表面孤立波及び内部孤立波の特性

山下 啓¹・柿沼 太郎²・中山 恵介³

¹正会員 東北大学助教 災害科学国際研究所 (〒980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1)

E-mail: yamashita@irides.tohoku.ac.jp

²正会員 鹿児島大学准教授 学術研究院理工学域工学系海洋土木工学専攻
(〒890-0065 鹿児島県鹿児島市郡元 1-21-40)

E-mail: taro@oce.kagoshima-u.ac.jp

³正会員 神戸大学教授 大学院工学研究科市民工学専攻 (〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1)

E-mail: nakayama@phoenix.kobe-u.ac.jp

変分原理に基づく非線形波動方程式系を基礎方程式系として、大振幅の表面孤立波及び内部孤立波を含む、孤立波の数値解を得た。得られた数値解を理論解や既存の数値解析結果と比較した。そして、表面孤立波及び内部孤立波が有する特性に関して、水面形や界面形、位相速度、水平方向流速及び波のエネルギーに着目して調べた。表面孤立波解では、波高静水深比が大きいほど、運動エネルギーの全エネルギーに対する比が大きくなる。他方、界面形が下に凸の内部孤立波解では、波高最大波高比が中程度の場合に、エネルギー比が大きくなり、その最大値は、上層厚全水深比が小さい場合ほど大きくなる。また、数値解を初期条件とする波動伝播の数値解析を行なった。内部孤立波の壁面衝突において、入射波のエネルギー比が大きいほど、強い非線形挙動が認められた。

Key Words : *solitary wave, internal wave, large amplitude, nonlinearity, wave energy*

1. 序 論

海洋で発生した、振幅の大きな表面孤立波は、沿岸域に伝播すると、構造物や底層に対する大きな外力の一つとなり得る。表面孤立波の特性に関する研究は、古くからなされており、Longuet-Higgins・Fenton¹⁾等の報告がある。ただし、これまでの多くの議論は、摂動核に浅水波を用いるといった仮定のもとで行なわれており、そのような場合、大振幅に伴う非線形性や、分散性に関する精度が、不十分である可能性がある。

一方、密度成層が発達した海や湖では、内部孤立波が観測される^{2), 3)}。大振幅内部孤立波は、栄養塩の輸送や水温の変化を通して、生態系を含む水圏環境に大きな影響を及ぼす。ところで、内部波の特性は、波高水深比や水深波長比のみならず、上・下層の密度比並びに層厚比にも依存する。従って、内部孤立波の特性は、表面孤立波よりも複雑な様相を呈するであろう。

そこで、本研究では、変分原理に基づいて導出された非線形波動方程式系⁴⁾を基礎方程式系として、表面孤立波及び内部孤立波の特性を調べる。本方程式系は、その一般形が、波の非線形性及び分散性に対する仮定を課さずに導出されているという特徴を有するため、より高精

度な解に基づき、孤立波に関して議論できると考えられるからである。ただし、方程式系の実用の際には、後述するように、速度ポテンシャルの展開級数を有限項数で打ち切るため、各展開項数に応じた方程式系が有する数値解の精度は、速度ポテンシャルの近似精度に依存することになる。

ところで、変分原理に基づく本方程式系の解析解は、得られていない。従って、ここでは、山下・柿沼⁵⁾の手法を適用して孤立波の数値解を求める。本手法は、移流方程式を用いて、与えられた波動方程式系を定常解に関する方程式系に書き換え、その数値解をNewton-Raphson法により求めるものである。一般に、孤立波を入射波として与える波動伝播の数値解析では、KdV理論解等を入射させ、助走時間を設けて、入射波を計算対象領域になじませていくといった方法がとられている。これは、入射波が、数値解析に適用する数値モデルの解と異なる場合、この助走時間内で、入射波を数値モデルの解に近付けていく必要があるからである。そのため、場合によっては、多大な助走時間を必要とし、また、この手法で得られた波は、助走時間内に入射波が変形した波であり、それを孤立波解とみなしてよいかどうかを確認する必要がある。これに対して、数値解析に適用する数値モデル

の基礎方程式系の解を山下・柿沼⁵⁾の手法を適用して求めれば、上記のような助走時間が不要であり、また、数値解析で入射させる波が孤立波解とみなしてよいかどうかの確認作業を回避できる。その結果、対象領域内の伝播過程における、所定の入射波の変化に関して、数値モデルの計算精度で議論することが可能となる。

本研究では、まず、変分原理に基づく波動方程式系の数値解を算出し、摂動法に基づく、KdV 理論解や Choi・Camassa⁶⁾の理論解、または、Euler 方程式系の数値解析解⁷⁾と比較し、数値解の妥当性の検討を行なう。次に、表面孤立波及び内部孤立波が有する特性に関して、代表波長や、波の位相速度、すなわち、波速、そして、水平方向流速や、波のエネルギーに着目して考察する。更に、上記の手法で得られた孤立波の数値解を初期条件として与えることによって、時間発展問題の数値解析を行ない、大振幅を有する定常進行波の伝播や、内部波の相互干渉及び壁面への衝突に関して調べる。

2. 表面波及び内部波の非線形方程式系

(1) 変分原理に基づく非線形波動方程式系

非粘性・非圧縮性の流体運動を対象とする。図-1に示すような互いに混合しない流体層を最上層から順番に第 i 層と呼ぶ。第 i 層の密度 ρ_i は、各層内で一様、かつ、時間に関して一定であるとする。また、静水時における第 i 層の水深を層厚 $h_i(\mathbf{x})$ とする。

第 i 層の各点における水平方向流速及び鉛直方向流速をそれぞれ u_i 及び w_i とする。流体運動が非回転であると仮定し、第 i 層の速度ポテンシャル $\phi_i(\mathbf{x}, z, t)$ を次式で定義する。

$$u_i = \nabla \phi_i, \quad w_i = \partial \phi_i / \partial z \quad (1)$$

ここで、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は、水平方向の微分演算子である。また、 z を鉛直方向上向きを正の向きとする軸とし、静水状態における第1層の上面位置を $z=0$ とする。

表面波の非線形方程式系の導出にあたり、磯部⁸⁾は、速度ポテンシャルを鉛直分布関数の重み付き級数に展開した。ここでは、各層の速度ポテンシャル ϕ_i を次式のように z のべき級数に展開する。

$$\phi_i(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \{f_{i,\alpha}(\mathbf{x}, t) \cdot z^\alpha\} \equiv f_{i,\alpha} z^\alpha \quad (2)$$

ここで、 N は、展開項数であり、また、 $f_{i,\alpha}$ は、展開項の重み係数である。なお、添え字 α に関して、積の総和規約を用いている。

変分原理を適用することにより、多層流体の非線形表面波・内部波方程式系が次式のように得られる⁴⁾。

図-1 多層流体モデル

$$\begin{aligned} \eta_{i,1}^\alpha \frac{\partial \eta_{i,1}}{\partial t} - \eta_{i,0}^\alpha \frac{\partial \eta_{i,0}}{\partial t} \\ + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \nabla \{ (\eta_{i,1}^{\alpha+\beta+1} - \eta_{i,0}^{\alpha+\beta+1}) \nabla f_{i,\beta} \} \\ - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - 1} (\eta_{i,1}^{\alpha+\beta-1} - \eta_{i,0}^{\alpha+\beta-1}) f_{i,\beta} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \eta_{i,j}^\beta \frac{\partial f_{i,\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta_{i,j}^{\beta+\gamma} \nabla f_{i,\beta} \nabla f_{i,\gamma} + \frac{1}{2} \beta \gamma \eta_{i,j}^{\beta+\gamma-2} f_{i,\beta} f_{i,\gamma} \\ + g \eta_{i,j} + \frac{p_{i,j} + P_i}{\rho_i} = 0 \quad (j = 0 \text{ or } 1) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 η_{i0} 、 η_{i1} 、 p_{i0} 及び p_{i1} は、それぞれ、第 i 層の下面位置、上面位置、下面における圧力及び上面における圧力であり、 $P_i = \sum_{k=1}^{i-1} (\rho_i - \rho_k) g h_k$ である。また、添え字 α 、 β 及び γ に関して、積の総和規約を用いている。なお、例えば、式(3)の左辺第1項の α は、 η_{i1} の添え字でなく冪を表わす。

(2) 表面波の非線形方程式系

自由水面を有する1層問題に対しては、式(3)及び(4)において、 $i=1$ 及び $j=1$ とし、大気圧をゼロとして、次式のような非線形表面波方程式系が得られる。

$$\begin{aligned} \zeta^\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \nabla \{ (\zeta^{\alpha+\beta+1} - b^{\alpha+\beta+1}) \nabla f_\beta \} \\ - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - 1} (\zeta^{\alpha+\beta-1} - b^{\alpha+\beta-1}) f_\beta = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\zeta^\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial t} + \frac{1}{2} \zeta^{\beta+\gamma} \nabla f_\beta \nabla f_\gamma + \frac{1}{2} \beta \gamma \zeta^{\beta+\gamma-2} f_\beta f_\gamma + g \zeta = 0 \quad (6)$$

ここで、 $z = \eta_{1,1} = \zeta(\mathbf{x}, t)$ 及び $z = \eta_{1,0} = b(\mathbf{x})$ は、それぞれ、水面変動及び底面位置である。

(3) 内部波の非線形方程式系

固定された水平板で最上面が覆われた2層問題に対しては、界面変動を $\eta(\mathbf{x}, t)$ で表わし、式(3)及び(4)において、 $\eta_{1,1} = 0$ 、 $\eta_{1,0} = \eta_{2,1} = \eta(\mathbf{x}, t)$ 及び $\eta_{2,0} = b(\mathbf{x})$ として、次式のような非線形内部波方程式系が得られる。

[上層] ($i=1, j=0$)

$$\eta^\alpha \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \nabla \left(\eta^{\alpha+\beta+1} \nabla f_{1,\beta} \right) - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - 1} \eta^{\alpha+\beta-1} f_{1,\beta} = 0 \quad (7)$$

$$\eta^\beta \frac{\partial f_{1,\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta+\gamma} \nabla f_{1,\beta} \nabla f_{1,\gamma} + \frac{1}{2} \beta \gamma \eta^{\beta+\gamma-2} f_{1,\beta} f_{1,\gamma} + g \eta + \frac{p_{1,0}}{\rho_1} = 0 \quad (8)$$

[下層] ($i=2, j=1$)

$$\eta^\alpha \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \nabla \left\{ \left(\eta^{\alpha+\beta+1} - b^{\alpha+\beta+1} \right) \nabla f_{2,\beta} \right\} - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - 1} \left(\eta^{\alpha+\beta-1} - b^{\alpha+\beta-1} \right) f_{2,\beta} = 0 \quad (9)$$

$$\eta^\beta \frac{\partial f_{2,\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta+\gamma} \nabla f_{2,\beta} \nabla f_{2,\gamma} + \frac{1}{2} \beta \gamma \eta^{\beta+\gamma-2} f_{2,\beta} f_{2,\gamma} + g \eta + \frac{1}{\rho_2} \{ p_{2,1} + (\rho_2 - \rho_1) g h_1 \} = 0 \quad (10)$$

式(8)及び(10)において、 $p_{10}=p_{21}$ であるから、界面における圧力を消去して次式が得られる。

$$\eta^\beta \frac{\partial f_{2,\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta+\gamma} \nabla f_{2,\beta} \nabla f_{2,\gamma} + \frac{1}{2} \beta \gamma \eta^{\beta+\gamma-2} f_{2,\beta} f_{2,\gamma} + g(\eta + h_1) - \frac{\rho_1}{\rho_2} \left\{ \eta^\beta \frac{\partial f_{1,\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta+\gamma} \nabla f_{1,\beta} \nabla f_{1,\gamma} + \frac{1}{2} \beta \gamma \eta^{\beta+\gamma-2} f_{1,\beta} f_{1,\gamma} + g(\eta + h_1) \right\} = 0 \quad (11)$$

3. 孤立波の数値解の算出手法

(1) 定常進行波の非線形方程式系

一定の波速 C で x 軸方向に伝播する定常進行波に対しては、 $\partial F / \partial t = -C \partial F / \partial x$ なる移流方程式が成り立つ。この移流方程式を上記の非線形波動方程式系に代入すると、時間微分項が消去される。ここで、物理量 F は、水面変動 ζ 、界面変動 η 、そして、式(2)に示す速度ポテンシャルの展開項の重み係数 $f_{i,\alpha}$ である。例えば、移流方程式を非線形表面波方程式系である式(5)及び(6)に代入することにより、時間微分項が消去された次式が得られる。

$$-C \zeta^\alpha \nabla \zeta + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \nabla \left\{ \left(\zeta^{\alpha+\beta+1} - b^{\alpha+\beta+1} \right) \nabla f_\beta \right\} - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - 1} \left(\zeta^{\alpha+\beta-1} - b^{\alpha+\beta-1} \right) f_\beta = 0 \quad (12)$$

$$-C \zeta^\beta \nabla f_\beta + \frac{1}{2} \zeta^{\beta+\gamma} \nabla f_\beta \nabla f_\gamma + \frac{1}{2} \beta \gamma \zeta^{\beta+\gamma-2} f_\beta f_\gamma + g \zeta = 0 \quad (13)$$

式(12)及び(13)は、波速 C で進行する定常表面波に対する非線形方程式系である。

(2) 孤立波の数値解の算出手法

本研究では、山下・柿沼⁹⁾の手法により、波動方程式系の孤立波解を数値的に求める。その際に、水面変動、界面変動及び流速が、水平方向の遠方において、ゼロに漸近することを考慮する。そのために、計算対象領域を十分に長くとり、その側方境界の外側に設けた仮想領域において、物理量 F の水平方向の勾配がゼロであると仮定する。すなわち、添え字を計算格子点の番号として、 $F_0=F_1$ 、かつ、 $F_{n+1}=F_n$ とする。ここで、番号が1及び n の格子点は、側方境界に位置する点であり、また、番号が0及び $(n+1)$ の格子点は、側方境界に隣接する仮想点である。そして、移流項を含めた各項の離散化に、中央差分を用いる。これは、計算精度の向上を図るためである。例えば、番号が1の格子点における $\partial F / \partial x$ は、差分方程式系において $(F_2 - F_0) / (2\Delta x) = (F_2 - F_1) / (2\Delta x)$ と表わす。ここで、 Δx は、格子間隔である。

このような側方境界条件のもとで、Newton-Raphson 法を適用して収束解を算定する。例として、式(12)及び(13)の表面孤立波解を求める手法を述べる。式(12)及び(13)を付録Aに示す差分方程式系に書き改め、次の(0)～(4)の手順により収束解を求める。

- (0) 表面孤立波の KdV 理論解、すなわち、水面変動 ζ_{KdV} 、波速 C_{KdV} 及び速度ポテンシャルの重み係数 $f_{a,\text{KdV}}$ を求める。その際に、できる限り小さな値の水面変動 ζ_{KdV} と波速 C_{KdV} を求める。
- (1) 水面変動及び重み係数の初期値をそれぞれ ζ_{KdV} 及び $f_{a,\text{KdV}}$ として、Newton-Raphson 法により、式(12)及び(13)を解く。ここで、波速 C を $C_1 = C_{\text{KdV}}$ とする。そして、波速が C_1 である孤立波に対する水面変動及び重み係数の解 ζ_1 及び $f_{a,1}$ を得る。
- (2) 水面変動及び重み係数の初期値をそれぞれ ζ_1 及び $f_{a,1}$ として、Newton-Raphson 法により、式(12)及び(13)を解く。ここで、波速 C を $C_2 = C_1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) とする。そして、波速が C_1 より ε だけ大きな孤立波に対する水面変動及び重み係数の解 ζ_2 及び $f_{a,2}$ を得る。
- (3) ζ_2 、 $f_{a,2}$ 及び C_2 の値をそれぞれ ζ_1 、 $f_{a,1}$ 及び C_1 に代入する。
- (4) 波速 C を ε ずつ段階的に大きく設定していき、その都度(2)及び(3)を順に繰り返して、任意の波速 C を有する孤立波に対する水面変動及び重み係数の解 ζ

及び f_a を順次求めていく。

上述した通り, (0) では, できる限り小さな値の水面変動と波速を求めるが, これは, 真値に近い KdV 理論解を得るためである。Newton-Raphson 法の適用において, 真値に近い初期値を用いた場合に, 比較的少ない回数の収束計算によって収束解が得られる。なお, KdV 理論解の速度ポテンシャル ϕ_{KdV} に対する重み係数 $f_{a,KdV}$ は, 式(12) に, KdV 理論解の ζ_{KdV} 及び C_{KdV} を代入することによって求められる。その際に, ζ_{KdV} 及び C_{KdV} が代入された式(12) は, 質量保存則を表わす線形方程式となる。

また, 上記の (2) では, 収束解を得るために, ε/C_1 を十分に小さな値とする必要がある。本研究で実施した計算では, ε/C_1 を $10^{-5} \sim 10^{-3}$ の値として, Newton-Raphson 法により解を得ることができた。

ここでは, 表面孤立波解を求める手法を述べたが, 内部波方程式系である式(7), (9) 及び (11) の孤立波解を求める手順も同様である。本手法は, Boussinesq 型方程式系といった他の波動方程式系に対しても, 適用できると期待される。

4. 表面孤立波解の特性

(1) 表面孤立波の水面形

図-2 に示すような, 静水深 h が一様である水域を対象とし, 前述の手法を適用して表面孤立波解を求める。ここで, x 軸方向に広がる計算対象領域の全長及び計算格子間隔をそれぞれ $L=50.0h$ 及び $\Delta x=0.02h$ とする。

図-3 に, 表面孤立波の水面形の数値解を示す。ここで, 横軸及び縦軸は, 波頂位置からの水平距離及び静水位を基準とした水面変動をそれぞれ静水深 h で無次元化した値である。また, a は, 波高である。そして, 式(2) のようにべき級数に展開した速度ポテンシャルの展開項数を $N=3$, または, 4 としている。なお, $N=5$ とした方程式系に対して, $N=4$ とした方程式系に対する場合と, ほぼ等しい水面変動が得られることを確認した。

図-3(a) が示す通り, 波高静水深比が $a/h \leq 0.60$ である場合, $N=3$ 及び 4 とした方程式系に対して, 水面形の数値解に差が殆ど見られない。また, これらの数値解と KdV 理論解とを比較すると, 図-3(a) に示す $a/h=0.1$ の場合には, 差が殆ど見られないが, a/h が大きくなるにつれて, KdV 理論解との差が徐々に大きくなっている。これは, KdV 理論が, $O((a/h)^2)$ を無視して導かれた弱非線形理論だからである。

図-3(b) には, $N=3$ 及び 4 とした各方程式系に対して, 本手法で得ることができた, 最も波高の大きな水面形が示されている。ここで, $N=3$ としたときの波高静水深比は, $a/h=0.72$ であり, また, $N=4$ としたときの波高

図-2 表面孤立波

(a) $a/h=0.10$ (黒), 0.30 (青), 0.51 (橙) 及び 0.60 (赤)

(b) $a/h=0.72$ (黒) 及び 0.77 (赤)

図-3 波高静水深比 a/h の各値に対する表面孤立波の水面形

静水深比は, $a/h=0.77$ である。比較のために, $a/h=0.72$ の場合の, $N=4$ としたときの水面形も示している。ここで, $N=3$ とした方程式系に対しては, $a/h=0.77$ の場合の数値解を得ることができなかった。これは, $N=3$ では, 4.(3) で述べるように, 流速の鉛直分布を正確に表現することができないためであると考えられる。

図-4 に, 相対代表波長 λ_s/h と波高静水深比 a/h の関係を示す。ここで, 代表波長 λ_s は, 次式で定義する。

$$\lambda_s = \int_{-L/2}^{L/2} \zeta dx / a \quad (14)$$

図-4 が示すように, $N=3, 4$ 及び 5 としたときの相対代表波長の数値解には, 差が殆ど見られない。そして, これらの数値解は, a/h の値が大きな大振幅の場合を除いて, KdV 理論解よりも大きい。

図-5 に, 表面孤立波の水面形の尖度 κ を示す。KdV 理論解は, 波高静水深比 a/h によらず約 4.2 で一定であるが, 数値解は, a/h と正の相関を示す。なお, $N=4$ 及び 5 とした数値解には, 差が殆ど見られないが, $N=3$ とし

 図4 表面孤立波の相対代表波長 λ_s/h

 図5 表面孤立波の水面形の尖度 κ

た数値解は, $a/h > 0.68$ で過大となっている。

(2) 表面孤立波の波速

図-6 に, 表面孤立波の相対波速 C/C_{s0} を示す。ここで, C 及び C_{s0} は, それぞれ, 表面孤立波の波速及び線形表面浅水波の波速 $\sqrt{gh}$ である。 $N=3$ とした方程式系の数値解は, 前述の通り, a/h の値が 0.72 までの場合しか求められていないが, $N=4$ 及び 5 とした数値解との差は, 僅かである。他方, KdV 理論解は, a/h が大きい場合, 過大となることがわかる。

また, 図-6 のプロットは, Longuet-Higgins・Fenton¹⁾ による相対波速の理論解を示す。 $N=4$ 及び 5 とした数値解は, $a/h \leq 0.77$ において, Longuet-Higgins・Fenton¹⁾ の理論解とほぼ一致している。そして, これらの相対波速の最大値は, $a/h = 0.77$ の場合の $C/C_{s0} = 1.291$ である。ただし, 本手法では, 現時点において, $a/h > 0.77$ の場合の数値解が得られていない。図-6 が示すように, Longuet-Higgins・Fenton¹⁾ の理論解は, $a/h = 0.77$ で極大値をとる。すなわち, $a/h > 0.77$ の場合の波速の値に対しては, 波高 a の異なる 2 通りの孤立波が存在可能である。そのため, 波速を段階的に大きくしていき, 各波速に対応する収束解を求めていく本研究の手順では, $a/h > 0.77$ の場合の解を求めることができなかった。 $a/h > 0.77$ の場合の孤立波解を求めるためには, 本手法に対して何らかの工夫が必要である。

 図6 表面孤立波の相対波速 C/C_{s0} (C_{s0} は, 線形表面浅水波の波速である。)

 図7 表面孤立波の波頂位置における相対水平方向流速 ($u_{crest,s}$, $u_{crest,b}$ 及び $u_{crest,m}$ は, それぞれ, 波頂位置の水平方向流速 u_{crest} の水面における値, 底面における値及び鉛直平均値である。 C_{s0} は, 線形表面浅水波の波速である。)

(3) 表面孤立波の水平方向流速

図-7 に, 表面孤立波の波頂位置における相対水平方向流速 u_{crest}/C_{s0} の幾つかの値を示す。ここで, u_{crest} は, 波頂位置 $x/h = 0.0$ における水粒子の水平方向流速であり, $u_{crest,s}$ 及び $u_{crest,b}$ は, それぞれ, 水面及び底面における u_{crest} の値である。また, $u_{crest,m}$ は, 次式で定義される, u_{crest} の鉛直平均値である。

$$u_{crest,m} = \frac{1}{a+h} \int_{-h}^{\zeta} u_{crest} dz \quad (15)$$

図-7 より, 波高静水深比 a/h が大きいほど, u_{crest} の値は, 水面と底面で差が大きくなり, $a/h = 0.77$ の場合, 水面の値は, 底面の値の約 2.2 倍に達している。

また, 図-8 に, u_{crest} の鉛直分布を示す。ここで, 波高静水深比 a/h が 0.51, 0.60, 0.65, 0.72 及び 0.77 の場合の数値解を示している。 a/h が大きくなるにつれて, $N=4$ 及び 5 とした数値解と, $N=3$ とした数値解の差が徐々に大きくなり, $a/h = 0.72$ の場合には, $(\zeta+h)/(a+h) = 0.25$ の高さ付近でその差が顕著に現れている。特に, $a/h = 0.72$ の場合, $N=3$ とした数値解は, 底面における $u_{crest,b}$ の値が, u_{crest} の最小値となっていない。このように, 波高静水深比が大きな場合, $N=3$ とした方程式系では, 速度ポテンシャルの鉛直分布が正確に表現できないため,

図-8 表面孤立波の波頂位置における水平方向流速の鉛直分布 ($u_{\text{crest},b}$ は、波頂位置の水平方向流速 u_{crest} の底面における値である。)

図-9 表面孤立波の単位幅当たりの位置エネルギーの無次元量 $E_{s,p}$ 及び単位幅当たりの運動エネルギーの無次元量 $E_{s,k}$

4. (1) で述べたように、水面形の精度も低下する。

(4) 表面孤立波のエネルギー

流体の密度を ρ 、速度ポテンシャルを ϕ とし、表面孤立波の単位幅当たりの、位置エネルギーの無次元量 $E_{s,p}$ 及び運動エネルギーの無次元量 $E_{s,k}$ を次式で定義する。

$$E_{s,p} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{\zeta} \rho g z \, dz \, dx / (\rho g h^3) \quad (16)$$

$$E_{s,k} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h}^{\zeta} \frac{1}{2} \rho \left\{ (\nabla \phi)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \, dx / (\rho g h^3) \quad (17)$$

図-9 に、 $E_{s,p}$ 及び $E_{s,k}$ を示す。 $a/h \leq 0.77$ において、 $N=4$ 及び 5 とした数値解には、Longuet-Higgins・Fenton⁹⁾ の理論解との差が殆ど見られない。

ところで、線形波では、運動エネルギーと位置エネルギーが等しい。従って、両者の差が大きい波ほど、エネルギーの意味では、線形波から遠い性質、すなわち、強い非線形性を有すると考えられる。そこで、図-10 に、

図-10 表面孤立波の運動エネルギーと位置エネルギーの差の全エネルギーに対する比

図-11 内部孤立波

表面孤立波の運動エネルギーと位置エネルギーの差の、全エネルギーに対する比を示す。このエネルギー比は、波高静水深比が $a/h < 0.77$ の場合、 a/h と正の相関を示す。すなわち、 $a/h \leq 0.77$ の場合、波高静水深比が大きな表面孤立波ほど、全エネルギーに占める運動エネルギーの割合が大きく、エネルギーの意味で、より強い非線形性を有すると言える。

5. 内部孤立波解の特性

(1) 内部孤立波の界面形

図-11 に示すような、固定水平板で挟まれた 2 層流体を対象とする。ここでは、一部の解析を除き、上層と下層の密度比を $\rho_1/\rho_2 = 0.98$ とする。また、全水深を h とし、上層の層厚 h_1 を $0.4h$, $0.3h$, $0.2h$, $0.1h$, または、 $0.05h$ とする。そして、これらの各場合に対して、 x 軸方向に広がる計算対象領域の全長 L をそれぞれ $70.0h$, $30.0h$, $25.0h$, $20.0h$ 及び $15.0h$ とし、計算格子間隔 Δx をそれぞれ $0.01h$, $0.01h$, $0.005h$, $0.01h$ 及び $0.005h$ とする。表面孤立波の場合と同様の手法により、式(7)、(9) 及び (11) の内部孤立波解を求める。

図-12(a)~(e) に、 $N=3$ とした方程式系に対する、内部孤立波の界面形の数値解を示す。横軸は、界面変動が極小値をとる位置からの水平距離を全水深 h で無次元化した値であり、他方、縦軸は、静水時の界面位置を基準とした界面変動 $(\eta + h_1)$ を上層厚 h_1 で無次元化した値である。また、図-12(f) には、上層厚全水深比 h_1/h の各値に対して得られた数値解のうち、最大波高の大振幅内部波

の界面形を比較のために同スケールの横軸上に示した。更に、図-12(f)には、参考のために、界面形が上に凸である $h_1/h=0.8$ の場合、すなわち、 $h_2/h=0.2$ の場合に得られた最大波高の大振幅内部波の界面形も示している。

なお、図-12には、KdV 理論解、並びに、Choi・Camassa⁹⁾による理論解も描かれている。このうち、本論文に示す Choi・Camassa⁹⁾による理論解は、波長を λ として、 $O(k\lambda/h)=1$ 、 $O(h_1/\lambda) \ll 1$ 及び $O(h_2/\lambda) \ll 1$ を仮定し、 $O((h_1/\lambda)^4)$ 及び $O((h_2/\lambda)^4)$ を無視して得られた、相対的に浅い条件に対する shallower version の解であり、これを付録 B に記す。

図-12 に示す、 $N=3$ とした数値解及び Choi・Camassa⁹⁾の理論解より、波高上層厚比が大きな内部孤立波は、界面変動が極小値をとる位置付近で、界面形が平らになることが確認できる。そして、この扁平化は、図-12(f)に示すように、 $h_1/h=0.4$ の場合に最も顕著に現れている。すなわち、界面形の扁平化は、静水時の界面が critical level に近いほど顕著となる。ここで、critical level は、安定した内部孤立波の界面が、超えられない高さである。内部孤立波の最大波高は、次式の critical level z_c と静水時の界面の高さの差を超えることができない⁹⁾。

$$z_c = -h / (1 + \sqrt{\rho_2 / \rho_1}) \quad (18)$$

式(18)より、 h_1/h が 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 及び 0.05 の場合、それぞれ、 $(z_c + h_1)/h_1$ の値が -0.243, -0.658, -1.488, -3.975 及び -8.950 となる。なお、KdV 理論解では、界面形が扁平化する特性を表現できないことが、図-12において確かめられる。

また、数値解と Choi・Camassa⁹⁾の理論解を比較すると、図-12(a) 及び (b) では、両者の一致度が高い。これに対して、図-12(d) 及び (e) では、両者の差が比較的大きい。

ところで、図-13 に示すように、Grue^ら⁷⁾は、Euler 方程式系を数値解析的に解くことにより、内部孤立波の相対代表波長を算出している。ここで、 a は、内部孤立波の波高であり、代表波長 λ_1 は、次式で定義する。

$$\lambda_1 = \int_{-L/2}^{L/2} (\eta + h_1) dx / a \quad (19)$$

図-13 に示す場合において、上・下層の密度比は、 $\rho_1/\rho_2=0.63$ である。また、上層厚全水深比は、 $h_2/h=0.164$ であり、従って、対象としている内部孤立波の界面形は、上に凸である。図-13 より、数値解は、Grue^ら⁷⁾の数値解析解とほぼ一致している。すなわち、内部孤立波に対しては、表面孤立波の場合と異なり、 $N=3$ とした方程式系の数値解の精度が高いと言える。一方、Choi・Camassa⁹⁾の理論解は、波高下層厚比 a/h_2 が中程度の場合に、Grue^ら⁷⁾の数値解析解との差が大きくなっている。ここでは、上記の通り、 $h_2/h=0.164$ であり、界面形が上

図-12 上層厚全水深比 h_1/h 及び波高全水深比 a/h の各値に対する内部孤立波の界面形

に凸の内部波を対象としているが、この条件は、図-12

図-13 内部孤立波の相対代表半波長 $0.5\lambda_i/h_2$ (上・下層の密度比 ρ_1/ρ_2 は, 0.63 であり, 下層厚全水深比 h_2/h は, 0.164 である.)

に示した界面形が下に凸の内部波に対しては, h_1/h の値が 0.164 程度の場合, すなわち, 図-12(c) ~ (d) に位置する条件である. 図-12(c) では, 波高上層厚比 $|a|/h_1$ が中程度であるとき, 数値解と Choi・Camassa⁹⁾ の理論解の差が現れ始めており, 更に h_1/h を小さくしていくと, すなわち, h_2/h を大きくしていくと, その差は, 大きくなっていく. これは, Choi・Camassa⁹⁾ の理論解が, $O(|a|/h) = 1$, $O(h_1/\lambda) \ll 1$ 及び $O(h_2/\lambda) \ll 1$ を仮定した摂動法により導かれたため, h_2/h が大きい場合, $O(h_2/\lambda) \ll 1$ を満たすように λ/h が大きくなるからである. 従って, 図-13 において, Choi・Camassa⁹⁾ による相対代表波長の理論解は, a/h_2 が中程度の場合に, Grue ら⁷⁾ の数値解析解と比較して大きくなっている. これに対して, 式(7), (9) 及び (11) の導出では, $O(h_1/\lambda) \ll 1$ 及び $O(h_2/\lambda) \ll 1$ を仮定していない. こうした, 数値解と Choi・Camassa⁹⁾ の理論解の仮定の違いが, 図-12(d) 及び (e) で, 顕著に現れた.

以上のように, $N = 3$ とした方程式系の, 界面形に対する数値解は, 小振幅及び大振幅の内部孤立波に対して Choi・Camassa⁹⁾ の理論解と調和的であり, また, 波高層厚比が中程度の場合を含めて Grue ら⁷⁾ の数値解析解との一致度が高い. ただし, Choi・Camassa⁹⁾ は, 2 層のうちの 1 層が相対的に深い条件に対する deeper version の解も導出しており, 今後, この理論解等と比較しながら, $N \geq 4$ とした方程式系の数値解の性質も調べる必要がある.

以下の議論では, 再び, 上・下層の密度比を $\rho_1/\rho_2 = 0.98$ とする. 図-14 に, 上層厚全水深比が異なる各場合の相対代表波長 λ_i/h を示す. KdV 理論解では, $O(|a|/h) \ll 1$, $O(h_1/\lambda) \ll 1$ 及び $O(h_2/\lambda) \ll 1$ であり, 更に, $O(|a|/h) = O((h_1/\lambda)^2) = O((h_2/\lambda)^2)$ が仮定されているため, λ_i/h は, 波高上層厚比 $|a|/h_1$ が大きくなるにつれて単調に減少する. これに対し, 数値解及び Choi・Camassa⁹⁾ の理論解では, $O(|a|/h) = O((h_1/\lambda)^2) = O((h_2/\lambda)^2)$ が仮定されておらず, ここで対象としている場合には, λ_i/h が極値を持つ.

図-14 内部孤立波の相対代表波長 λ_i/h

また, 上層厚全水深比 h_1/h が大きい場合には, 数値解と Choi・Camassa⁹⁾ の理論解に, 差が殆ど認められない. しかしながら, h_1/h が小さい場合には, 図-14(d) 及び (e) が示すように, $|a|/h_1$ の値が中程度であるとき, 数値解と Choi・Camassa⁹⁾ の理論解の差が大きくなる. これは, $|a|/h_1$ の値が中程度であるとき, 図-14(d) 及び (e) より,

h/λ_1 の値が大きくなり、 $O(h_1/\lambda) \ll 1$ 及び $O(h_2/\lambda) \ll 1$ を仮定した Choi・Camassa⁹ の理論解と、この仮定を課さない数値解との差が大きくなるからである。

図-15 に、内部孤立波の界面形の尖度 κ の数値解を示す。表面孤立波の場合と同様、KdV 理論解は、波高上層厚比 $|a|/h_1$ によらず約 4.2 で一定である。これに対して、数値解と Choi・Camassa⁹ の理論解は、 $|a|/h_1$ に依存し、小振幅孤立波では、約 4.2 であるが、大振幅孤立波では、2.0 に近づく。

また、上層厚全水深比 h_1/h が比較的大きな図-15(a) の場合、数値解と Choi・Camassa⁹ の理論解が殆ど一致している。ところが、 h_1/h が小さい場合、 $|a|/h_1$ の値が中程度であるとき、数値解と Choi・Camassa⁹ の理論解の差が大きくなり、数値解の方が Choi・Camassa⁹ の理論解より大きい。そして、図-15(d) では、数値解に、また、図-15(e) では、数値解と Choi・Camassa⁹ の理論解の両者に、明瞭な極大値が現れている。

(2) 内部孤立波の波速

図-16 に、内部孤立波の相対波速 C/C_{i0} の数値解を示す。ここで、 $C_{i0} = \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)gh_1h_2/(\rho_2h_1 + \rho_1h_2)}$ は、線形内部浅水波の波速である。KdV 理論解は、 $|a|/h_1$ が小さい場合を除いて、波速を過大評価している。また、数値解と Choi・Camassa⁹ の理論解の差は、上層厚全水深比が小さい $h_1/h = 0.05$ の場合に、前述した界面形の尖度と同様、 $|a|/h_1$ が中程度の値であるとき、比較的大きくなっている。

最大波高 $a_{\max} > 0$ を有する内部孤立波の波速 $C_{\max}$ の理論値は、次式で与えられる²⁾。

$$C_{\max}^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)gh_1h_2'}{\rho_2h_1' + \rho_1h_2'} \quad (20)$$

$$h_1' = h_1 + a_{\max} \quad \text{and} \quad h_2' = h_2 - a_{\max} \quad (h_1 < h_2) \quad (21)$$

$$a_{\max} = \frac{h_2\rho_1^{1/2} - h_1\rho_2^{1/2}}{\rho_1^{1/2} + \rho_2^{1/2}} \quad (22)$$

ここで、式(22) で定義される内部孤立波の最大波高 $a_{\max}$ は、式(18) の critical level z_c と、静水時の界面の高さの差である。図-16 中の*は、式(20) ~ (22) で算出される最大波速の相対値 $C_{\max}/C_{i0}$ を $a_{\max}/h_1$ の値に対して示している。 C/C_{i0} の数値解及び Choi・Camassa⁹ の理論解は、 $|a|/h_1$ が大きくなるにつれて、いずれも $C_{\max}/C_{i0}$ に漸近する。

(3) 内部孤立波の水平方向流速

内部孤立波の界面変動が極小値をとる位置における、水平方向流速を u で表わす。図-17 に、 u の相対値の鉛直分布を示す。ここで、 $h_1/h = 0.195$ 及び $\rho_1/\rho_2 = 0.98$ であり、 $|a|/h_1$ の値は、0.36、または、1.35 である。数値解は、Grue^ら¹⁰⁾ の実験値とよく一致している。

図-15 内部孤立波の界面形の尖度 κ

図-18 に、上層における、 u の二つの値の差の相対値を示す。ここで、 $u_{1,\max}$ 及び u_{1b} は、それぞれ、上層内の u の、界面における値及び最上面の固定水平板における値である。このうち、 $u_{1,\max}$ は、上層内の水平方向流速

図-16 内部孤立波の相対波速 $C/C_{i,0}$ ($C_{i,0}$ は、線形内部浅水波の波速である。また、*の座標は、 $(a_{\max}/h_1, C_{\max}/C_{i,0})$ であり、 $a_{\max}$ 及び $C_{\max}$ は、式(20)～(22)より算出される。)

の最大値である。また、 $a_{\max}$ は、式(22)で与えられる、内部孤立波がとり得る波高の最大値である。図-18より、波高最大波高比 $|a|/a_{\max}$ が中程度の場合に、 $(u_{1,\max} - u_{1,b})/u_{1,\max}$ が大きくなることわかる。これは、 $|a|/a_{\max}$ が中程度の内部孤立波は、分散性が強いことを示している。ま

図-17 内部孤立波の界面変動が極小値をとる位置における水平方向流速 u の相対値の鉛直分布 ($h_1/h = 0.195$, $\rho_1/\rho_2 = 0.98$ であり、 $C_{i,0}$ は、線形内部浅水波の波速である。)

図-18 界面変動が極小値をとる位置の上層内の水平方向流速の界面における値 $u_{1,\max}$ と最上面における値 $u_{1,b}$ の差の相対値 ($a_{\max}$ は、式(22)で定義される最大波高である。)

図-19 界面変動が極小値をとる位置の下層内の水平方向流速の界面における値 $u_{2,\min}$ と底面における値 $u_{2,b}$ の差の相対値 ($a_{\max}$ は、式(22)で定義される最大波高である。)

た、 h_1/h が小さい場合ほど、 $(u_{1,\max} - u_{1,b})/u_{1,\max}$ の最大値が大きくなり、その最大値が現れる $|a|/a_{\max}$ の値が小さくなる。ただし、小振幅及び大振幅の内部孤立波では、 $u_{1,\max}$ と $u_{1,b}$ の差は、ゼロに近づく。

図-19に、下層における、 u の二つの値の差の相対値を示す。ここで、 $u_{2,\min}$ 及び $u_{2,b}$ は、それぞれ、下層内の u の、界面及び底面における値である。このうち、 $u_{2,\min}$ は、負の値となる下層内の水平方向流速の最小値である。図-18に示した上層内の水平方向流速と同様、 $|a|/a_{\max}$ が

図-20 内部孤立波の単位幅当たりの位置エネルギーの無次元量 $E_{i,P}$ 及び単位幅当たりの運動エネルギーの無次元量 $E_{i,K}$

中程度の場合に、 $(u_{2,min} - u_{2,b})/u_{2,min}$ が大きい。また、 h_1/h が小さい場合ほど、 $(u_{2,min} - u_{2,b})/u_{2,min}$ の最大値が大きくなり、その最大値が現れる $|a|/a_{max}$ の値が小さくなる。ただし、小振幅及び大振幅の内部孤立波では、 $u_{2,min}$ と $u_{2,b}$ の差がゼロに近づく。

以上より、上層と下層の両者において、 $|a|/a_{max}$ の値が中程度である場合に、内部孤立波の分散性が強まるような水平方向流速の鉛直分布が現れると言える。

(4) 内部孤立波のエネルギー

内部孤立波の単位幅当たりの、位置エネルギーの無次元量 $E_{i,P}$ 及び運動エネルギーの無次元量 $E_{i,K}$ を次式で定義する。

$$E_{i,P} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) g (\eta + h_1)^2 dx \Big/ \{ (\rho_2 - \rho_1) g h^3 \} \quad (23)$$

$$E_{i,K} = \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\eta}^0 \frac{1}{2} \rho_1 \left[(\nabla \phi_1)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] dz dx + \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho_2 \left[(\nabla \phi_2)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right)^2 \right] dz dx \right\} \Big/ \{ (\rho_2 - \rho_1) g h^3 \} \quad (24)$$

図-20 に、 $E_{i,P}$ 及び $E_{i,K}$ の数値解を示す。両者とも、 $|a|/h$ が最大値に近付くにつれて、 $|a|/h$ に対する増加率が著しく増加する。これは、図-9 に示した表面孤立波の $E_{s,P}$ 及び $E_{s,K}$ と異なる。 $E_{s,P}$ 及び $E_{s,K}$ は、 a/h が大きな場合、 a/h が増加するにつれて、 a/h に対する増加率が減少する。

図-21 に、内部孤立波の運動エネルギーと位置エネルギーの差の、全エネルギーに対する比を示す。このエネルギー比、あるいは、運動エネルギーの全エネルギーに占める割合は、 $|a|/a_{max}$ が中程度の場合に大きい。線形波では、運動エネルギーと位置エネルギーが等しいから、 $|a|/a_{max}$ の値が中程度である内部孤立波は、エネルギーの意味において、非線形性が強いと言える。逆に、小振幅及び大振幅の内部孤立波は、エネルギーの意味において、

図-21 内部孤立波の運動エネルギーと位置エネルギーの差の全エネルギーに対する比 (a_{max} は、式(22)で定義される、内部孤立波の最大波高である。)

非線形性が弱い。また、エネルギー比の最大値は、 h_1/h が小さい場合ほど大きい。そして、エネルギー比が最大となる $|a|/a_{max}$ の値は、 h_1/h が小さい場合ほど小さくなる。

6. 水平床上における孤立波の1次元伝播解析

(1) 表面孤立波の伝播

6. では、静水時の全水深 h が一様な領域における、鉛直断面内の運動を対象として、水平方向軸 x の正の方向に伝播する孤立波の1次元伝播解析を行なう。すなわち、ここでは、時間発展問題を数値解析的に解く。そのための初期条件として、山下・柿沼⁹⁾の手法によって得られる孤立波の数値解を与える。速度ポテンシャルの展開項数は、 $N=3$ とし、4. 及び 5. において、 $N=3$ として高精度な数値解が得られた条件に対して数値解析を行なう。

Nakayama・Kakinuma¹¹⁾は、式(7), (8), (9) 及び (10) を基礎方程式系として、内部波の伝播問題の数値解析を行なった。ここでは、式(5) 及び (6), または、式(7), (9) 及び (11) が解けるよう、Nakayama・Kakinuma¹¹⁾ のプログラムを書き換え、表面波、または、内部波の伝播問題を対象とした時間発展の数値解析を行なう。

図-22 に、波高静水深比が $a/h = 0.66$ の場合の、表面孤立波の水面形の数値解析結果を示す。ここで、計算格子間隔及び計算時間間隔は、それぞれ、 $\Delta x = 0.1h$ 及び $\Delta t = 0.003 \Delta x / C_{s0}$ としている。 C_{s0} は、線形表面浅水波の波速である。これより、孤立波の数値解を与えることによって、助走時間を必要とすることなく、大振幅表面孤立波の伝播解析を安定的に行なえることが確認できる。ただし、 $0.0 \leq t C_{s0} / h \leq 15.7$ で、僅かな波高減衰が見られるが、これは、数値解の算出時と、波動伝播の解析時で、異なる格子間隔 Δx を用いたためであると考えられる。すなわち、前者では、 $\Delta x = 0.02h$ としているが、後者では、より大きな計算負荷を伴うため、 $\Delta x = 0.1h$ としており、両者の空間解像度の違いが波高減衰として現れた。

図-22 進行する表面孤立波の水面形の時間変化 ($ah = 0.66$ である。また、 C_{s0} は、線形表面浅水波の波速である。)

図-23 進行する内部孤立波の界面形の時間変化 ($h_1/h = 0.2$ 及び $|a|/h_1 = 1.4$ である。また、 C_{i0} は、線形内部浅水波の波速である。)

(2) 内部孤立波の伝播

上・下層の密度比及び上層厚全水深比が、それぞれ、 $\rho_1/\rho_2 = 0.98$ 及び $h_1/h = 0.2$ の 2 層問題を対象とする。計算格子間隔及び計算時間間隔は、それぞれ、 $\Delta x = 0.1h$ 及び $\Delta t = 0.018\Delta x/C_{i0}$ とする。ここで、 C_{i0} は、線形内部浅水波の波速である。

図-23 に、波高上層厚比が $|a|/h_1 = 1.4$ の内部孤立波の、界面形の数値解析結果を示す。この条件に対する内部孤立波の最大波高は、式(22) より、 $a_{\max} \approx 1.49h_1$ であるが、図-23 より、 $a_{\max}$ に近い値の波高を有する大振幅内部孤立波が、安定して伝播することがわかる。そして、この界面形は、界面変動が極小値をとる位置付近が扁平化した、台形のような形状となっている。

また、図-24 に、波高が異なる二つの内部孤立波が、同一方向に伝播する場合の、界面形の数値解析結果を示す。ここで、初期条件として与えた、二つの内部孤立波の数値解の波高上層厚比 $|a|/h_1$ は、1.4 及び 0.3 である。図-24 では、大振幅内部孤立波が、振幅の比較的小さな内部孤立波に追い付いて重合したとき、波の相互干渉により、大振幅波の波高が、増加せずに減少している。

図-25 は、図-24 に示した二つの内部孤立波の、界面変動が極小値をとる位置の時間変化を示している。実線は、2 波が図-24 に示したように干渉した場合の結果を示し、破線は、2 波がそれぞれ単独で伝播した場合の結果を示す。干渉後、大振幅内部孤立波の位相が進み、逆に、比較的小さな振幅の内部孤立波の位相が遅れている。

図-24 波高が異なる二つの内部孤立波の追い越しにおける干渉 ($h_1/h = 0.2$ であり、二つの内部波の $|a|/h_1$ の初期値は、1.4 及び 0.3 である。また、 C_{i0} は、線形内部浅水波の波速である。)

図-25 図-24 に示す界面変動が極小値をとる位置の時間変化 (実線は、2 波の干渉が生じる場合の結果を示し、破線は、干渉が生じない場合の結果を示す。また、 C_{i0} は、線形内部浅水波の波速である。)

7. 鉛直壁に衝突する内部波の 1 次元伝播解析

図-26 に示すような、完全反射の鉛直壁に衝突する内部波を対象とし、鉛直壁における波高増幅率とエネルギーの関係を調べる。鉛直壁に向かって進行する内部孤立波の数値解を初期条件として与え、6. で述べた数値解析と同様に、内部波の伝播の数値解析を行なう。なお、ここで対象とする条件は、逆向きに進行する、波高の等しい二つの内部波が、正面衝突する条件に相当する。

上・下層の密度比が $\rho_1/\rho_2 = 0.98$ の 2 層問題を対象とする。内部孤立波の初期波高を $|a|$ とし、界面変動が極小値をとる位置の初期値を $x/h = 0.0$ とする。また、鉛直壁の設置位置 $x = x_{\text{wall}}$ は、 $h_1/h = 0.4, 0.3, 0.2, 0.1$ 及び 0.05 の各場合に対して、それぞれ、 $x_{\text{wall}}/h = 25.0, 25.0, 8.0, 7.5$ 及び 4.0 とする。速度ポテンシャルの展開項数は、 $N = 3$ とする。

図-27 に、鉛直壁における波高増幅率 $|\eta_{\min} + h_1|/|a_{\text{wall}}|$ と $|a|/a_{\max}$ の関係を示す。ここで、入射した内部孤立波の界面形は、下に凸であり、 $\eta_{\min}$ は、鉛直壁における界面変動の最小値である。また、 $|a_{\text{wall}}|$ は、初期波高 $|a|$ の内部孤立波が、鉛直壁を設置しない場合に $x = x_{\text{wall}}$ の位置を通過するとき、 $x = x_{\text{wall}}$ における波高である。そして、 $a_{\max}$ は、式(22) で定義される内部孤立波の最大波高であ

図-26 鉛直壁に衝突する内部孤立波

る。なお、上層厚全水深比 h_1/h の値が 0.05 及び 0.1 である場合、波高上層厚比 $|a|/h_1$ を大きくすると、計算が発散したが、これは、衝突時の波高が、 $N=3$ とした方程式系が表わす重複波の碎波限界に至ったためである。図-27 より、 h_1/h の値がいずれの場合も、波高増幅率 $|\eta_{\min} + h_1|/|a_{\max}|$ は、 $|a|/a_{\max}$ が中程度であるときに大きい。

波のエネルギーに着目して議論するために、波高の等しい二つの内部孤立波が、逆向きに進行して正面衝突する場合を考える。衝突する前の 1 波の位置エネルギー及び運動エネルギーをそれぞれ E_p 及び E_k とする。ところで、図-21 に示したように、内部孤立波の運動エネルギーは、位置エネルギーよりも大きい。すなわち、 $E_k = E_p + \Delta E$ 、 $\Delta E > 0$ である。また、線形波の場合には、位置エネルギーと運動エネルギーが等しく、 $\Delta E = 0$ である。従って、衝突時も含めた、2 波の全エネルギー $E = 2(E_p + E_k)$ は、次式で表わされる。

$$E = 4E_p + 2\Delta E, \quad \Delta E \geq 0 \quad (25)$$

波の諸量が、重合前後で変化しないとする。2 波の界面変動 $z = \eta_0$ が極値をとる位置が重なる時刻、すなわち、2 波が完全に重合する時刻において、2 波の流速が打ち消し合い、運動エネルギーがゼロとなるならば、このとき、位置エネルギーは、全エネルギーを占める。界面変動が入射波の 2 倍となる場合、式(23)より、 $E = 4E_p$ であり、式(25)より、 $\Delta E = 0$ となるから、重合は、線形重ね合わせである。ところが、非線形重ね合わせの場合には、 $\Delta E > 0$ であるから、式(25)より、 $E > 4E_p$ となり、2 波が完全に重合する時刻の界面変動を $z = \eta$ とすると、式(23)より、 $\int_{-L/2}^{L/2} (\eta + h_1)^2 dx > \int_{-L/2}^{L/2} \{2(\eta_0 + h_1)\}^2 dx$ となり、余剰の $2\Delta E$ が界面形に対する非線形効果に寄与する。そして、 $2\Delta E/E$ が大きいほど、非線形干渉が顕著に現れる。

ところで、内部孤立波では、図-21 が示すように、 $|a|/a_{\max}$ が中程度のとき、 $2\Delta E/E$ が大きい。従って、 $|a|/a_{\max}$ が中程度のとき、上記の通り、鉛直壁における波高増幅率が大きくなり、この結果が図-27 に示されている。逆に、 $h_1/h = 0.2, 0.3$ 及び 0.4 の場合、 $|a|/a_{\max}$ がゼロ、または、1 に近いと、図-21 より、 $2\Delta E/E$ が小さく、図-27 に示す波高増幅率は、線形波の場合の値である 2.0 に近づく。なお、 $|a|/a_{\max}$ の値が等しい内部孤立波では、 h_1/h が小さい場合ほど、 $2\Delta E/E$ が大きく、波高増幅率が大きい。

図-27 鉛直壁における内部孤立波の波高増幅率 $|\eta_{\min} + h_1|/|a_{\max}|$ ($a_{\max}$ は、鉛直壁を設置しない場合、 $x = x_{\text{wall}}$ における内部孤立波の波高である。また、 $a_{\max}$ は、式(22)で定義される、内部孤立波の最大波高である。)

他方、表面孤立波の場合には、 $a/h \leq 0.77$ のとき、図-10 が示すように、波高静水深比が大きな波ほど、 $2\Delta E/E$ が大きく、従って、非線形性が強いと言える。そのため、碎波が生じない場合、入射波の波高静水深比が大きいほど、鉛直壁に衝突する表面孤立波の波高増幅率が大きくなる。例えば、Su・Mirie¹²⁾ 及び田中・松田¹³⁾ より、鉛直壁における表面孤立波の波高増幅率は、 $a/h \leq 0.5$ のとき、2.5 に満たず、 $a/h = 0.7$ のとき、約 3.3 となる。

以上より、鉛直壁への衝突では、表面波・内部波に関わらず、全エネルギーに対する運動エネルギーの割合が大きな孤立波ほど、強い非線形挙動を示すと結論される。

8. 結 論

変分原理に基づく非線形波動方程式系を基礎方程式系として、表面孤立波及び内部孤立波の数値解を求めた。得られた数値解を理論解や、Euler 方程式系の数値解析解と比較し、更に、表面孤立波及び内部孤立波が有する特性に関して、水面形や界面形、波速、水平方向流速及び波のエネルギーに着目して考察した。

まず、表面孤立波に対して、速度ポテンシャルの展開項数を 4、または、5 とした場合に、高精度の大振幅孤立波解が得られた。得られた孤立波解は、波高静水深比が大きいほど、運動エネルギーの全エネルギーに占める割合が大きいという特性を示した。

次に、内部孤立波に対して、速度ポテンシャルの展開項数を 3 とした場合に、大振幅孤立波解を得た。界面形が下に凸の内部孤立波では、波高最大波高比が中程度の場合に、運動エネルギーの全エネルギーに占める割合が大きくなり、その最大値は、上層厚全水深比が小さい場合ほど大きくなることがわかった。

更に、数値解を初期条件として与え、表面孤立波及び内部孤立波の 1 次元伝播の数値解析を行なった。そして、界面形が台形のような大振幅内部孤立波を含め、数値解が安定して伝播することが確認された。また、鉛直壁に

衝突する内部孤立波では、波高最大波高比が中程度の場合に、鉛直壁における波高増幅率が大きくなり、その最大値は、上層厚全水深比が小さい場合ほど大きくなった。すなわち、鉛直壁における波高増幅率に関しては、表面波及び内部波とも、運動エネルギーの全エネルギーに占める割合が大きい孤立波ほど、強い非線形挙動を示す。

謝辞：査読において、貴重な御意見を頂戴しました。査読者の皆様、そして、編集者に、謝意を表します。

付録 A 定常進行波を解とする非線形表面波方程式系に対する差分方程式系

定常進行表面波に対する式(12) 及び (13) に Newton-Raphson 法を適用して、それぞれ、式(A1) 及び (A2) を得る。

$$\begin{aligned} A_\alpha(\zeta = (\zeta)_{k+1}, f_\beta = (f_\beta)_{k+1}) \\ = A_\alpha(\zeta = (\zeta)_k, f_\beta = (f_\beta)_k) \\ + \left\{ \Delta\zeta \frac{\partial A_\alpha}{\partial \zeta} + \nabla(\Delta\zeta) \frac{\partial A_\alpha}{\partial (\nabla\zeta)} + \Delta f_\beta \frac{\partial A_\alpha}{\partial f_\beta} \right. \\ \left. + \nabla(\Delta f_\beta) \frac{\partial A_\alpha}{\partial (\nabla f_\beta)} \right. \\ \left. + \nabla^2(\Delta f_\beta) \frac{\partial A_\alpha}{\partial (\nabla^2 f_\beta)} \right\} \bigg|_{\zeta=(\zeta)_k, f_\beta=(f_\beta)_k} = 0 \end{aligned} \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} B(\zeta = (\zeta)_{k+1}, f_\beta = (f_\beta)_{k+1}) \\ = B(\zeta = (\zeta)_k, f_\beta = (f_\beta)_k) \\ + \left\{ \Delta\zeta \frac{\partial B}{\partial \zeta} + \Delta f_\beta \frac{\partial B}{\partial f_\beta} \right. \\ \left. + \nabla(\Delta f_\beta) \frac{\partial B}{\partial (\nabla f_\beta)} \right\} \bigg|_{\zeta=(\zeta)_k, f_\beta=(f_\beta)_k} = 0 \end{aligned} \quad (A2)$$

ここで、 k は、収束計算の反復回数である。

添え字 j を計算格子点の番号とする。また、計算精度の向上を図るために、移流項を含めた各項の離散化に中央差分を用いる。このとき、式(A1) は、次式のような差分方程式に書き換えられる。

$$\begin{aligned} -C(\zeta_j)_k^\alpha \frac{(\zeta_{j+1})_k - (\zeta_{j-1})_k}{2\Delta x} \\ + (\zeta_j)_k^{\alpha+\beta} \frac{(\zeta_{j+1})_k - (\zeta_{j-1})_k}{2\Delta x} \frac{(f_{\beta,j+1})_k - (f_{\beta,j-1})_k}{2\Delta x} \\ + \frac{1}{\alpha+\beta+1} \left\{ (\zeta_j)_k^{\alpha+\beta+1} - b^{\alpha+\beta+1} \right\} \\ \cdot \frac{(f_{\beta,j+1})_k - (2f_{\beta,j})_k + (2f_{\beta,j-1})_k}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1} \left\{ (\zeta_j)_k^{\alpha+\beta-1} - b^{\alpha+\beta-1} \right\} \\ + (\Delta\zeta)_j \left\{ -\alpha C(\zeta_j)_k^{\alpha-1} \frac{(\zeta_{j+1})_k - (\zeta_{j-1})_k}{2\Delta x} \right. \\ \left. + (\alpha+\beta)(\zeta_j)_k^{\alpha+\beta-1} \frac{(\zeta_{j+1})_k - (\zeta_{j-1})_k}{2\Delta x} \right. \\ \left. \cdot \frac{(f_{\beta,j+1})_k - (f_{\beta,j-1})_k}{2\Delta x} \right. \\ \left. + (\zeta_j)_k^{\alpha+\beta} \frac{(f_{\beta,j+1})_k - (2f_{\beta,j})_k + (2f_{\beta,j-1})_k}{\Delta x^2} \right. \\ \left. - \alpha\beta(\zeta_j)_k^{\alpha+\beta-2} (f_{\beta,j})_k \right\} \\ + \frac{(\Delta\zeta)_{j+1} - (\Delta\zeta)_{j-1}}{2\Delta x} \\ \cdot \left\{ -C(\zeta_j)_k^\alpha + (\zeta_j)_k^{\alpha+\beta} \frac{(f_{\beta,j+1})_k - (f_{\beta,j-1})_k}{2\Delta x} \right\} \\ + (\Delta f_\beta)_j \left\{ -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1} \left[(\zeta_j)_k^{\alpha+\beta-1} - b^{\alpha+\beta-1} \right] \right\} \\ + \frac{(\Delta f_\beta)_{j+1} - (\Delta f_\beta)_{j-1}}{2\Delta x} (\zeta_j)_k^{\alpha+\beta} \frac{(\zeta_{j+1})_k - (\zeta_{j-1})_k}{2\Delta x} \\ + \frac{(\Delta f_\beta)_{j+1} - 2(\Delta f_\beta)_j + (\Delta f_\beta)_{j-1}}{\Delta x^2} \\ \cdot \left\{ \frac{1}{\alpha+\beta+1} \left[(\zeta_j)_k^{\alpha+\beta+1} - b^{\alpha+\beta+1} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (A3)$$

また、式(A2) は、次式に書き換えられる。

$$\begin{aligned} -C(\zeta_j)_k^\beta \frac{(f_{\beta,j+1})_k - (f_{\beta,j-1})_k}{2\Delta x} \\ + \frac{1}{2} (\zeta_j)_k^{\beta+\gamma} \frac{(f_{\beta,j+1})_k - (f_{\beta,j-1})_k}{2\Delta x} \cdot \frac{(f_{\gamma,j+1})_k - (f_{\gamma,j-1})_k}{2\Delta x} \\ + \frac{1}{2} \beta\gamma (\zeta_j)_k^{\beta+\gamma-2} (f_{\beta,j})_k (f_{\gamma,j})_k + g(\zeta_j)_k \\ + (\Delta\zeta)_j \left\{ -\beta C(\zeta_j)_k^{\beta-1} \frac{(f_{\beta,j+1})_k - (f_{\beta,j-1})_k}{2\Delta x} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\beta+\gamma)(\zeta_j)_k^{\beta+\gamma-1} \frac{(f_{\beta,j+1})_k - (f_{\beta,j-1})_k}{2\Delta x} \right. \\ \left. \cdot \frac{(f_{\gamma,j+1})_k - (f_{\gamma,j-1})_k}{2\Delta x} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \beta\gamma(\beta+\gamma-2)(\zeta_j)_k^{\beta+\gamma-3} (f_{\beta,j})_k (f_{\gamma,j})_k + g \right\} \\ + (\Delta f_\beta)_j \left\{ \beta\gamma(\zeta_j)_k^{\beta+\gamma-2} (f_{\gamma,j})_k \right\} \\ + \frac{(\Delta f_\beta)_{j+1} - (\Delta f_\beta)_{j-1}}{2\Delta x} \\ \cdot \left\{ -C(\zeta_j)_k^\beta + (\zeta_j)_k^{\beta+\gamma} \frac{(f_{\gamma,j+1})_k - (f_{\gamma,j-1})_k}{2\Delta x} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (A4)$$

式(A3) 及び (A4) を解き、 $\Delta\zeta$ 及び Δf_β を求める。

付録 B 相対的に浅い条件に対する内部孤立波解⁶⁾

Choi・Camassa⁶⁾ は、表面波に対する Green・Naghdi 方程式¹⁴⁾ を拡張して、相対的に浅い条件下の 2 層流体に対する内部孤立波解を得た。Choi・Camassa⁶⁾ による shallow version の、界面の空間勾配 $\partial\eta/\partial x$ 及び波速 C の理論解を以下に示す。

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 = \left\{ \frac{3g(\rho_2 - \rho_1)}{C^2(\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2)} \right\} \frac{\eta^2(\eta - a_-)(\eta - a_+)}{(\eta - a_*)} \quad (\text{B1})$$

$$\frac{C^2}{C_{i,0}^2} = \frac{(h_1 - a)(h_2 + a)}{h_1 h_2 - (C_{i,0}^2/g)a} \quad (\text{B2})$$

$$a_* = -\frac{h_1 h_2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2} \quad (\text{B3})$$

$$a_{\pm} = -\frac{1}{2} q_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} q_1^2 - q_2} \quad (\text{B4})$$

$$q_1 = -\frac{C^2}{g} - h_1 + h_2 \quad (\text{B5})$$

$$q_2 = h_1 h_2 \left(\frac{C^2}{C_{i,0}^2} - 1 \right) \quad (\text{B6})$$

$$C_{i,0}^2 = \frac{g h_1 h_2 (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} \quad (\text{B7})$$

参考文献

- 1) Longuet-Higgins, M. S. and Fenton, J. D.: On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, Vol. 340, pp. 471-493, 1974.
- 2) Stanton, T. P. and Ostrovsky, L. A.: Observations of highly nonlinear internal solitons over the continental shelf, *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 25, pp. 2695-2698, 1998.
- 3) Duda, T. F., Lynch, J. F., Irish, J. D., Beardsley, R. C., Ramp, S. R., Chiu, C.-S., Tang, T. Y. and Yang, Y.-J.: Internal tide and nonlinear internal wave behavior at the continental slope in the northern South China Sea, *IEEE J. Oceanic Eng.*, Vol. 29, pp. 1105-1130, 2004.
- 4) 柿沼太郎: 透水性海浜における内部波の挙動の数値計算, 海岸工学論文集, 第48巻, pp. 146-150, 2001.
- 5) 山下 啓, 柿沼太郎: 非線形波動方程式系に基づく表面孤立波及び内部孤立波の数値解, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol. 69, No. 2, pp. L_6-L_10, 2013.
- 6) Choi, W. and Camassa, R.: Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, *J. Fluid Mech.*, Vol. 396, pp. 1-36, 1999.
- 7) Grue, J., Friis, H. A., Palm, E. and Rusås, P. O.: A method for computing unsteady fully nonlinear interfacial waves, *J. Fluid Mech.*, Vol. 351, pp. 223-252, 1997.
- 8) 磯部雅彦: 波浪変形解析のための波動方程式の比較研究, 土木学会論文集, No. 491, pp. 1-14, 1994.
- 9) Funakoshi, M. and Oikawa, M.: Long internal waves of large amplitude in a two-layer fluid, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 55, pp. 128-144, 1986.
- 10) Grue, J., Jensen, A., Rusås, P.-O. and Sveen, J. K.: Properties of large-amplitude internal waves, *J. Fluid Mech.*, Vol. 380, pp. 257-278, 1999.
- 11) Nakayama, K. and Kakinuma, T.: Internal waves in a two-layer system using fully nonlinear internal-wave equations, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 62, pp. 574-590, 2010.
- 12) Su, C. H. and Mirie, R. M.: On head-on collisions between two solitary waves, *J. Fluid Mech.*, Vol. 98, pp. 509-525, 1980.
- 13) 田中光宏, 松田博文: CG アニメーションによる孤立波の Mach 反射, 京都大学数理解析研究所講究録, No. 949, pp. 229-237, 1996.
- 14) Green, A. E. and Naghdi, P. M.: A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth, *J. Fluid Mech.*, Vol. 78, pp. 237-246, 1976.

(2016. 1. 25 受付)

PROPERTIES OF SURFACE AND INTERNAL SOLITARY WAVES

Kei YAMASHITA, Taro KAKINUMA and Keisuke NAKAYAMA

The nonlinear steady wave equations based on the variational principle, were solved using the Newton-Raphson method, to find the numerical solutions for both surface and internal solitary waves. The ratio of kinetic energy to total energy for surface solitary waves increased, as the ratio of wave height to the still water depth increased. Conversely, the ratio of kinetic energy to total energy for internal solitary waves increased, when the ratio of wave height to the maximum wave height is average. The solitary waves propagation also was numerically simulated, by applying the time-dependent model, with the initial conditions obtained using the present method for the large-amplitude surface and internal solitary waves.