泥漿の輸送に関する研究*

一：円管内における可塑性流れの乱流遷移および圧力損失について：一

大山義年**・伊藤四郎**

梗概： 従来發表されている円管内を流れる泥漿の壓力損失に関する實驗値を整理して次の結果を得た。

(1) 円管内における可塑性物質の層流より亂流への遷移は次の如く定義したレイノルズ數

$$Re = (D u_a \rho \phi) / \eta$$

が1160に達した時に起る。ここに D は管の内徑, u_a は平均流速, ρ は液の密度, η は可塑性係數, ϕ は管の半径と栓半径の比 a の函數で次式によつて表される。

$$\phi = \frac{(1-a)(a^4-4a+3)}{3}$$

(2) 抵抗係數 f を次の如く定義すれば、普通流体のレイノルズ數と抵抗係數の間の關係がそのまま適用出来る。

$$f = \frac{P g_c D}{2 \rho L u_a^2 (1-a)}$$

ここに P は管の長さ L の間の壓力差である。

緒 言

泥漿の輸送は各種の工業においてしばしばわれわれの当面する重要な問題である。これに関する研究は種々あるが⁽¹⁾⁽²⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾ 壓力損失に関してはいまだ統一された結果を得ていない。僅かに D. H. Caldwell および Babbitt⁽³⁾ 両氏が泥漿が可塑性物質であることを實驗的に確め、層流部分においては Bingham の可塑性流れに関する基礎式を利用して導かれた Buckingham の円管内における可塑性流れの式の應用しうることを示したものが理論的に取扱つた唯一のものであろう。しかしこれも泥漿の輸送において最も普通に使用されている乱流部分に関しては余り検討されていない。E. L. McMillen⁽⁶⁾ は Buckingham の理論式を變形して種々の無次元項を導き、これを予め計算して表又は図としておくことによつて可塑性流れに関する各種の計算が簡単になることを示すと共に、可塑性流れの層流より亂流への遷移理論を提出した。この論文は実用的には極めて便利であるが、この乱流遷移に関する理論は實驗結果と著しく相違する。

筆者等はまず可塑性流れの層流より亂流への遷移について論じ、さらに可塑性物質の流れの壓力損失を普通流体と全く同様に取扱うことを示さんとした。

可塑性流れに関する基礎計算式

本報文においては可塑性流れに関する種々の計算式の誘導方法は省略して最後の結果だけを挙げた。これらの式の表示方法は McMillen のものに從つた。それは今後の計算に同氏の方法が極めて便利であるからである。なお同氏の論文の主要な部分は筆者の内の一人がこれに多少の解説を附して紹介してある。⁽³⁾

S を速度勾配, u を速度, r を流れに垂直な方向の距離, η を可塑性係數, τ を剪断應力, τ_y を剪断應力の降伏値とすれば、Bingham の可塑性流体の基礎式は

$$S = -\frac{du}{dr} = \frac{(\tau - \tau_y) g_c}{\eta} \quad (1)$$

P を管長 L の間の壓力差, r を管中の任意の層までの半径とすれば

$$\tau = Pr/2L \quad (2)$$

τ_w を管壁における剪断應力, R を管の半径, D を直径とすれば

$$\tau_w = PR/2L = PD/4L \quad (3)$$

剪断應力が τ_y になる所の半径即ちいわゆる栓半径を r_p とすれば

$$\tau_y = Pr_p/2L \quad (4)$$

$$\tau/\tau_w = r/R = x \quad (5)$$

* 昭和24年9月20日受理 ** 東京工業大学

$$\tau_y/\tau_w = r_p/R = a \quad (6)$$

$r > r_p$ なる半径 r における速度 u は

$$u = R\tau_y g_c m \left(\frac{1-2a+2ax-x^2}{2a} \right) \\ = R\tau_y g_c m n \quad (7)$$

但し $n = (1-2a+2ax-x^2)/2a$

また $m = 1/\eta$ で易動度と呼ばれている。

管内の最高速度即ち栓部の速度を u_p とすれば、 $x=a$ となつて

$$u_p = R\tau_y g_c m \frac{(1-a)^2}{2a} \\ = R\tau_y g_c m \beta \quad (8)$$

但し $\beta = (1-a)^2/2a$

栓部の流量を V_p 、他の部分の流量を V_r 、全流量を V とすれば

$$V = V_p + V_r = \pi R^3 \tau_y g_c m \left(\frac{a^4 - 4a + 3}{12a} \right) \\ = \pi R^3 \tau_y g_c m \alpha \quad (9)$$

但し $\alpha = (a^4 - 4a + 3)/12a$

平均速度を u_a とすれば

$$u_a = \frac{V}{\pi R^2} \\ = R\tau_y g_c m \alpha \quad (10)$$

(4) 式より

$$P = 2\tau_y L/r_p = 2\tau_y L/aR \quad (11)$$

(10) 式より

$$\tau_y = u_a/(Rm\alpha g_c) \quad (12)$$

(12) 式を (11) 式に代入すれば

$$P = \frac{2u_a L}{R^2 \alpha m \alpha g_c} = \frac{32u_a L}{D^2 g_c (4\alpha m \alpha)} \\ = \frac{32L u_a \cdot \mu_a}{D^2 g_c} \quad (13)$$

ここに

$$\mu_a = 1/(4\alpha m \alpha) = w/m, \quad w = 1/4\alpha \quad (14)$$

即ち μ_a を粘度と見做す時には可塑性流れにおける圧力降下は普通流体の層流に於ける圧力降下の式ポアズイユの法則と型式的には全く等しくなる。故に (14) 式の μ_a を見掛粘度とする。

以上の諸式において α, β, w, n 等は何れも無次元の項で a 又は x の函数として表わされる。

乱流への遷移について

普通流体の層流より乱流への遷移はレイノルズ数

$$Re = D u_a \rho / \mu \quad (15)$$

により決る。ここに μ は流体の粘性係数である。

可塑性流体の乱流への遷移を最初に論じたのは D. H.

Caldwell と H. E. Babbitt³⁾ であろう。両氏は μ の代りに見掛粘度 μ_a を使用し、 $Re = D u_a \rho / \mu_a$ が一定値を越えた時乱れが始るとした。但し μ_a を (13) 式によらず $(a^4 - 4a + 3)$ なる項に於て a^4 は他に比して高次の微小量になるからこれを省略しさらに変形して

$$\mu_a = \frac{D\tau_y g_c}{6u_a} + \eta \quad (16)$$

なる式を使用している。しかして Re が 2000 になる時の u_p の値を下限臨界速度 u_{lc} とし Re が 3000 になる時の u_a の値を上限臨界速度 u_{uc} とした。即ち

$$u_{lc} = \frac{1000\eta + 1000\sqrt{\eta^2 + D^2\tau_y g_c \rho / 3000}}{D\rho} \quad (17)$$

$$u_{uc} = \frac{1500\eta + 1500\sqrt{\eta^2 + D^2\tau_y g_c \rho / 4500}}{D\rho} \quad (18)$$

これによる臨界速度は実験とある程度合うが、 τ_y が大きくなるにつれて誤差が大きくなることは同氏等の計算結果と実験値を比較した表からも明かである。

McMillen は乱流遷移点に関し次のような理論を提出した。即ち流体の層相互の間に迂りを起している箇所の粘性は (1) 式より

$$\mu = \frac{\tau_y g_c}{S} = \eta + \frac{\tau_y g_c}{S} = \frac{\eta}{1-a/x} \\ = \eta/y = 1/(my) \quad (19)$$

であるとして境界層の厚さが δ 、即ち半径 r の所のレイノルズ数 Re は

$$Re = \frac{\delta u \rho}{\mu} = \frac{(R-r)(R\tau_y g_c m n)}{1/my} \\ = R^2 \tau_y g_c m^2 \rho n y (1-x) \quad (20)$$

これは管壁において $x=1$ で零となり、 r が小になるにつれて段々大きくなり、ある点で最大となり $x=a$ の点即ち $r=r_p$ の所では μ が無限大となるので再び零となる。この最大レイノルズ数 Re_m の所の x を x_m とすれば

$$x_m = a + \frac{4a(1-a)^2}{3} \quad (21)$$

$$n_m = \frac{1-2a+2ax_m-x_m^2}{2a} \quad (22)$$

$$Re_m = R^2 \tau_y g_c m^2 \rho n_m (1-a/x_m)(1-x_m) \\ = R^2 \tau_y g_c \eta^2 \rho Z \quad (23)$$

ここに x_m も Z も共に a のみの函数である。そして乱流遷移点は Re_m が或る臨界値に達した時であるとした。しかしこれが実際と相違することは実験の示すところである。

筆者等は Re を次の如く定義した。

$$Re = \frac{D(1-a)u_a \rho}{\mu_a} \quad (24)$$

しかしてこれが大体 1160 に達した時乱流に遷移するのを

見出した。遷移点のレイノルズ数即ち臨界レイノルズ数が1160附近になることは普通流体では未だ實際上得られてはいないか計算上平滑管については1180位の値が得られている。⁸⁾

(24) 式を變形すると

$$Re = \frac{D u_a \rho}{\eta} \cdot \frac{(1-a)}{w}$$

$$= \frac{D u_a \rho}{\eta} \phi \quad (25)$$

ただし $\phi = (1-a)/w$

ϕ は a のみの函数で Table 1 及び Fig. 1 にその値を示す。 τ_y が零になる時は η は μ と同一になり、また $a=0$ なる故 $\phi=1$ となり、(25) 式の Re は普通流体のレイノルズ数と同一になる。即ち(25)式で定義された Re は普通流体、可塑性流体を含めた広義のレイノルズ数ということが出来る。

筆者等の定義した乱流遷移点に於けるレイノルズ数即ち臨界レイノルズ数と Caldwell & Babbitt および Mc Millen の定義した臨界レイノルズ数を臨界速度の実験値につき計算したものを Table 2 に示す。また Fig. 2 は臨界レイノルズ数と比較半径 a の関係を示したもの

Table 1

a	$\phi=(1-a)/w$	a	$\phi=(1-a)/w$	a	$\phi=(1-a)/w$
0.995	2.492×10^{-7}	.70	4.401×10^{-2}	.20	5.871×10^{-1}
.99	1.987×10^{-6}	.65	$6.479 \times "$	.15	$6.801 \times "$
.98	1.679×10^{-6}	.60	$9.728 \times "$	.10	$7.800 \times "$
.96	1.246×10^{-4}	.55	1.337×10^{-1}	.08	$8.219 \times "$
.94	$4.150 \times "$	.50	$1.711 \times "$	.06	$8.648 \times "$
.92	$9.705 \times "$	.45	$2.274 \times "$	.04	$9.088 \times "$
.90	1.872×10^{-3}	.40	$2.851 \times "$	.02	$9.539 \times "$
.85	$6.100 \times "$	.25	$3.499 \times "$	.01	$9.768 \times "$
.80	1.397×10^{-2}	.20	$4.219 \times "$	0.	1.000
.75	$2.637 \times "$	.25	$5.010 \times "$		

Fig. 1

Fig. 2

Table 2

Source of data	τ_y Kg/m ²	η kg/m-sec	ρ kg/m ³	D m	u_c m/sec	a	Oyama & Ito	Rec Caldwell, Babbitt	McMillen
Gregory (5) (Steel tube)	0.0622	0.00555	1170	0.105	0.55	0.613	1090	2800	295
	0.0924	0.00670	1150	0.105	0.655	0.609	1120	2860	315
	0.884	0.00856	1255	0.105	2.19	0.730	1080	4010	356
	1.239	0.0129	1285	0.105	2.59	0.703	1165	3930	351
Richard (7) (Brass tube)	1.04	0.0250	1650	0.0405	2.03	0.430	1175	2060	415
	0.912	0.0135	1630	0.0203	2.04	0.400	1450	2410	459
	0.437	0.00567	1520	0.0405	1.11	0.655	785	2270	277
	0.437	0.00567	1520	0.0203	1.25	0.517	1110	2300	328
Caldwell (4) (Steel tube)	2.01	0.0222	1211	0.0897	4.09	0.642	1295	3590	373
	2.01	0.0222	1211	0.0510	3.58	0.595	1020	2520	293
	2.15	0.0161	1195	0.0897	3.58	0.665	1240	3720	362
	2.15	0.0161	1195	0.0510	3.11	0.610	1150	2940	312
	0.377	0.0244	1072	0.0897	1.61	0.376	1630	2800	554
	0.377	0.0244	1072	0.0510	1.41	0.332	1140	1710	397

で、これによると Caldwell や McMillen のものは値が散乱して一定ではないが、筆者等のものは比較的一定である。即ち Caldwell & Babbitt のものは比較半径 a が大きくなるに従つて臨界レイノルズ数は漸次大きくなつており、McMillen のものでは逆に小さくなつてゐる。筆者等の結果は a が小になると臨界レイノルズ数 Re_c は 1160 より大きくなる傾向を示すが、これは a が小さくなると流れの状態が普通流体のものに近くなるので普通流体が計算上得られる最低臨界レイノルズ数より一般に大きいレイノルズ数で乱流に移ると同様であると考えられる。

乱流における圧力損失について

普通流体の乱流部分の圧力損失については Fanning の式がある。これによると抵抗係数 f は

$$f = \frac{DP_{ge}}{2\rho L u_a^2} \quad (26)$$

層流部分では

$$Re \cdot f = 16 \quad (27)$$

となる。今試みに可塑性流体についても層流においては (27) 式と同一式が成立するが、如く抵抗係数 f を定義すれば

$$f = \frac{16}{Re} = \frac{DP_{ge}}{2\rho L u_a^2} \cdot \frac{1}{(1-a)} \quad (28)$$

但し乱流における a はその時の u_a を層流の時の平均速度と見做して決定するものとする。普通流体に於ては $a=0$ なる故 $1/(1-a)$ は 1 となり、(28) 式は (26) 式と同一になる。

Fig. 3 および Fig. 4 は Gregory,⁵⁾ Caldwell⁴⁾ および Richard⁷⁾ の実験結果を (25) 式および (28) 式を使つて整理したものである。これによると以上の実験結果は完全な乱流になるまでの過渡状態の範囲を除き普通流体の

Fig. 3

Steel tube (4" tube by Gregory; 3", 2" tube, by Caldwell & Babbitt)

Fig. 4

Brass tube (by Richard)

Re - f 曲線とよく一致する。これだけの実験結果から断定することは危険ではあるが従來の各種の粗度の管に対する実験結果を、そのまま利用することが出来るであろう。従つて (28) 式で示される f は普通流体、可塑性流体を含めた広義の抵抗係数と称することが出来る。

附記：一 本研究は文部省科学研究費による研究の一部である。

使用記号

$a = r_p/R$ 比較半径

$D=2R$	管径 [m]
g_c	變換係数 [kg·m/Kg·sec ²]
L	管長 [m]
$m=1/\eta$	易動度 [m·sec/kg]
$n=(1-2a+2ax-x^2)/(2a)$	
$n_m=(1-2a+2ax_m-x_m^2)/(2a)$	
P	管長 L の間の壓力差 [Kg/m ²]
r	任意の流体層までの半径 [m]
r_p	栓半径 [m]
R	管半径 [m]
Re	レイノルズ数
Re_c	臨界レイノルズ数
Re_m	最大レイノルズ数
S	速度勾配 [1/sec]
S_w	普通流体の管壁における速度勾配 [1/sec]
u	半径 r における流速 [m/sec]
u_a, u_c, u_p	各々平均, 臨界, 栓部流速 [m/sec]
u_{lc}	臨界速度の下限 [m/sec]
u_{uc}	臨界速度の上限 [m/sec]
V	全流量 [m ³ /sec]
V_p, V_r	栓部の流量および栓部以外の流量 [m ³ /sec]
$w=1/4a\alpha$	

$x=r/R$	
x_m	Re_m の点の x
$y=1-a/x$	
$Z=n_m(1-a/x_m)(1-x_m)$	
$\alpha=(a^4-4a+3)/(12a)$	
$\beta=(1-a)^2/(2a)$	
$\delta=R-r$	境界層の厚さ [m]
$\eta=1/m$	可塑性係数 [kg/m·sec]
μ_a	見掛け粘性係数 [kg/m·sec]
ρ	密度 [kg/m ³]
τ	剪断應力 [Kg/m ²]
τ_y	剪断應力の降伏値 [Kg/m ²]
τ_w	壁における剪断應力 [Kg/m ²]
$\phi=(1-a)/w=(1-a)(a^4-4a+3)/3$	
註 K_R は重量, K_R は質量を示す。	

引用文献

- 1) 三雲英之助, 西原利夫, 高原萬壽雄: 日本機械學會誌 36, 826 (1933)
- 2) 堀田正雄: 日本機械學會論文集, 5, 21-III, 15, (1939)
- 3) 伊藤四郎: 化学機械, 13, 155, (1949)
- 4) Caldwell, D. H.; Babbitt, H. E.: *Ind. Eng. Chem.*, 33, 249, (1941)
- 5) Gregory, W. B.: *Mech. Eng.* 49, 609, (1927)
- 6) McMillen, E. L.: *Chem. Eng. Progress*, 44, 639, (1948)
- 7) Richard, H. W.; Donald, M. W.; Willis, F. L.: *Ind. Eng. Chem.* 31, 622, (1939)
- 8) 内田俊一, 龜井三郎, 八田四郎次: 化学工業, p. 21

Studies on Transportation of Slurry

—: The critical point of flow, laminar to turbulent, and the pressure drop of the plastic fluid in a circular tube:—

Y. Ooyama and S. Ito (Tokyo Institute of Technology)

Abstract

The published results described by previous investigators on the pressure drop of slurry flowing in a circular tube are discussed and the following results are obtained.

(1) The critical point of flow, laminar to turbulent, of any plastic fluid flowing in a circular tube is taken place when Reynolds' Number newly defined by

$$Re = \frac{Du_a \rho \phi}{\eta} = Du_a \rho m \phi$$

comes to a fixed point, that is, 1100. D = tube diameter, u_a = average velocity, ρ = density of fluid, $m=1/\eta$ =mobility, $\phi=(1-a)(a^4-4a+3)/3$, a =relative plug radius, that is, ratio of the plug radius and the tube radius.

(2) The correlation between Reynolds' Number and friction factor in the ordinary true fluid is also available for the pressure drop in the plastic fluid flow, when friction factor f for plastic fluid flow is defined as follows:

$$f = \frac{DPg_c}{2\rho Lu_a^2(1-a)}$$

where P =pressure drop due to friction along the pipe length L and g_c =conversion factor.