低回転円筒装置の所要動力に関する理論的考察*

佐 野 司 朗**

摘要： 回転窯、回転乾燥機、煅焼炉等の如き低回転円筒装置の所要動力求出はそれが前記装置設計において不可欠なものであるにも拘らずその理論的研究は殆んど皆無の如く見受けられる。本報は理論的考察を基にして掻上板を有しない低回転円筒装置を運転せしめるに必要な全動力量の算出式を誘導せるものである。また算出式の証明として実測値と比較しよく一致することを確かめた。

§ 緒 論

一般に回転円筒装置を運転せしめるに要する全動力は略次の4項目によつて表わされる各部分消費動力量の和によつて求め得るものと思われる。¹⁾

1. 円筒内粒体の運動に要する動力
2. 円筒（附属せる歯車、タイヤ等を含む）を回転せしめるに要する動力
3. 円筒支持部に於ける摩擦抵抗動力
4. 減速装置に於ける動力損失

実際には以上の他に両端気密部等に於ける摩擦抵抗動力が考慮せられるべきであるが、上記4動力の和に比して無視し得べき程度のものと考えられる。しかしながら実際に運転に必要な電動機馬力の決定においてはこれらの僅少な摩擦抵抗動力も無視することはできず、また電動機に若干の余裕を与えるためにも上記4動力の和に多少の動力量を見込むことが必要である。次に上記4部分動力に対して夫々の算出式を誘導する。

§ 1. 円筒内粒体の運動に要する動力

円筒内粒子がボールミル運動を呈する場合の所要動力についてはすでに大山義年氏、C. Barth らによつて報告されているが円筒内粒子が円運動を終了した後粒体層表面を混乱流下するが如き低速度回転の場合に於ける所要動力に関する報告は殆んど皆無の如く見受けられる。これは低回転円筒内に於て混乱流下する粒子の運動状態を理論的に解析することが困難なるためであると思われるが、W. C. Seaman は Sullivan, Maier, 及び Ralston, によつて報告された回転窯内粒体運動状態を基にしてこれに適當なる考察を加えて粒体通過時間に対する理論式を誘導している。²⁾ 本報に於ける理論式の誘導はこの W. C. Seaman の粒体運動状態に対する考察に従

うものである。これによれば、低回転円筒内にある粒子は、円筒壁の作用を受けて粒体層表面に近接する位置に達する迄は円筒壁に対して恰かも静止の状態にあるが如き円運動を行い、上

記の位置に達すれば粒体層表面を混乱流下する。流下せる粒子は再び円筒壁の作用を受けてこの運動を繰返す。連続流下に於ては粒子は同一経路を画いて運動するものではないが、多数の同様な粒子によつてなされる平均運動として同一経路を画くものと考えて差支えない。これを図示すれば Fig. 1 の如くである。

一般に回転円筒内粒子が運動する場合に費される動力は次の2段階に分けて考えることができる。³⁾

- (a) 粒体を一定高さ迄に持ち上げるに要する動力
 - (b) 粒体に一定周辺速度を与えるに要する動力
- 次にこの2段階についての夫々の動力式を誘導する。

- (a) 粒体を一定高さ迄に持ち上げるに要する動力

半径 r なる経路上にある粒子群列において各粒子が微小時間 dt 間に回転角度 $d\omega = s/r$ に相当する距離を

Fig. 1 Cross section of low speed rotary cylinder showing pass followed by particles.

* 昭和28年2月14日受理

** 株式会社重永田造船所化工機部設計課

移動する時 (Fig.1 参照) 同経路上の各位置にある粒子が夫々持ち上げられるべき高さは $dh_1, dh_2, dh_3, \dots$ であつて同経路上にある各粒子の重量がすべて同一なる量 m である時微小時間 dt 間に於て同経路上にある粒子群列に対して与えられるべき仕事量の和は

$$pe = m \cdot dh_1 + m \cdot dh_2 + m \cdot dh_3 + \dots = mh \quad (1)$$

で表わされる。ここに h は円運動を始めんとする位置と終了せる位置との間の高さである。1秒間に円筒が ω なる角速度で回転する時半径 r なる経路上にある粒子群列に対して与えられるべき仕事量は1秒間に粒子が進む距離 $r\omega$ 内にある粒子数を (1) 式に乘じた量に等しい。よつて

$$PE_r = m \cdot h \cdot \frac{r\omega}{s} \quad (2)$$

円筒の長さ方向に対して粒子1列分の粒体層を考えると各経路半径に対する仕事量の和は

$$PE_L = m \cdot h_0 \cdot \frac{r_0\omega}{s} + m \cdot h_1 \cdot \frac{r_1\omega}{s} + m \cdot h_2 \cdot \frac{r_2\omega}{s} + \dots \\ \dots + m \cdot h_R \cdot \frac{R\omega}{s} \quad (3)$$

ここに $r_1 = r_0 + D_p$, $r_2 = r_1 + D_p$, $r_3 = r_2 + D_p$, $\dots$ (D_p は粒子の径)

(3) 式を図示すれば Fig. 2 の如くなり、 PE_L は或る経路半径 r に対する同経路上にある粒子群列に対して与えられるべき仕事量 $m \cdot h \cdot r\omega/s$ の $r=r_0$ より $r=R$ に至る間に於ける総和である。しかしながら (3) 式をそのまま解くことは煩雑であり、且つ求め出された解が複雑なものとなるので、この近似解として Fig. 2 に於ける斜線部分の面積を積分によつて求め、これを粒子の直径で除せば $(R-r_0)$ に対する粒子の径 D_p が微小なるものであるならば殆んど無視しうる誤差の範囲内において上の近似法が成立するものと考えられる。よつて (3) 式は

$$PE_L = \frac{1}{D_p} \int_{r=r_0}^{r=R} PE_r dr \quad (4)$$

円筒の全長にわたつては (4) 式に円筒の長さ方向に存在する粒子数 L/d を乗ればよい。よつて円筒内粒体を一定高さ迄に持ち上げるに要する全動力量は

$$PE = \frac{L}{D_p} \cdot \frac{1}{D_p} \int_{r=r_0}^{r=R} PE_r dr \quad (5)$$

Fig.1 によつても明らかなる如く、円筒の中心より粒体層表面に下した垂線の長さ $R \cos \theta$ は最小経路半径 r_0 に等しくはないが、流下層の厚さは一般に無視し得る程度のものであるので近似的にこれを等しいものと見做すことができる。²⁾ よつて (5) 式に於ける積分限界 ($r=r_0$)

を近似的に ($r=R \cos \theta$) に置換し、更に (2) 式を代入すれば

$$PE = \frac{L}{(D_p)^2} \int_{r=R \cos \theta}^{r=R} mh \frac{r\omega}{s} dr \quad (6)$$

ここに $h = 2 \sin \alpha \sqrt{r^2 - (R \cos \theta)^2}$

α = 粒体層表面の傾斜角 = 粒体休止角

(6) 式を解けば

$$PE = \frac{2}{3} R^3 \frac{L}{(D_p)^2} \frac{1}{s} m \omega \sin \alpha \cdot \sin^3 \theta \quad (7)$$

粒子の形状を球体であると見做せば $m = \pi (D_p)^3 \rho / 6$ (ρ は粒子の密度) 又 $d=s$ であるのでこれらの関係を (7) 式に代入し使用し易い形に書き変えれば

$$PE = 0.00457 D^3 L \rho n \sin \alpha \cdot \sin^3 \theta \quad (8)$$

粒体層表面に対する中心角 θ は充満度によつて定まる量である故、(8) 式中の $(0.00457 \sin^3 \theta)$ を充満度係数と名付け、 c_1 で表わせば充満度に対する c_1 の値は Fig. 3 によつて示される。よつて (8) 式は

$$PE = D^3 L \rho n \sin \alpha \cdot c_1 \quad (9)$$

(b) 粒体に一定周辺速度を与えるに要する動力

混乱流下した粒子は流下点より直ちに $v=r\omega$ なる周

Fig. 2

Fig. 3 Coefficient of fullness.

Fig. 4-9 The relation between the rate of rotation and the power. Curves represent equation (19).

辺速度を与えられて円運動を開始する。この際粒子は流下による回転方向分速度を有する訳であり、これを v' で表わせば r なる半径を有する経路上に於て流下した粒子に作用すべきモーメントは

$$dM = m/g(v + v')r \quad (10)$$

よつて与えられるべき仕事量は

$$ke = dM \cdot \omega = m/g(v + v')r\omega \quad (11)$$

しかるに前項に於ても述べたる如く、流下層の厚さは殆んど無視し得べき程度のものであるので、混乱流下する粒子は常に反対方向分速度を有する円運動の状態にある粒子の影響を受け、この抵抗によつて流下する粒子の速度は著しく消滅せられるものと考えられる。よつてその回転方向分速度は更に微小なるものであり、これを無視すれば (11) 式は近似的に次式によつて表わされる。³⁾

$$ke = \frac{m}{g} v r \omega \quad (12)$$

円筒が1秒間に ω なる角速度で回転する場合、 r なる半径を有する経路を画かんとする粒子群列に対して与えられるべき仕事量は1秒間に流下点に来るべき粒子の数 $r\omega/s$ を (12) 式に乗ずることによつて求められる。

$$KE_r = \frac{m}{g} v r \omega \frac{r\omega}{s} \quad (13)$$

(a) 項と同様な近似解法を用いることによつて円筒の長さ方向に対して粒子一列分の粒体層に対する仕事量の和は

$$KE_L = \frac{1}{D_p} \int_{R \cos \theta}^R KE_r dr \quad (14)$$

円筒の全長に対しては

$$KE = \frac{L}{D_p} \cdot \frac{1}{D_p} \int_{R \cos \theta}^R KE_r dr$$

$$= \frac{L}{(D_p)^2} \int_{R \cos \theta}^R \frac{m}{g} v \frac{(r\omega)^2}{s} \quad (15)$$

(15) 式を解けば

$$KE = \frac{1}{4} R^4 \frac{L}{(D_p)^2} \frac{1}{s} \cdot \frac{m}{g} \omega^3 (1 - \cos^4 \theta) \quad (16)$$

(a) 項と同様にして

$$KE = 9.61 \times 10^{-7} D^4 L \rho n^3 (1 - \cos^4 \theta) \quad (17)$$

上式中の $9.61 \times 10^{-7} (1 - \cos^4 \theta)$ を充満度係数 c_2 で表わせば (17) 式は

$$KE = D^4 L \rho n^3 c_2 \quad (18)$$

Fig. 3 に充満度対 c_2 の値を示す。

c_1 , c_2 の関係より明らかなる如く、粒体運動所要動力は充満度が50%なる場合において最高値をとり、50%を境として対称的に減少する。即ちこれは (a) に対してはポテンシャル差、(b) に対しては粒体層表面長さの対称的变化に基づくものである。よつて回転円筒内粒体の運動に要する動力は (9) 式及び (18) 式の和として

$$W_1 = D^3 L \rho n (\sin \alpha c_1 + D n^2 c_2) \quad (19)$$

で表わすことができる。

今 (19) 式の証明として大山義年の実験結果と比較するため (19) 式に同氏の実験諸元即ち円筒長さ $L = 0.4$ m 円筒直径 $D = 0.25, 0.30, 0.35$ m, 石灰石粒体密度 $\rho = 2720$ kg/m³, 及び同粒体休止角 $\alpha = 34^\circ$ を代入し回転数と所要動力との関係を求めれば Fig. 4-9 の如くなる。同図より明らかなる如く、計算値は大体において実測値と近似した値を示すが、充満度の増加と共に計算値が実測値を下回る傾向が大となる。これは充満度の増加によつて上層粒子が下層粒子の運動に与える影響が大になるためであらうと考えられ計算値と実測値の比較によつて充満度による補正値を次式によつて与えることができる。

Data Points represent measurements by Oyama (3).

Fig. 11 The ratio between the power for each movement conditions and the power for equilibrium condition.

W_e = The power for equilibrium condition.
 W_m = The power for best mixture condition.
 W_b = The power for boundary condition.
 W_a = The power for inside shell adhesion condition.

$$K = 0.002F + 0.96 \quad (20)$$

更に (19), (20) 式を用いて臨界速度に於ける所要動力を求め、これを実測値と比較すれば Fig. 10 の如くなり、 $D = 0.30$ m, $F = 30\%$ の時においてのみその誤差が比較的大である他は大体において実測値を満足するものである。また Fig. 11 によつて与えられる各運動状態に於ける所要動力比³⁾より Fig. 10 の計算値を用いて平衡状態に於ける所要動力を求めれば Fig. 12 の如くなり、実測値と完全に一致した値が得られる。これによつても知られる如く Fig. 10 によつて見出される一つのかけ離れた実測値は問題とするに当らず、よつて (19) 式は臨界速度以下に於て (20) 式の充満度による補正係

Fig. 10 Comparison of calculated and measured power for boundary condition. Curves represent equation (19)(20). Data points represent measurements by Oyama (3).

Fig. 12 Comparison of calculated and measured power for equilibrium condition. Curves represent equation (19) (20) and Fig. 11. Data points represent measurements by Oyama (3).

数を乗ずればほぼ満足しうる所要動力を与えるものであるといふことができる。

(19) 式の W_1 の単位は [kg-m/sec] であるので、これを [HP] で表わし、且つ密度 ρ [kg/m³] の代りに比重 S_p を用いるならば

$$P_1 = 13.33 \cdot D^3 \cdot L \cdot S_p \cdot n (\sin \alpha \cdot c_1 + D n^2 c_2) \quad (21)$$

また $n = z/\sqrt{D}$ (z は運動状態による恒数) で表わされる場合粒体の全重量を T とすれば、特定な条件の下に於ける所要動力は、(19) 式より

$$W_1 \text{ (又は } P_1) = c T \sqrt{D} \quad (22)$$

で求められる。ここに c は回転数、粒体休止角、及び充満度によつて定まる恒数である。これは C.Barth 氏に

よつて提出されたボールミルの所要動力式と全く同一であつて、回転数と直径との間に $n = 2/\sqrt{D}$ なる関係がある場合には回転円筒内粒体の運動に要する動力は常に (22) 式の形体によつて求めることができるものである。

§2. 円筒 (附属せる歯車、タイヤ等を含む) を回転せしめるに要する動力

円筒軸が回転軸に完全に一致しているものと見做せば円筒を回転せしめるに要する動力は

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (23)$$

で表わされる。ここに円筒の軸方向に関する慣性モーメント I は円筒の回転半径をその平均直径に等しいものとすれば

$$I = \frac{M_g}{g} R_m^2 \quad (24)$$

従つて円筒を回転せしめるに要する動力は次式によつて与えられる。

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{M_g}{g} R_m^2 \omega^2 = 1.4 \times 10^{-4} M_g D_m^2 n^2 \quad (25)$$

$$\text{又は} \quad P_2 = 1.868 \times 10^{-3} M D_m^2 n^2 \quad (26)$$

§3. 円筒支持部に於ける動力損失

(a) ローラーによつて支持される場合

N組のローラーによつて支持されている場合において円筒の回転を妨げんとする摩擦抵抗は各支持部のタイヤとローラー面及びローラー軸承面に於て生ずる。従つて歯車の切線方向に加えられるべき力 F_c は

$$F_c = (f_1 + f_2) \frac{D_1}{D_R} \frac{D_T}{D_G} N + (f_1' + f_2') \frac{D_T}{D_G} N \\ = \cos \beta (Q_1 + Q_2) \frac{D_T}{D_G} N \left(\mu \frac{D_1}{D_R} + \mu' \right)$$

Fig. 13 Cross section of rotary cylinder showing resistance force by friction between tire and rollers.

$$= \cos \beta \cdot Q \frac{D_T}{D_G} \left(\mu \frac{D_1}{D_R} + \mu' \right) \quad (27)$$

$$\text{ここに} \quad Q = M_g + T_g$$

従つて歯車のピッチ円直径に於て $R_G \omega$ m/sec なる速度で回転する場合に費される動力は

$$W_3 = F_c \cdot R_G \cdot \omega \\ = 0.0523 D_T n \cos \beta (M_g + T_g) \left(\mu \frac{D_1}{D_R} + \mu' \right) \quad (28)$$

$$P_3 = 0.697 D_T n \cos \beta (M + T) \left(\mu \frac{D_1}{D_R} + \mu' \right) \quad (29)$$

もし円筒が傾斜している場合には (29) 式に円筒傾斜角の余弦 $\cos \gamma$ を乗ずればよい。またスラストローラーにおいて生ずる摩擦抵抗動力はスラストローラーとタイヤの接触円直径を近似的にタイヤの外径に等しいものと見做した場合、(29) 式に於ける $\cos \beta$ を $\cos \gamma$ に置換することによつて求めることができる。

なおローラーが這らぬ条件としては

$$\mu' > \frac{D_1}{D_R} \mu \quad (30)$$

ここに μ はローラー軸承面に於ける摩擦係数、 μ' はタイヤとローラー間に於ける摩擦係数である。上の関係より明らかなる如く軸承間の摩擦係数がタイヤとローラー間のそれと同等若しくはそれ以下であるならばタイヤとローラー間の這りは生じない訳である。しかしながらかくの如き動力損失はなるべく減少せしめることが望ましく、よつて軸承面の仕上程度、潤滑には特に留意せられるべきである。

(b) トランニオンベヤリングによつて支持される場合

円筒の両端がトランニオンベヤリングによつて支持される場合歯車に切線方向に加えられるべき力 F_c は

$$F_c = \mu Q \frac{D_1}{D_G} \quad (31)$$

従つて歯車のピッチ円直径に於て $R_G \omega$ m/sec なる速度で回転する場合に費される動力は

$$W_3 = F_c R_G \omega \\ = 0.0523 \mu (M_g + T_g) D_1 n \quad (32)$$

$$\text{又は} \quad P_3 = 0.697 \mu (M + T) D_1 n \quad (33)$$

軸承面に於ける摩擦係数は軸承面の仕上、潤滑程度によつて異なるが充分良好なる条件の下においては

$$\mu = 0.06 \sim 0.08^{13)}$$

§4. 減速装置における動力損失

この動力は一般に減速装置 (歯車、ベルト、鎖等) の効率より全伝達馬力に対する比率を知ることによつて求めることができる。次に歯車の平均効率を示せば¹³⁾

平歯車（高速度） 2個の軸承を考慮に入れて 98%
 平歯車（低速度） 2個の軸承を考慮に入れて 90%
 傘歯車 2個の軸承及び推力を考慮に入れて 90%
 低回転円筒装置の全所要動力は以上の4主要動力量に若干の摩擦抵抗動力 p を加えねばならないことは既に述べた。依つて減速装置の効率を η で表わすとき低回転円筒装置を運転せしめるに必要な電動機馬力数は次式によつて求めることができる。

$$D = 1/\eta(P_1 + P_2 + P_3 + p) \quad (34)$$

なお電動機を選択に当つては装置の起動に際して生ずる瞬間過負荷に充分耐えうるものを採用しなければならないのは勿論である。

§5. 結 括

以上論述せる結果を総括すれば

回転円筒装置の全所要動力を4部分に分つて考え、しかして各部分に対する所要動力式を求めた。

(i) 円筒内粒体の運動に要する動力

粒体運動が臨界状態に到達せざる低回転速度の場合に対する粒体運動所要動力式は一般に次式によつて与えられる。

$$P_1 = 13.33 D^3 L S_p n (\sin \alpha \cdot c_1 + D n^2 c_2)$$

(ii) 円筒を回転せしめるに要する動力

円筒軸が回転軸に完全に一致しているものと見做して

$$P_2 = 1.868 \times 10^{-3} M D_m^2 n^2$$

(iii) 円筒支持部に於ける摩擦抵抗動力

(a) 円筒がローラーによつて支持されている場合には

$$P_3 = 0.697 D_T n \cos \beta (M + T) \left(\mu \frac{D_1}{D_R} + \mu' \right)$$

若し円筒が傾斜している場合にはこれに円筒傾斜角の余弦を乗ずればよい。又スラストローラーに於ける摩擦抵抗動力は上式中の $\cos \beta$ を $\cos \tau$ で置換することによつて求められる。

(b) トランソオンベヤリングによつて支持されている場合には

$$P_3 = 0.697 \mu D_1 n (M + T)$$

(iv) 減速装置に於ける動力損失

これは減速装置の効率によつて決定される量で歯車に対する一例を示せば次の如くである。

平歯車（高速度） 2個の軸承を考慮に入れて 98%
 平歯車（低速度） 2個の軸承を考慮に入れて 90%
 傘歯車 2個の軸承及び推力を考慮に入れて 90%

実際問題において考慮せられるべきその他の摩擦抵抗動力は非常に小さい値であると思われるが、電動機に若干の余裕を与えるためにも、上記4動力量の和に対して多少の動力量を見込むことが必要である。よつて低回転円筒装置を運転せしめるに必要な電動機馬力は次式によつて求めることができる。

$$P = 1/\eta(P_1 + P_2 + P_3 + p)$$

使用記号

D :	円筒内径	[m]
D_m :	円筒平均直径	[m]
D_1 :	ベヤリングに於ける軸径	[m]
D_R :	ローラー直径	[m]
D_T :	タイヤ直径	[m]
D_G :	歯車ピッチ円直径	[m]
L :	円筒長さ	[m]
n :	円筒回転数	[rpm]
n_1 :	ベヤリングに於ける (又はローラーの) 回転数	[rpm]
T :	装入物重量	[Ton]
T_g :	"	[kg]
M :	円筒重量 (但し円筒附属物の重量を含む)	[Ton]
M_g :	" (")	[kg]
Q :	$M_g + T_g$	[kg]
ρ :	粒体真密度	[kg/m ³]
S_p :	粒体比重	[-]
F :	充填度	[%]
α :	粒体休止角	[-]
μ :	軸承面の摩擦係数	[-]
μ' :	タイヤとローラー間の摩擦係数	[-]
β :	タイヤとローラーの接触角	[-]
τ :	円筒の傾斜角	[-]
η :	減速装置の効率	[-]
c_1 :	充填度係数	[-]
c_2 :	"	[-]
p :	電動機に対する安全動力	[HP]

参考文献

- 1) Engineering Questions and Answers. Vol.1, P.19.
- 2) Chem. Eng. Prog., Oct. p.508, (1951)
- 3) 大山藏年: 化学機械協会年報 第4巻

Theoretical Consideration of the Power Required for the Cylindrical Equipments Rotating at Low Speed.

Shirō Sano

The power required for the operation of cylindrical equipments rotating at low speed may be considered as consisting of the following four kinds.

(1) Power absorbed in turning over the charge of granular materials in the cylinder.

— The horse power to turn over the charge of granular materials in the cylinder is given by the following formula :

$$P_1 = 13.33 D^3 L S_p n (\sin \alpha \cdot c_1 + D n^2 c_2)$$

where D = inside diameter of cylinder, m.

L = length of cylinder, m.

S_p = specific gravity of materials.

n = rate of rotation, rpm.

α = natural angle of repose of materials.

c_1, c_2 = coefficient of fullness.

(2) The power required for driving the cylinder. (including gear, tire, etc.)

— The horsepower to drive the cylinder is given by the following formula :

$$P_2 = 1.868 \times 10^{-3} M D_m^2 n^2$$

where M = weight of cylinder, ton.

D_m = mean diameter of cylinder, m.

(3) Friction losses at the supporter of the cylinder.

— The horsepower to make up the friction loss caused in the operation of the cylindrical equipments is given by the following formula :

In case the cylinder is supported by horizontal or vertical rollers.

$$P_3 = 0.697 D_T n X (M + T) \left(\mu \frac{D_1}{D_R} + \mu' \right)$$

In case the cylinder is supported by turnion bearings.

$$P_3 = 0.697 \mu D_1 \cdot n (M + T)$$

where X = coefficient depending upon shapes of supporter.

D_T = diameter of tires, m.

D_R = diameter of rollers, m.

D_1 = diameter of shaft in bearings, m.

μ = coefficient of friction at surface of bearings.

μ' = coefficient of friction between tires and rollers.

(4) Power absorbed in the reduction stages.

— It is usual, in a case like this, to suppose that a certain percentage of the total horsepower consumed for the operation is lost in each stage of reduction.

It can theoretically be said that when we add (1), (2), and (3), we get the approximate horse power required for driving the cylindrical equipment. But, in order to cover the small friction loss and allow some reserve for the motor, it is necessary to allocate some more power in addition to the power calculated above, as follows :

$$P = 1/\eta (P_1 + P_2 + P_3 + p)$$

where η = total efficiency of reduction unit.