形の分裂の様子は、Case A と大きく異なる。すなわち、Case B では、波群が形成され、時間の経過に伴い、この波群の全長が伸長している。また、浅水域における内部波の谷のピークの界面高度がやや上昇しており、波高は、深水域の内部波の波高と同程度である。

図-3 (c) に、Case C の内部波の界面形の時間変化を示す。浅水域において $C_{i,0}/C_{i,0,1} = 0.58$ であり、水深急変部における波速の変化率が比較的大きいため、反射率が Case A 及び B より高い。また、浅水域における分裂が最も顕著であり、波群の全長が、より長くなっている。こうし

図-4 各理論による内部孤立波解と時刻 $tC_{i,0}/h = 34.9$ の界面形

た波エネルギーの分散により、内部波の波高は、深水域における波高と比較して減少している。

図-4 (a), (b) 及び (c) に、それぞれ、図-3 (a), (b) 及び (c) の時刻 $tC_{i,0}/h = 34.9$ における界面形を示す。

図-4 (a) では、数値解析結果の界面形を KdV ソリトン及び BO ソリトンの界面形と比較している。ここで、KdV ソリトン及び BO ソリトンの界面形は、数値解析結果の谷のピークの界面変動と等しい振幅を有する KdV 理論解及び BO 理論解である。図より、BO ソリトンが下に凸の KdV ソリトンに変形したことがわかる。

図-4 (b) は、浅水域において内部孤立波が存在しない場合の結果である。この場合、正弦波に類似した波が分裂波として生じている。ところで、KdV 理論では、critical level と界面位置が一致する場合、KdV 方程式の非線形項が消失する。このため、KdV 理論によって再現される波は、弱い分散性を有した線形波となる。KdV 理論より類推して、Case B における内部波の分裂は、ソリトン分裂でなく、周波数分散の効果による波エネルギーの分散であると言える。

図-4 (c) は、深水域と浅水域における内部孤立波の特

性が反転する, Case Cの結果である. 図では, 数値解析によって得られた分裂波が, 上に凸の KdV ソリトンの界面形と比較されている. ここで, KdV ソリトンの波高は, 数値解析結果の第1谷と第1峰からなる第1波の波高と等しい. 図より, この分裂波が KdV ソリトンと一致していることがわかる. すなわち, 深水域から浅水域へ伝播する過程において, 下に凸の BO ソリトンから, 上に凸の KdV ソリトンが発生している.

(3) 深水域～浅水域を伝播する内部孤立波のエネルギー特性

図-5 (a), (b) 及び (c) に, それぞれ, Case A, B 及び C における内部波のエネルギーの時間変化を示す. ここで, 添え字 K 及び P は, それぞれ, 運動エネルギー及び位置エネルギーであることを表わし, I + II 及び III は, それぞれ, 領域 I と II の両者にわたる積分値及び領域 III における積分値であることを意味する. そして, エネルギーは, 各時刻における計算領域全体の全エネルギーによって無次元化されている. また, 位置エネルギー及び運動エネルギーは, 次式を用いて評価している.

$$E_{i,P} = \int \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) g (\eta + h_1)^2 dx / (\rho_2 - \rho_1) g h^3 \quad \cdots (3)$$

$$E_{i,K} = \left\{ \int \int_{b(x)} \frac{1}{2} \rho_i \left[(\nabla \phi_i)^2 + \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 \right] dz dx \right\} / (\rho_2 - \rho_1) g h^3 \quad \cdots (4)$$

図-5 (a) における, $tC_{i,0,1}/h < 10$ の黒色の実線が示すように, 深水域を x 軸の正の方向に伝播する内部波の運動エネルギーは, 位置エネルギーより大きい. そして, 領域 III へ透過した内部波のエネルギーも, 深水域と同様に運動エネルギーの方が位置エネルギーより大きい. また, 時刻 $tC_{i,0,1}/h > 12$ における黒色の実線より, 反射波のエネルギーの割合が僅かであることが確認できる.

図-5 (b) では, 時刻 $tC_{i,0,1}/h > 20$ において, 領域 III を伝播する内部波の運動エネルギーと位置エネルギーの両者が等しい. 線形理論では, 進行波の運動エネルギーと位置エネルギーの両者が等しく, 本計算条件によってシミュレートされた内部波のエネルギーは, 図-4 (b) に示した波形とともに, 線形波と同様の特性を示している.

他方, 図-5 (c) では, 領域 III を伝播する内部波の位置エネルギーが運動エネルギーより大きい. すなわち, 領域 I と領域 III におけるエネルギーの関係が反転している. また, $tC_{i,0,1}/h > 12$ における黒色の実線は, 水深急変部において生じた, x 軸の負の方向に伝播する反射波のエネルギーの時間変化を表わしている. 反射波のエネルギーは, 全エネルギーの数%程度であり, 水深急変部において, 反射が殆ど生じていないと言える. すなわち,

(a) Case A (領域 III: $h_2 = 4h_1$)

(b) Case B (領域 III: $h_2 = h_1$)

(c) Case C (領域 III: $h_2 = 0.5h_1$)

図-5 深水域から浅水域に伝播する内部波孤立波のエネルギーの時間変化 ($E_{i,K}$:運動エネルギー, $E_{i,P}$:位置エネルギー; 添え字 I + II 及び III は, それぞれ, 領域 I と II の両者における積分値及び領域 III における積分値を表わす.)

深水域を伝播する内部波孤立波のエネルギーは, 浅水域へと透過しやすい.

しかしながら, Case B 及び C では, 周期が比較的短い多数の分裂波が生じるため, 浅水域を伝播する過程におけるエネルギーの減衰が, 比較的大きいと考えられる.

4. 浅水域の水平距離が比較的小さい海嶺や潜堤のある水域を伝播する内部孤立波の挙動

浅水域の水平距離が比較的小さい海嶺や潜堤のある水域を伝播する内部波の挙動を調べる. そのために, 図-6 に示す水深分布を有する水域を計算対象領域とする. 静水時において, 深水域 I 及び III の全水深を h とし, 上層厚及び下層厚をそれぞれ $h_1 = 0.01h$ 及び $h_2 = 0.99h$ とする. また, 潜堤 (海嶺) の天端の水平距離を h とし, 潜堤天端上の下層厚を $h_2 = h_1$ (Case 1), または, $h_2 = 0.5h_1$ (Case 2) とする. 斜面勾配は, $s = 0.1$ とする.

図-7 (a) 及び (b) に, それぞれ, Case 1 及び Case 2 の

図-6 計算対象領域(黒色の実線: 底面, 赤色の破線: critical level; 深水域 I 及び III における全水深及び下層厚は, それぞれ, h 及び $h_2 = 99h_1$ である.)

(a) 潜堤天端上の下層厚が $h_2 = h_1$ である場合 (Case 1)

(b) 潜堤天端上の下層厚が $h_2 = 0.5h_1$ である場合 (Case 2)

図-7 各理論による内部孤立波解と図-6の水域を伝播する内部波の界面形 ($t_{C_{10.1}}/h = 34.9$)

時刻 $t_{C_{10.1}}/h = 34.9$ における界面形を示す。ここで、数値解析結果と KdV ソリトン及び BO ソリトンの界面形が比較されている。Case 1 及び Case 2 ともに、数値解析による主波の界面形が、BO ソリトンと殆ど一致している。また、Case 1 より Case 2 の方が波高が小さい。これは、Case 1 より Case 2 の方が、領域 II における水深変化が大きく、波の分裂や反射が生じやすいためである。

内部孤立波は、水深変化に伴う波の分裂が発生しても、その後、一様静水深域を伝播する過程において、その水域の層厚比及び密度比に見合った孤立波として、安定して伝播するようになる。これは、3. の場合も同様である。

5. 結論

深水域から浅水域へと伝播する内部波孤立波を対象として、非線形波動方程式系に基づく数値解析を行なった。その結果、以下のような結論を得た。

- ・深水域を伝播する内部孤立波のエネルギーは、その殆どが浅水域へ透過する。
- ・下に凸である BO ソリトンが陸棚上を伝播するとき、

下、または、上に凸である KdV ソリトンが、分裂波として生じる。この分裂波の特性は、静水時の界面位置と critical level の位置関係に規定される。

- ・浅水域における静水時の界面位置が critical level と一致する場合、分裂波は、正弦波形に類似した波形を有する。また、分裂によって発生した波群では、位置エネルギーと運動エネルギーが等しい。
- ・浅水域における静水時の界面位置が critical level より下方に位置する場合、分裂波が顕著に生じる。そして、この波群が有する位置エネルギーは、その運動エネルギーよりも大きい。

参考文献

- 柿沼太郎 (2001) : 透水性海浜における内部波の挙動の数値計算, 海岸工学論文集, 第48巻, pp. 146-150.
- 中山恵介・柿沼太郎・及川正行・辻 英一・丸谷靖幸 (2010) : 内部ソリトン波の3次オーダー解による再現性の検討, 土木学会論文集B2 (海岸工学), Vol. 66, No. 1, pp. 1-5.
- 日比谷紀之 (1988) : 内部潮汐の発生・伝播機構, 沿岸海洋研究ノート, 第25巻, 第2号, pp. 177-190.
- 船越満明・及川正行 (1989) : 成層流体中の非線形波動, ながれ, 第8巻, pp. 311-335.
- 山下 啓・柿沼太郎 (2013) : 非線形波動方程式系に基づく表面孤立波及び内部孤立波の数値解, 土木学会論文集B2 (海岸工学), Vol. 69, No. 2, pp. 6-10.
- 山下 啓・柿沼太郎・吉本明日妃・吉川 諒 (2014) : 大振幅内部孤立波の伝播過程における非線形現象, 土木学会論文集B2 (海岸工学), Vol. 70, No. 2, pp. 6-8.
- Benjamin, T. B. (1967) : Internal waves of permanent form in fluids of great depth, J. Fluid Mech., Vol. 29, No. 3, pp. 559-592.
- Choi, W. and R. Camassa (1999) : Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, J. Fluid Mech., Vol. 396, pp. 1-36.
- Grimshaw, R., E. Pelinovsky, T. Talipova and A. Kurkina (2004) : Simulation of the transformation of internal solitary waves on oceanic shelves, J. Phys. Oceanogr., Vol. 34, No. 12, pp. 2774-2791.
- Helfrich, K. R., W. K. Melville and J. W. Miles (1984) : On interfacial solitary waves over slowly varying topography, J. Fluid Mech., Vol. 149, pp. 305-317.
- Kakinuma, T. and K. Nakayama (2007) : Numerical simulation of internal waves using a set of fully nonlinear internal-wave equations, Annual Journal of Hydraulic Engineering, JSCE, Vol. 51, pp. 169-174.
- Lee, Ch.-Y. and R. C. Beardsley (1974) : The generation of long nonlinear internal waves in a weakly stratified shear flow, J. Geophys. Res., Vol. 79, No. 3, pp. 453-462.
- Nakayama, K. and T. Kakinuma (2010) : Internal waves in a two-layer system using fully nonlinear internal-wave equations, Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 62, pp. 574-590.
- Ono, H. (1975) : Algebraic solitary waves in stratified fluids, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 39, No. 4, pp. 1082-1091.
- Orr, M. H. and P. C. Mignerey (2003) : Nonlinear internal waves in the South China Sea: Observation of the conversion of depression internal waves to elevation internal waves, J. Geophys. Res., Vol. 108, No. C3, pp. 1-9.
- Ostrovsky, L. A. and Yu. A. Stepanyants (1989) : Do internal solitons exist in the ocean?, Rev. Geophys., Vol. 27, pp. 293-310.
- Yamashita, K., T. Kakinuma and K. Nakayama (2013) : Shoaling of nonlinear internal waves on a uniformly sloping beach, Proc. 33rd Int. Conf. on Coastal Eng., waves. 72, 13 pages.