解適合格子法を用いた津波シミュレーションとメッシュ分割法について

Optimum Scheme of Adaptive Mesh Renement for Tsunami Simulation

森 信人¹・千田 優²・安田誠宏³・間瀬 肇⁴

Nobuhito MORI, Yuu CHIDA, Tomohiro YASUDA and Hajime MASE

Adaptive Mesh Refinement (AMR) method can consider the interactions of different grids and reduce computational cost compared with the conventional nesting scheme. This study applied the AMR for calculation of long wave propagations, and the mesh refinement scheme was optimized through the numerical experiments. The application of the developed model to the 2011 Tohoku Earthquake tsunami was carried out, and the validity of model was validated against the survey data. As a result, AMR method could decrease the computational cost, while maintaining the computational accuracy.

1. 序 論

津波や高潮など、外洋から内湾まで大きくスケールが変化する現象の解析を行う場合、計算領域を広く取る必要があることに加えて、局所的な変形が大きいために空間解像度に解の精度が大きく依存する。津波や高潮の外力である断層や台風が数百キロの空間スケールを持つものに対し、最終的に沿岸部の影響評価において必要とされる空間スケールは数百～数メートルと $10^4 \sim 10^5$ オーダーのスケールの差がある。このため、高解像度を考慮しつつ広領域の数値計算を実施するために、多段ネスティングが広く用いられるが、事前に空間解像度を指定する必要があり、サブドメイン間の情報のやりとりが複雑になるデメリットがある。また、複雑かつ細長い海岸線に沿って詳細計算領域を取ることが難しいこと、さらに台風などに追従して動的に計算領域を変化することが難しいというデメリットがある。

上述した津波・高潮計算の問題点を解決する1つの数値的手法として、計算空間上の物理量の空間解像度を時々刻々と局所的に変化させることで、動的に格子の最適化を行う適合格子細分化法 (Adaptive Mesh Refinement: 以下AMR法) がある (例えばBorthwick, 2000)。動的なメッシュ分割スキームを用いることで、上記の数値的な問題点を解決可能であり、また適切な数値スキームを考慮することにより、計算精度の向上と計算負荷の軽減を両立することも可能となる (Watanabeら, 2012; 安田ら, 2013)。

本研究では、AMR法を用いた津波を計算する数値モデルを開発し、メッシュ分割による計算精度の検証を行う。

2. 解析手法の概要

(1) 支配方程式

基礎方程式は、球面座標系の線形長波方程式を用いた。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \theta} \left[\frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{\partial \cos(\theta Q)}{\partial \theta} \right] = -\frac{\partial h}{\partial t} \dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{gh}{R \cos \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} = -fQ \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{gh}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = +fP \dots\dots\dots (3)$$

ここで η は水面変位、 P および Q は水深積分した単位幅当たりの緯度・経度方向の流量、 (θ, ϕ) は緯度、経度、 g は重力加速度、 h は水深、 R は地球の半径、 f はコリオリ力である。数値計算は、Staggered格子を用い有限差分法により行い、時間積分はleap-frog法を用いた。

(2) 格子分割アルゴリズム

AMR法では、偏微分の精度を上げるために、何らかの基準に応じて空間解像度を動的に変化させる。格子の解像度と数値精度をバランスさせることにより、少ない格子数で局所的な高解像度を実現し、数値解の最適化を行うことができる。また、格子の動的な変化に関するプログラミングに手間がかかるものの、差分法自体は一般的な数値解法をそのまま利用できる利点もある。

適合格子細分化法の代表的なものはセルベース方式とブロックベース方式の二つあり、ここではブロック型分割 (Liang, 2011) を採用し、計算格子を時間積分に伴い動的に変化させる。空間格子サイズを Δ とし、AMRの格子レベルを $level$ を表記する。 $level$ が1つ上がると、 Δ は1/2になる。

$$\Delta^{level+1} = \Delta^{level} / 2 \dots\dots\dots (4)$$

計算初期の格子レベルを1とすると、AMRにおける異なる格子レベル間は図-1に示す空間配置を持つ。

1 正会員 博(工) 京都大学准教授 防災研究所
2 学生会員 京都大学大学院工学研究科
3 正会員 博(工) 京都大学助教 防災研究所
4 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

図-1 AMRのLevelの関係

6	70	71	72	73	74	75	
5	64	65	66	67	68	69	
4							
3	49	50	53	54	57	58	61
			51	52	55	56	59
2	22	23	26	27	40	41	42
			24	25	32	33	34
1	7	8	11	12	15	16	19
			9	10	13	14	17
0	1	2	3	4	5	6	

図-2 AMRメッシュ分割の例(数字は格子番号)

適合格子を作成する際に、隣接する格子サイズが大きく異ならないように、*level*差は1に留めた(2:1ルール)。図-2はその例である。例えば図中の格子番号12の全周囲において、最大の*level*差が1となるように、格子分割・統合を行う必要がある。もし、隣接格子の*level*差が2以上である場合は、隣接格子の解像度が大きく変化しないように、すなわち、*level*差が1となるように周辺格子の再分割・統合を繰り返して行う。格子分割については、初期を*level*=1、1つのセルを4つに分割した場合を*level*=2と表記する。この際に、計算領域の格子数は最大 2^{level} 倍になる。

a) 空間補間

ブロックベース方式では、ブロック毎に細分化を行うことにより、各ブロック中のセルは同じ大きさになるので、格子の大きさが変化するの、隣のブロックに進み、ブロック間で*level*差が生じている時である。そのため、

図-3 全体の計算フロー(左側：メインの計算、右側：AMR法による計算)

格子の大きさが変化しないブロック内では通常の差分を考え、ブロック間で*level*差があるときには、ブロック間で得られた補間値を用いて差分を考えればよく、セルベース方式に比べて計算が単純になる。異なる*level*の格子間で差分を取る際には、距離に応じた重み付き線形補間を用いた(Liang, 2011)。例えば、図-2の格子番号62において、右側の格子63の物理量 q が必要となる場合、

$$q = \frac{q_{62}}{3} + \frac{q_{69}}{2} + \frac{q_{63}}{6} \dots\dots\dots (5)$$

として、格子番号63内における同*level*相当の物理量を内挿して計算を進める。

b) 格子分割・統合および計算の流れ

数値計算のフローは図-3に示す通りであり、一般的な差分計算の中に格子分割・統合のアルゴリズムを組み込む形になる。通常の数値計算では、図の左半分に示した時間積分を行うルーチンのみである。AMRにおける数値計算では、AMRのルーチンと時間積分を行うルーチンの二つから成り立っており、まずメッシュ分割・統合判定を行う。次に、2:1ルールにより隣り合う格子の大きさの比が2より大きくならないようチェックし、メッシュの分割、または統合を行うことで格子の空間的最適化を行う。最後に、 η , P , Q を新しいメッシュで補間し、さらに新しいメッシュ上での地形、水深を与える。AMRのルーチンで得られた η , P , Q , 水深を用い、通常の差分ルーチンに戻り時間積分を行う。

また計算格子の分割・統合は、何らかの基準に応じて開始されるが、水面勾配、波高水深比、Froude数の3つの条件で行い、計算結果への影響についても検討を行った。

$$M_{\Delta\eta} = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2} \dots\dots\dots (6)$$

$$M_{\epsilon} = \frac{\eta}{h} \dots\dots\dots (7)$$

$$M_{Fr} = \max \left[\frac{P}{h\sqrt{gh}}, \frac{Q}{h\sqrt{gh}} \right] \dots\dots\dots (8)$$

図-4 一樣斜面上計算の初期条件

それぞれの分割条件 $M_{\Delta\eta}$, M_e , M_{Fr} に対し, しきい値を変化させて計算精度の検証を行った. さらにコードの並列化とGPU化を同時に行い, 計算コストを軽減した.

3. 結果と考察

(1) 一樣斜面上の計算

格子分割・統合判定の影響を見るため, 一樣勾配斜面上に孤立波を入射させ, 水位の増幅について確認を行った. 図-4に示すように, 初期条件として, 水位には以下の式(9)で表される一次元ガウス分布を与え, 海底地形は, 1/100勾配の一樣斜面を与えて計算を行った.

$$\eta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}\right] \dots\dots\dots (9)$$

ここで, x_0 は中心位置, σ は水面波形の標準偏差である.

図-5はその一例であり, 図の右側から左に向かって孤立波が入射し, 斜面上で水位が増幅している. 参照値はGreenの法則であり, 格子分割を水面勾配の値 $M_{\Delta\eta}$ で判断した場合, 数値振動が生じ, 増幅率もGreenの式との差が大きい. 一方, 波高水深比 M_e およびFroude数 M_{Fr} の値にもとづき格子分割した場合は, 斜面上の水位の増幅は, ほぼ理論値に沿った結果となる. 格子分割による結果の違いは, 補間スキームに依存する部分が多い. 空間的に線形補間を用いているため, 水面勾配の値で格子分割により空間解像度を上げてても空間勾配が変わらないため, 精度向上には直結しない結果が得られた. ただし, この結果は, 空間補間スキームと差分スキームに依存するため, 一般的な結論とはならない点に注意が必要である. また, 反射波で見られる格子統合については, 格子分割より低い値を使うことにより滑らかに空間解像度を落とすことが可能であることを確認した.

(2) 2011年東北地方太平洋沖地震津波の釜石湾計算結果

釜石湾湾口防波堤を対象に, AMR法を用いた数値解析を行い, 2011年東北地震津波における釜石・両石湾の局

図-5 一樣斜面上計算の波高の増幅の比較

所的な津波挙動の再現性について検証した. 解析対象領域は, 釜石湾および両石湾を含む南北方向に10km, 東西方向に12kmとし, 計算地形は中央防災会議50m解像度データに湾口防波堤の形状を組み込んで作成した. 入力波形は, 釜石沖に設置されている岩手南部沖GPS波浪計の観測データ(河合ら, 2011)をそのまま用いた. 海底および市街地は一定粗度を仮定して簡便に評価した. また釜石湾の湾口防波堤は, この津波により破壊されたが, 本研究では計算時間内で破壊されない条件で解析を行った. その他, 計算条件の詳細については米山ら(2012)を参照されたい. 数値解析の精度は, 釜石湾および両石湾の最大水位について痕跡高(Moriら, 2012)と比較により行った.

一樣勾配での計算結果と同様に, 波高水深比(A/h)を用いた格子分割・統合判定による計算結果が最も妥当な結果を得た. 図-6に示すのは, AMR法の有無による最大水位に, 現地で観測された痕跡高(丸で表示)を重ねあわせて評価したものである. 前節の計算結果を踏まえ, AMR法による計算では, 波高水深比 M_e による分割・統合条件は, 分割の基準値を $A/h=1/5-1/20$, 統合の基準値を $A/h=1/50-1/200$ と変化させた. M_e の値により, 湾口防波堤および海岸線付近での最大水位が異なる結果が得られた. 図より, 解析結果と痕跡高の空間分布は概ね一致するが, 痕跡高と比較して, 計算結果は釜石湾の湾奥で良好であるが, 防波堤外での水位増加が過小評価となっている. 図-6(b), (c)に示した, M_e による分割・統合条件を $[1/50, 1/5]$ および $[1/200, 1/20]$ とした場合の結果において, 分割・統合条件を $[1/200, 1/20]$ とした場合の方が, 釜石湾奥での痕跡高と計算結果の水位高との差は小さくなった. これより, 基本的に, 格子分割のしきい値を小さく(格子解像度を増やす)すると, 痕跡高と比較した計算精度が向上することがわかった.

図-6 最大水位の計算結果(濃淡：計算結果, ●：痕跡高(津波合同調査グループ))

図-7は、計算途中の格子分割レベルのスナップショットであり、再分割された領域が、汀線近傍に集中しており、計算過程でこの範囲での空間解像度が増加している。図8に示す格子数の時間変化より、格子分割・統合のしきい値の与え方により、計算領域内で2倍近く格子数が

図-7 AMR法で分割条件を波高水深比とした場合の格子分割レベルのスナップショット(青：level=0, 赤：level=1)

増減しており、これが計算時間に直結している。AMR法では、詳細格子は全体の30%程度にすることが望ましく、津波の伝播計算の場合、格子分割条件としては $A/h=1/10$ 程度が適していることがわかった。計算精度を維持しつつ、計算時間を軽減するには、最大水位が通過後の計算において格子統合をすることが重要であり、分割・統合条件を最適化する必要があることがわかった。実際に、

図-8 格子数の時間変化(赤線: $M_g = [1/100, 1/10]$, 青線: $M_g = [1/50, 1/5]$, 黒線: $M_g = [1/200, 1/20]$)

AMR法による計算は、AMR法なしによる計算と比較して、計算時間が4割程度減少した。

4. 結 論

本研究では、適合格子細分化法 (Adaptive Mesh Refinement: AMR) 法を用いた津波の伝播計算コードを開発し、格子分割の基準変数とその基準値について検討を行った。動的なメッシュ分割スキームを用いることで、計算精度の向上と計算負荷の軽減を両立することが可能であり、一様勾配での計算結果から、津波の遡上では波高水深比もしくはFroude数にもとづく格子分割・統合アルゴリズムが適していることがわかった。ついで、釜石湾湾口防波堤を対象に、AMR法を用いた数値解析を行い、2011年東北地震津波に対する釜石・両石湾の局所的な津波挙動の再現性について検証した。その結果、格子分割

のしきい値を小さく (格子解像度を増やす) すると、痕跡高と比較した計算精度が向上することがわかった。

謝辞: 本研究の一部は、京都大学防災研究所拠点研究費、関西エネルギー・リサイクル科学研究振興財団およびJR西日本との共同研究による成果である。

参 考 文 献

- 河合弘泰・佐藤 真・川口浩二・関 克己 (2011): GPS波浪計で捉えた平成23年東北地方太平洋沖地震津波, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol. 67, No. 2, pp.I 1291I 1295.
- 米山 望・森 信人・三輪真揮 (2012): 2011年東北地方太平洋沖地震津波の釜石湾における挙動の数値解析, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol.68, No.2, pp.I 161-I 165.
- 安田誠宏・間瀬 肇・森 信人・Liang Qihua (2013): 動的アダプティブグリッド法を用いた有限体積法による津波計算モデル, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol. 69, No. 2p. I 1-I5.
- The 2011 Tohoku Earthquake Tsunami Joint Survey Group (2011): Nationwide field survey of the 2011 Off the Pacific coast of Tohoku Earthquake Tsunami, Journal of Japan Society of Civil Engineers, Series B (土木学会論文集 B2 (海岸工学)), Vol. 67 (2011), No.1 pp.63-66.
- Borthwick, A. G. L., S. Cruz Leon, and J. Jozsa (2001): The shallow flow equations solved on adaptive quadtree grids, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 37(6), 691-719.
- Liang, Q. (2011): A structured but non-uniform Cartesian grid-based model for the shallow water equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.66/5, pp.537-554.
- Mori, N., T. Takahashi and The 2011 Tohoku Earthquake Tsunami Joint Survey Group (2012): Nationwide post event survey of the 2011 Tohoku Earthquake Tsunami, Coastal Engineering Journal, Vol.54, Issue 1, pp.1-27.
- Watanabe, Y. et al. (2012): Evolution of the 2011 Tohoku earthquake Tsunami on the Pacific coast of Hokkaido, Coastal Engineering Journal, 54, 1250002.