進行波の高精度計算のためのISPH法の エネルギー保存性の改善

後藤仁志¹・Abbas² KHAYYER・清水裕真³

¹正会員 京都大学教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂4)

E-mail: gotoh@particle.kuciv.kyoto-u.ac.jp

²正会員 京都大学准教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂4)

E-mail: khayyer@particle.kuciv.kyoto-u.ac.jp

³学生会員 京都大学大学院 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂4)

E-mail: shimizu.yuma.84s@st.kyoto-u.ac.jp

ISPH法は分裂・合体を含む複雑な水面変動を伴う問題の解析に優れる流体解析手法の一つである。近年では様々な高精度化スキームが提案され、これまで問題とされてきた非物理的な圧力擾乱の問題は払拭されつつある。しかしながら、砕波に伴う複雑乱流場の数値流体力学には力学的エネルギーの保存性が必須の条件であるにもかかわらず、既存のISPH法では力学的エネルギーの保存性についての検証はほとんどされていない。そこで本稿では、波の伝播に関するベンチマークテストを実施し、高精度ISPH法のエネルギー保存性について検証を実施する。

Key Words : ISPH method, energy conservation, enhanced scheme, wave propagation

1. はじめに

ISPH法¹⁾はLagrange型数値解析手法の一つであり、砕波や越波をはじめとした自由表面の大変形問題の解析に優れている。近年では、様々な高精度化スキームが提案され、最大の欠点であった圧力擾乱の問題は払拭されつつある。加えて、固相との連成モデルも開発されており、粒状体や弾性体との連成計算も容易である。さらに、計算機の性能向上に伴い、3次元計算を含む大規模計算が可能になることで、実現象がより正確に再現されるようになりつつある。こうした背景から、砕波や越波などの複雑な水表面の変形を伴う流れを正確に把握することが必要となる海岸構造物の設計において、粒子法の活用が従来にも増して期待される。

ISPH法は質量保存則と運動量保存則を支配方程式として用いているので、エネルギー保存則を陽には適用しない。しかし、理論上は質量保存則と運動量保存則が正確に解かれていれば、力学的エネルギーは保存されるはずである。したがって、これまでに開発されてきた計算精度向上のための多数の高精度化スキームは、ISPH法のエネルギーの保存性の向上についても一定の効果を持つと予想される。

海岸構造物の設計においては、砕波に起因する複雑乱流を伴う流れを扱うが、乱れエネルギーの計算精度を確保するには平均流のエネルギー保存性の議論が不可欠で

ある。しかしながら、ISPH法のエネルギー保存性を評価するための研究はほとんど例がない。そこで本稿では、水面波の伝播に関するベンチマークテストを実施し、これまでに開発された高精度ISPH法のエネルギー保存性についての基礎的な検討を行う。

2. 数値シミュレーションモデル

(1) 基礎方程式

流体の支配方程式は、

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (2)$$

である。ここに、 ρ :密度、 t :時間、 $\mathbf{u}$:流速ベクトル、 p :圧力、 ν :動粘性係数、 $\mathbf{g}$:重力加速度ベクトルである。本稿では、以上の基礎式をISPH法の勾配モデル、ラプシアンモデルにより離散化して計算を実施する。また、高精度化スキームとして、既往の高精度粒子法²⁾(CISPH法、HS法、HL法、ECS法)に加え、GC法³⁾、DS法⁴⁾を導入した。Kernel関数については、3次精度B-Spline型⁵⁾とWendland型⁶⁾の二種類を導入した。

(2) GC (Gradient Correction) 法

標準ISPH法における圧力勾配項は、

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \nabla p \right\rangle_i = \sum_{j \neq i} m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla w_{ij} \quad (3)$$

と離散化される．ここに、 m ：質量、 w ：kernel関数である．しかしながら、この勾配モデルは斥力型であり、負圧に代表される引張りの相互作用力が表現されないという課題を含んでいる．また、近傍粒子が不規則配列である場合において、勾配計算に誤差が生じるという問題を抱えている．

Ogerら⁷⁾は修正行列を用いて圧力勾配項を

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \nabla p \right\rangle_i = \sum_{j \neq i} m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} - \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \tilde{\nabla} w_{ij} \quad (4)$$

$$\tilde{\nabla} w_{ij} = \mathbf{L}_i \nabla w_{ij} ; \mathbf{L}_i = \left(\sum_{j \neq i} V_j \nabla w_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij} \right)^{-1} \quad (5)$$

のように書き換え、高次精度勾配モデルを導出した．このモデルでは粒子間相互作用力が反対称とならないため運動量保存は成り立たないが、粒子配列が不規則である場合や負圧発生時において計算精度の向上が期待される．本研究ではMPS法⁸⁾においてKhayyer・Gotoh³⁾が提案したGC法に倣い、式(5)をGC型勾配モデルと呼称する．

(3) DS (Dynamic Stabilizer) 法

標準ISPH法の圧力勾配モデルは式(3)で示されるように斥力型であり、粒子間の過度な接近を防ぐようになっている．一方で、式(4)のGC型勾配モデルは斥力型ではなく、引力が作用することもあるため、計算過程で粒子同士が極端に接近してしまいやすく数値不安定に繋がりやすい．そこでTsurutaら⁴⁾の提案した必要最小限の人工斥力項であるDS法を導入する．GC型勾配モデルにDSを導入した場合の圧力勾配項は、

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \nabla p \right\rangle_i = \sum_{j \neq i} m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} - \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \tilde{\nabla} w_{ij} + \frac{1}{\rho_i} \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}^{DS} w_{ij} V_j \quad (6)$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{ij}^{DS} = 0 & \text{if } |\mathbf{r}_{ij}^*| \geq d_{ij} \\ \mathbf{F}_{ij}^{DS} = -\rho_i \Pi_{ij} \mathbf{e}_{ij||} & \text{if } |\mathbf{r}_{ij}^*| < d_{ij} \end{cases} \quad (7)$$

$$d_{ij} = \alpha_{DS} \frac{d_i + d_j}{2} \quad (8)$$

$$\Pi_{ij} = \frac{\rho_j}{(\Delta t)^2 (\rho_i + \rho_j)} \left(\sqrt{d_{ij}^2 - |\mathbf{r}_{ij\perp}^*|^2} - |\mathbf{r}_{ij||}^*| \right) ; \Pi_{ij} > 0 \quad (9)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{ji}^* = - \left(\frac{\langle \nabla p \rangle_j}{\rho_j} - \frac{\langle \nabla p \rangle_i}{\rho_i} \right) \Delta t^2 \quad (10)$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{ji||}^* = \mathbf{r}_{ji} + \frac{\Delta \mathbf{r}_{ji}^* \cdot \mathbf{r}_{ji}}{|\mathbf{r}_{ji}|} \mathbf{e}_{ji||} \\ \mathbf{r}_{ji\perp}^* = \frac{|\Delta \mathbf{r}_{ji}^* \times \mathbf{r}_{ji}|}{|\mathbf{r}_{ji}|} \mathbf{e}_{ji\perp} \end{cases} \quad (11)$$

と記述される．ここに、 $\mathbf{F}_{ij}^{DS}$ ：粒子 j から粒子 i に作用する人工斥力ベクトル、 α_{DS} ：DSの有効半径を決定するパラメータ、 Π_{ij} ： $\mathbf{F}_{ij}^{DS}$ のスカラー値、 $\mathbf{e}_{ji||}$ ：相対位置ベクトル $\mathbf{r}_{ji}$ に平行な単位ベクトル、 $\mathbf{e}_{ji\perp}$ ：相対位置ベクトル $\mathbf{r}_{ji}$ に垂直な単位ベクトルであり、上付き添え字*は本来の圧力勾配項による粒子の速度および座標の更新後の物理量を表す．

3. エネルギー保存性の検証

本章では、容器内定在波、水面波伝播、孤立波伝搬の三つのベンチマークテストを通してエネルギー保存性についての検証を行う．

(1) 容器内定在波⁹⁾

図-1に計算領域を示す．水深 h は静止状態で1.0mとなるように設定した．矩形水槽の幅 B は2.0mとし、初期波形として表面変位 η_0 を

$$\eta_0(x) = A \cos[(kx + \lambda)/2] \quad (12)$$

($A = 0.1h$, $\lambda = B$, $k = 2\pi/\lambda$) と設定した．初速度を一様にゼロとし、重力を外力として与えて定在波を発生させる．計算粒子の粒径は0.01m、最大時間刻み幅は 2.5×10^{-4} sである．容器中心の水深の時間変動について、付加する高精度化スキームを変えた各ISPH法の結果とWuらによる2次の理論解¹⁰⁾との比較を図-2と図-3に示す．高精度化スキームを全く適用しない標準ISPH法による結果は圧力ノイズを多く含み、自由表面が不安定である．そのため、表面付近に跳躍する粒子が存在しており、この粒子跳躍が水位を高く見せかけているために、ノイズの多い解が

図-1 計算領域（容器内定在波）

図-2 容器中心における水位変動

図-4 位置エネルギーの時間変化

図-3 容器中心における水位変動

図-5 運動エネルギーの時間変化

理論解に近いように見えている．HS法を使ったモデルでは，自由表面と圧力ノイズの問題は大きく改善されるが，変動の振幅は徐々に減衰しており，エネルギーの保存性は良いとは言えない．HL法，ECS法を使ったモデルについても同様の傾向が見られる．一方で，GC法及びDS法を付加したモデルについては振幅が劇的に理論解に近づいており，減衰率も小さくなっていることが示されている．さらに，kernel関数をWendland型に変更したモデルではわずかではあるものの振動が理論解に近づいており，保存性は改善されている．

図-4および図-5に，位置エネルギーと運動エネルギーの推移を示す．ここで，位置エネルギーの基準は底面とした．HS法，HL法，ECS法を付加した各モデルは位置エネルギー，運動エネルギーともに大きく減衰しているのに対し，GC法，DS法が付加されたモデルはエネルギーの振動振幅を良く維持できている．GC法及びDS法の導入による保存性向上の原因としては，不規則配列時の勾配モデルの計算精度の違いが考えられる．初期に規則的に配列された粒子配置は時間が経つにつれて不規則に移行していくが，規則配列を元に導かれた標準の圧力勾配のモデル(式(3))では，勾配計算の誤差が生じることで，振動のための運動エネルギーが粒子のランダム運動へと変移し失われていくためであると考察される．一方で，GC法はTaylor展開に基づいた勾配計算によって不規則な

粒子配置においても精度が保証され，計算安定化のための斥力はDS法により最小限に抑えるために，長時間の振動の維持を可能にしていると思われる．

また，GC法及びDS法に加え3次精度B-Spline型kernel関数を適用した場合は，Wendland型kernel関数を適用した場合と比べ，位置エネルギーの振動が上方で起こっている．一方で，標準の勾配モデルに3次精度B-Spline型kernel関数を適用した場合は，このようなことはない．この原因として，kernel関数の形状によるDS法の人工斥力項の大きさの相違が考えられる．3次精度B-Spline型kernel関数はWendland型kernel関数と比べ中心増大の割合が小さく，影響半径内の外側に位置する近傍粒子の影響が強い．それゆえ，DS法の働く粒子間距離におけるkernel関数の値が大きくなり，DS法の影響が大きくなることで過度に人工斥力が働いてしまい，液相全体がごく僅かに上方に移動していると考えられる．

図-6に， $t = 8.55\text{s}$ から $t = 9.42\text{s}$ までの1サイクルにおける，CISP-HS-HL-ECS-GC-DS-WEND による計算結果を示す． $t = 8.55\text{s}$ と $t = 9.12\text{s}$ において図-3の極大値，極小値に対応する波形が得られており，その中間では平坦な波形が得られていることがわかる．また，全段階において滑らかな圧力分布がみられている．さらに，極大値，極小値をとる $t = 8.55\text{s}$ と $t = 9.13\text{s}$ において全体の速度の鉛直成分は0に大きく近づいており，一方で平坦波形となる $t =$

図-6 水面形の時間変化 - (左)圧力分布 (右)速度分布

8.84sと $t=9.42$ sにて大きな速度分布が得られた。これらの結果は実現象をよく再現している。

(2) 水面波伝播計算

計算領域を図-7に示す。フラップ型造波装置を左端に持つ水槽にて、周期1.2s、波高0.11mの規則波を造波させる。造波壁から1m, 5m, 10m, 15m, 20m, 25m, 30m離れた地点において水位変動を記録した。粒径は0.010m, 最大時間刻み幅は 1.0×10^{-3} sである。図-8に、CISPH-HS-HL-ECS-GC-DS-WENDにおける5mおよび30m地点での水位変動の比較を示す。わずかに減衰は見られるものの、非常によく波高を維持しており、エネルギー保存は良好である。

図-9に、造波板近傍および傾斜部近傍におけるCISPH-HS-HL-ECSとCISPH-HS-HL-ECS-GC-DS-WENDの水面形を示す。ここでは、進行波が傾斜域に到達し、波形が安定して得られる $t = 46.0$ sにおける結果を図示した。造波板近傍では両モデルとも滑らかかつ明確な波形が得られているのに対し、傾斜部近傍においてはCISPH-HS-HL-ECSでは大きく波高が減衰しており、明瞭な波形が得られていない。CISPH-HS-HL-ECS-GC-DS-WENDにおいては傾

斜部近傍においても明瞭な波形が得られており非常によく波高・波形が維持できていることがわかる。両モデルを、1m地点における波高を H_0 、各計測点における波高を H として、各計測点における H/H_0 の値をグラフにプロットし、波高伝達率を求めたのが図-10である。波高 H は、波形が完全に安定した50秒地点から10周期分の波の波高を平均して導出したものを用いた。CISPH-HS-HL-ECSでは急激に波高が減衰してしまっている一方で、CISPH-HS-HL-ECS-GC-DS-WENDは30m地点でも伝達率が0.867であり、多少の減衰は認められるものの、空間的にもエネルギーの保存性は従来の粒子法と比べて著しく改善されている。

(3) 孤立波伝播計算

幅 $B = 10.0$ m×水深 $h = 0.1$ mの水槽を作成し、左端のピストン式造波板を用いて安定孤立波を造波する。計算粒子の粒径は0.004m, 最大時間刻み幅は 4.0×10^{-4} sと設定した。ピストン式造波板の変位 $d(t)$ は舟久保ら¹¹⁾にならない、

$$d(t) = \begin{cases} \frac{A}{2} \tanh \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{t_0} - \frac{1}{2} \right) \right\} + \frac{A}{2} \tanh \pi & \text{if } 0 \leq t \leq t_0 \\ A \tanh \pi & \text{if } t > t_0 \end{cases} \quad (13)$$

と与えた。ここに、 t_0 : 変位時間 (=1.2s), A : 造波板の変位幅 (=0.25m)である。造波板から1mごとに波高計測点を設置し、水深の時間変化を観測したものが図-11である。9m地点における振幅水深比は0.63であり、舟久保らの実験結果0.66とおおよそ近い値が得られた。

次に、造波板変位幅 A を0.25mに固定し水深 h を0.1m, 0.09m, 0.07m, 0.05mへ変更した4ケースに、水深 h を0.1m, 造波板変位幅 A を0.225mへと変更したケースを加えた計5ケースについて計算を実施し、安定孤立波の規格化された速度 $c/(gh)^{1/2}$ と規格化された振幅 a/h の関係をプロットしたのが図-12である。孤立波の振幅 a と速度 c は舟久保らにならない8m及び9m地点の計算結果から求めた。図中の実線はLonguet-Higginsら¹²⁾による理論式であり、水深が0.09m以上の3ケースについては概ね理論解に近い計算結果が得られた。一方で、水深が0.07m, 0.05mの2ケースについては理論解との大きな乖離が見られていたが、これは計算領域に対する空間解像度が低下したことによる計算誤差の増加が原因であると考えられる。

4. おわりに

本稿では、ISPH法における圧力擾乱抑制のための各高精度化手法のエネルギー保存性に関する検証のために波浪計算についてのベンチマークテストを実施した。容

図-7 計算領域（水面波伝播計算）

図-8 CISP-HS-HL-ECS-GC-DS-WENDの5m, 30m地点における水位変動計算結果

図-10 各波高計測地点におけるCISP-HS-HL-ECSとCISP-HS-HL-ECS-GC-DS-WENDの H/H_0 の比較

図-9 CISP-HS-HL-ECSとCISP-HS-HL-ECS-GC-DS-WENDの水
面形の比較 (a)造波板近傍 (b)傾斜域近傍

よる定量的評価の両方において、程度の差こそあるものの、各手法にエネルギー保存性の改善効果があることが示された。加えて、もっとも高精度化されたCISP-HS-HL-ECS-GC-DS-WENDにおいて、非常に高いエネルギー保存性を持つことが示された。水面波伝播計算では、30m進行後においても波高・波形の維持が可能であることが示され、CISP-HS-HL-ECS-GC-DS-WENDが空間的にエネルギーが伝播する計算においても十分なエネルギーの保存性を持つことが示された。孤立波伝播計算では、計算結果と実験値、理論値との比較を行うことで、CISP-HS-HL-ECS-GC-DS-WENDの再現性の高さが示された。

しかしながら、ISPH法におけるエネルギーの保存性に関して大幅な改善を確認することができたものの、格子法と比較して必ずしも十分な保存性が示されていると

図-11 各波高計測地点における水位変動

図-12 無次元化速度と無次元化振幅の関係図

言うことはできない。エネルギー保存性の更なる改善が成されれば、当手法の計算結果に対する信頼性の大幅な向上、ひいてはエネルギーの観点からの実現象評価に繋がっていくことが可能となると予測される。

同じ半陰解法型Navier-Stokesソルバーである粒子法としてMPS法¹³⁾が挙げられるが、既往のMPS法のエネルギー保存性に関する研究¹⁴⁾と比較して、ISPH法はほぼ同等の結果が得られていた。なお、これまでに開発されたさまざまな高精度化スキームにより両手法の精度は飛躍

的に向上し、両手法の間に精度上の差異はほとんどなくなっているが、一方の手法においてのみ適用可能な高精度化手法（例えばSPP法¹⁹⁾）も存在している。

今後はエネルギー減衰の原因を究明するとともに、高精度化を重ね、よりエネルギー保存性に優れた手法の開発を行っていききたい。加えて、海岸工学に関連した実現象のより厳密な再現には、3次元計算による保存性の検証や乱流によるエネルギー損失の評価を正しく評価することが併せて必要となるため、並列計算コードの導入による3次元計算の実施や乱流モデルの導入についても検討していききたい。

参考文献

- 1) Shao, S. and Lo, E.Y.M.: Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface, *Advances in Water Resources*, Vol.26(7), pp. 787-800, 2003.
- 2) 後藤仁志, 有川太郎, Khayyer Abbas, 五十里洋行, 下迫健一郎, 荒木和博, 上原靖: 高精度ISPH法による直立壁面上の砕波の数値解析, 土木学会論文集 B2(海岸工学), 第70巻, pp. I_21-I_25, 2014.
- 3) Khayyer, A., and Gotoh, H.: Enhancement of stability and accuracy of the moving particle semi-implicit method, *Journal of Computational Physics*, Vol.230, pp. 3093-3118, 2011.
- 4) Tsuruta, N., Khayyer, A. and Gotoh, H.: A short note on Dynamic Stabilization of Moving Particle Semi-implicit method, *Computers and Fluids*, Vol.82, pp. 158-164, 2013.
- 5) Monaghan JJ.: Smoothed particle hydrodynamics, *Annu Rev Astron Astrophys* 1992, Vol.30, pp. 543-574, 1992.
- 6) Wendland, H.: Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree, *Advances in Computational Mathematics*, Vol.4, pp. 389-396, 1995.
- 7) Oger, G., Doring, M., Alessandrini, B. and Ferrant, P.: An improved SPH method: Towards higher order convergence, *Journal of Computational Physics*, Vol.225(2), pp. 1472-1492, 2007.
- 8) Koshizuka, S., and Oka, Y.: Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol.123, pp. 421-434, 1996.
- 9) Suzuki, Y., Koshizuka, S., and Oka, Y.: Hamiltonian moving-particle semi-implicit (HMPS) method for incompressible fluid flow, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 2876-2894, 2007.
- 10) Wu, G.X., and Eatock Taylor, R.: Finite element analysis of two-dimensional non-linear transient water waves, *Applied Ocean Research*, Vol.16 pp. 363-372, 1994.
- 11) 舟久保悠子, 皆川大輔, 大塚一路, 渡辺慎介, 辻英一, 及川正行: 大振幅浅水孤立波の不安定, 数理解析研究所講究録, 1231 巻, pp. 1-8, 2001.
- 12) Longuet-Higgins, M. S. and Fenton, J. D.: On the Mass, Momentum, Energy and Circulation of a Solitary Wave. II, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol.340(1623), pp. 471-493, 1974.
- 13) Koshizuka, S., and Oka, Y.: Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol.123, pp. 421-434, 1996.
- 14) 後藤仁志, Khayyer Abbas, 五十里洋行, 清水裕真: エネルギー保存性の高い粒子法による水面波の伝播計算, 土木学会論文集 B2(海岸工学), 第71巻, pp. I_25-I_30, 2015.
- 15) Tsuruta, N, Khayyer, A. and Gotoh, H.: Space potential particles to enhance the stability of projection-based particle methods, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 29(1), pp. 100-119, 2015.

(2016.3.16 受付)

ON ENHANCEMENT OF ENERGY CONSERVATION PROPERTIES OF INCOMPRESSIBLE SPH METHOD FOR ACCURATE SIMULATION OF PROGRESSIVE WATER WAVES

Hitoshi GOTOH, Abbas KHAYYER and Yuma SHIMIZU

The ISPH (Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics) method is a Lagrangian meshfree method, which is superior to simulate complicated violent flows with free surface including fragmentation and coalescence of water. Despite its advantages, however its energy conservation properties have not been examined rigorously. This paper aims at examining the effect of a few enhanced schemes for improving the energy conservation properties of a projection-based particle method, namely, the ISPH method by considering a set of wave simulations. It is shown that the most improved ISPH method, referred to as, CISPH-HS-HL-ECS-GC-DS with Wendland kernel, provides the best energy conservation property.