要旨： 輻射ガスの黒度を指数法則にしたがうものとして、直方体ガス体の底面端部に対する黒度を求める方法並びにその線図を示した。この線図を用いると、直方体ガス体周壁上の任意の点における黒度は四つの直方体ガス体の底面端部に対する黒度の和として直ちに求めることができる。

1. 緒 言

ガスおよび焰輻射に関する従来の研究問題は、

- (1) 一直線方向の輻射に対するガス黒度の問題
- (2) ガス体から全周壁への輻射に対する平均黒度の問題

に大別される。(1)によるガスの性質の研究成果を実際の伝熱装置に適用するには(2)の研究が必要である。

(1)のガス黒度 ϵ を $\epsilon = 1 - e^{-Al}$ (但し A は吸収係数 m^{-1} , l は輻射距離 m) で表わすと、精密には実際の値と一致しないが大体の傾向は一致するのであり⁷⁾、この式は従来からもガス輻射の基礎式として用いられている。(2)の研究のためには ϵ が l の単純な関数であることが絶対必要であるために従来から上式による表示法が使われているが、本論文でも上の形の式を採用することにする。立体の全周壁に対する平均黒度(従つてまた相当厚さ)については Hottel⁸⁾, Eckert⁹⁾ らが主として形状だけを問題にして近似式を与えているが、実は形状の他に大きさの影響もはなはだ大きいことは本研究の結果からみても明らかである。したがって最近の大形の炉に対しては従来の近似式の妥当性は疑問である。これを検討するには周壁上の各点における黒度を求めた上で周壁全面に対する平均値を求めなければならない。ところが周壁上の一点における黒度を算出するための数値計算法としては Schmidt の図式方法¹⁰⁾もあるけれども、これでもはなはだ煩雑で実用に適しない。ところで立体の形状を直方体に限定すると、周壁上の任意の点の黒度は線図から直接簡単に求めるようにできることがわかつた。以下にその計算法についてのべる。

2. 計 算 法

Schmidt は楔形ガス体の底面微小面積に対する黒度を求めた¹¹⁾が、これを利用すると直方体ガス体の底面端

部の微小面積に対する黒度を計算することができる。更にこれを用いると直方体ガス体底面の任意の点に対する黒度を求めることができる。

i) 楔形ガス体の底面微小面積 df に対する黒度

温度 T_g °K にある広い黒体平面から温度 T_0 °K の平行黒体平面へ輻射される輻射エネルギーの強さは

$$E_g = C_g \left[\left(\frac{T_g}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_0}{100} \right)^4 \right] \text{ Kcal/m}^2\text{h} \quad (1)$$

ただし C_g : 黒体の輻射係数, Kcal/m²h(°K/100)⁴ で示される。一方温度 T_g °K の任意の形の輻射ガスから、その内部にある温度 T_0 °K の黒体表面の面積要素 df m² への輻射エネルギーは次式で与えられる (Fig. 1 参照)。すなわち

$$dw = df \cdot \frac{E_g}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\psi=0}^{2\pi} \epsilon \cdot \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\psi \text{ Kcal/h} \quad (2)$$

φ : 輻射角

ψ : 方位角

ϵ : ガスの黒度

もしガス体が回転体の場合には(2)式は

$$dw = df \cdot E_g \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \epsilon \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \text{ Kcal/h} \quad (2')$$

となる。ここで

$$\epsilon_g = 2 \int_0^{\pi/2} \epsilon \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \quad (3)$$

をガス体の黒度と定義すると、ガス輻射の計算には結局、ガス体の黒度を計算すればよいことがわかる。

さて、Schmidt によると Fig. 2 に示すような半径 r , 高さ h の円筒形均質ガス体の底面中心に対する黒度 ϵ_g は、 $\epsilon = 1 - e^{-Al}$ が妥当する場合には次式で求められる。

Fig. 1

1) 化学機械協会関西側研究発表会(昭和28-5-27)にて講演、昭和28年12月17日原稿受理。

2) 3) 大阪大学工学部

4) 昌平工業株式会社

Fig. 2

$$\epsilon_g = \epsilon_{gI} + \epsilon_{gII}$$

$$\epsilon_{gI} = 2 \int_0^{\varphi_0} (1 - e^{-Ah/\cos\varphi}) \cos\varphi \sin\varphi d\varphi$$

$$\epsilon_{gII} = 2 \int_0^{\varphi_0} (1 - e^{-Ah/\sin\varphi}) \cos\varphi \sin\varphi d\varphi$$

この積分を行なうと求める黒度は結局

$$\epsilon_g = 1 - \theta(Ah) - \theta(Ar) + \theta(A\sqrt{h^2 + r^2})$$

ただし $\theta(Z) = e^{-Z} - Ze^{-Z} - Z^2 E_1(-Z)$

$$E_1(-Z) = \int_{-\infty}^Z \frac{e^{-x}}{x} dx$$

となる。したがって図示のような高さ h 、半径 r で微小角 $d\psi$ を挟む楔形ガス体の微小面積 df に対する黒度は

$$d\epsilon_g = \frac{d\psi}{2\pi} [1 - \theta(Ah) - \theta(Ar) + \theta(A\sqrt{h^2 + r^2})] \quad (4)$$

で表わされる。以上が Schmidt の理論である。

ii) 直方体ガス体の底面端部微小面積 df に対する黒度

本論文では上の計算を利用して直方体底面端部の微小面積 df に対するガス体黒度 ϵ_g を求めることが主眼である。いま Fig. 3 のように三辺がそれぞれ h , b , c の直方体を対角面によって I および II の二部分に分けると、図中の微小角 $d\psi$ を挟む楔形ガス体の df に対する黒度は (4) 式と全く同様にして

$$d\epsilon_{gI} = \frac{d\psi}{2\pi} [1 - \theta(Ah) - \theta(Ar) + \theta(A\sqrt{h^2 + r^2})]$$

$$\text{ここに} \quad r = \frac{b}{\cos\psi}$$

となる。したがってガス体 I の df に対する黒度は

$$\begin{aligned} \epsilon_{gI} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [1 - \theta(Ah) - \theta(Ar) + \theta(A\sqrt{h^2 + r^2})] d\psi \\ &= \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2\pi} [1 - \theta(Ah)] - \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta\left(\frac{Ab}{\cos\psi}\right) d\psi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta\left(A\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{\cos^2\psi}}\right) d\psi \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{ただし} \quad \varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = \tan^{-1} \frac{c}{b}$$

で与えられる。したがって θ を多項式で表わせば上式は簡単に積分できることがわかる。いま

$$\frac{Ab}{\cos\psi} \equiv Z_1, \quad \theta(Z_1) \equiv K_0 - K_1 Z_1 + K_2 Z_1^2 - K_3 Z_1^3 \quad (6)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta(Z_1) d\psi &= K_0 (\varphi_2 - \varphi_1) \\ &\quad - K_1 Ab \times 2.3026 \left\{ \log \frac{\tan(\pi/4 + \varphi_2/2)}{\tan(\pi/4 + \varphi_1/2)} \right\} \\ &\quad + K_2 (Ab)^2 \left\{ \tan\varphi_2 - \tan\varphi_1 \right\} \\ &\quad - K_3 \frac{(Ab)^3}{2} \left\{ \frac{\tan\varphi_2}{\cos\varphi_2} - \frac{\tan\varphi_1}{\cos\varphi_1} \right\} \\ &\quad + 2.3026 \log \frac{\tan(\pi/4 + \varphi_2/2)}{\tan(\pi/4 + \varphi_1/2)} \quad (7) \end{aligned}$$

また

$$\left. \begin{aligned} A\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{\cos^2\psi}} &\equiv Z_2 \\ \theta(Z_2) &\equiv K_0 - K_1 Z_2 + K_2 Z_2^2 - K_3 Z_2^3 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta(Z_2) d\psi &= (\varphi_2 - \varphi_1) \{ K_0 + K_2 (Ah)^2 \} \\ &\quad - \{ K_1 \cdot Ab + K_3 \cdot (Ah)^3 \cdot k \} \\ &\quad \left[2.3026 \log \frac{t_2 + \sqrt{t_2^2 - (1+k^2)}}{t_1 + \sqrt{t_1^2 - (1+k^2)}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{k} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{t_2}{\tan\varphi_2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{t_1}{\tan\varphi_2} \right) \right\} \\ &\quad + K_2 (Ab)^2 (\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1) \\ &\quad - \frac{K_3 (Ah)^3 \cdot k}{2} \left[t_2 k \tan\varphi_2 - t_1 k \tan\varphi_1 \right. \\ &\quad \left. + (1+k^2) \times 2.3026 \log \frac{t_2 + \sqrt{t_2^2 - (1+k^2)}}{t_1 + \sqrt{t_1^2 - (1+k^2)}} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

ただし

$$k = \frac{Ab}{Ah}, \quad t = \sqrt{1 + \frac{k^2}{\cos^2\psi}} \\ \sqrt{t^2 - (1+k^2)} = k \tan\psi$$

となる。

次に、ガス体 II の df に対する黒度 ϵ_{gII} も ϵ_{gI} と全く同様にて求められる。すなわち

$$\begin{aligned} \epsilon_{gII} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [1 - \theta(Ah) - \theta(Ar) + \theta(A\sqrt{h^2 + r^2})] d\psi \\ &= \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2\pi} [1 - \theta(Ah)] - \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta\left(\frac{Ac}{\cos\psi}\right) d\psi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta\left(A\sqrt{h^2 + \frac{c^2}{\cos^2\psi}}\right) d\psi \quad (10) \\ \varphi_1 &= 0 \quad \varphi_2 = \tan^{-1} \frac{b}{c} \end{aligned}$$

となるから

Fig. 4 $\phi(Z)$ の値

Table 1 $\phi(Z)$ の値

Z	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4
(1) $\phi(Z)$ の計算値	1	0.9095	0.8309	0.7624	0.7024	0.6489	0.6001	0.5544	0.5097
$\phi(Z)$ の真の値	1	0.9098	0.8326	0.7646	0.7039	0.6494	0.6000	0.5545	0.5146
Z	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8				
(2) $\phi(Z)$ の計算値	0.5139	0.4432	0.3843	0.3336	0.2870				
$\phi(Z)$ の真の値	0.5146	0.4432	0.3831	0.3321	0.2886				
Z	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
(3) $\phi(Z)$ の計算値	0.2896	0.2516	0.2190	0.1912	0.1644	0.1471	0.1296	0.1140	0.0999
$\phi(Z)$ の真の値	0.2886	0.2516	0.2194	0.1917	0.1680	0.1469	0.1296	0.1142	0.1011
Z	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5				
(4) $\phi(Z)$ の計算値	0.1132	0.0614	0.03289	0.0187	0.0109				
$\phi(Z)$ の真の値	0.1142	0.0603	0.0328	0.0179	0.0099				
Z	3.5	4.0	4.5	5.0	5.25	5.5			
(5) $\phi(Z)$ の計算値	0.00987	0.00545	0.00305	0.00181	0.00128	0.00087			
$\phi(Z)$ の真の値	0.00985	0.00545	0.00308	0.00175	0.00132	0.001			

Table 2 $\phi(Z)$ の値

Z	6	7	8	9	10	11	12	14	15
$\phi(Z)$	.000568	.0001881	.0000624	.00000214	.0000007	.00000024	.00000013	.00000005	.00000001

$$Z_1 = \frac{Ac}{\cos \psi}, \quad Z_2 = A \sqrt{h^2 + \frac{c^2}{\cos^2 \psi}} \quad (11)$$

とおけば ϵ_{gI} と同じ式から求めることができる。

以上から $\phi(Z)$ を Z の三次式で近似することができる。いま ϵ_g は (7) および (9) 式の積分を行って求めることがわかった。ところで $\phi(Z)$ は Fig. 4 に示すような曲線になるが、適当な区間に分けると次式を用いて近似できる。

- (1) $0 < Z < 0.4$;
 $\phi(Z) = 1 - 1.942Z + 2.749Z^2 - 2.395Z^3$
- (2) $0.4 < Z < 0.8$;
 $\phi(Z) = 0.994 - 1.723Z + 1.565Z^2 - 0.645Z^3$
- (3) $0.8 < Z < 1.6$;
 $\phi(Z) = 0.873 - 1.121Z + 0.581Z^2 - 0.114Z^3$

- (4) $1.5 < Z < 3.5$;

$$\phi(Z) = 0.4972 - 0.4061Z + 0.1179Z^2 - 0.0119Z^3$$

- (5) $3.5 < Z < 5.5$;

$$\phi(Z) = 0.16915 - 0.09358Z + 0.01773Z^2 - 0.0011415Z^3$$

上の近似式から求めた $\phi(Z)$ の値と真の値とを比較して示すと Table 1 のようになる。

$\phi(Z)$ を近似したために生ずる誤差は

$$\frac{1}{2\pi} \int \{-\phi(Ar)$$

$$+ \phi(A\sqrt{h^2 + r^2})\} d\psi$$

の積分項に基づく。この積分の全積分領域は $\pi/2$ である。いま $\phi(Z)$ が全領域で 0.005 の誤差を含むとすると、最悪の場合 $1/4 \times 0.01 = 0.0025$ の誤差を生じることになる。しかし実際上それ程大きな誤差が現われることは考えられず小数点以下三桁までは十分正確とみなしうる。

Z が 5.5 以上のときは積分は省略して $\phi(Z)$ の値に角度を掛けて積分値にかえる。この場合の $\phi(Z)$ の値は Table 2 に示す通りである。

上に示した $\phi(Z)$ の近似式を用いると ϵ_g は結局次式から求めることができる。

$$\epsilon_g = \epsilon_{g1} + \epsilon_{g2}$$

$$= \frac{1}{4} [1 - \phi(Ah)]$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\tan^{-1}(c/b)} \phi\left(A\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{\cos^2 \psi}}\right) d\psi \right. \\ & + \int_0^{\tan^{-1}(b/c)} \phi\left(A\sqrt{h^2 + \frac{c^2}{\cos^2 \psi}}\right) d\psi \\ & \left. - \int_0^{\tan^{-1}(c/b)} \phi\left(\frac{Ab}{\cos \psi}\right) d\psi - \int_0^{\tan^{-1}(b/c)} \phi\left(\frac{Ac}{\cos \psi}\right) d\psi \right] \quad (12) \end{aligned}$$

この算式を用いて $Ab : Ac$ がそれぞれ (1:1) (2:1) (3:1) (4:1) (5:1) (6:1) (8:1) (10:1) (12:1) (20:1) の各場合について Ab と Ah を変えて ϵ_g を求めた。この結果を Fig. 5 に示す。本図は実際の伝熱計算において計算図表として利用することができる。

iii) 直方体ガス体の底面の任意の点に対する黒度の求め方

Fig. 5

Fig. 6 に示すような直方体底面の任意の一点 P に対する黒度は、四つの直方体 I, II, III および IV の P 点に対する黒度の和として与えられる。したがって上に求めた線図を利用すると任意の点 P に対する黒度は直ちに求められる。Fig. 5 では Ah は 0.1 から 5 までの範囲のみについて線図が与えられている。しかしどんな

寸法割合でどんな大きさの直方体の場合でも ϵ_g は $Ah=5$ でほぼ最大値に達することは線図から明らかである。したがって Ah が 5 以上の範囲では $Ah=5$ に相当する ϵ_g の値を用いればよい。また Ah が 0.1 より小さいところについては、同線図を普通目盛の線図にひき直し $Ah=0$ で $\epsilon_g=0$ となることを利用すれば ϵ_g を線図

Fig. 5

上に読みとることができる。したがって Fig. 5 は十分実用的範囲を蔽っているものといえる。

3. 結 語

以上立方体周壁上の任意の一点に対するガス体黒度を

求める方法を示した。これにより周壁全体に対する平均のガス黒度は容易に求めうることになる。

最後にこの計算を行うに当つて煩雑な数値計算を分担していただいた大阪大学大学院学生の阿部久郎、三菱造船会社長崎造船所の串山正、大阪大学学生角井誠治、近江昌の諸氏に心から感謝の意を表する。

註

- 7) この検討については機械学会論文集中に発表の予定
- 8) 例えば McAdams "Heat Transmission" 2nd ed. (1942)
- 9) VDI-Forschungsheft, 387 (1937)
- 10) Z. VDI. Bd 77 Nr. 43 S. 1162
- 11) 10) に同じ。

Calculation of Gas Radiation from Rectangular Parallelepiped Gas Masses

S. Ishigai, Y. Yamasaki & R. Koizumi

The equivalent beam length for the radiation from gas masses to their boundary surfaces as given by Hottel and Eckert results in good approximation when the gas bodies are small in size. However, the error is inevitable when the gas body is as large as some furnaces including modern boiler furnaces. An exact calculation was practically impossible because the calculation was so tedious. In this paper is presented a simple method of calculation under the usual assumptions that the gas is homogeneous in its temperature and composition and that the radiation follows Beer's law, i. e.,

$$\epsilon_g = 1 - e^{-Al}$$

where

ϵ_g = gas emissivity,

A = coefficient of absorption,

l = path length,

e = base of hyperbolic logarithms.

Then, the emissivity of the wedge-shaped gas mass, as shown in Fig. 2, with height h and cross section $1/2 r^2 \Delta\psi$ — an element of a cylindrical volume — to the infinitesimal area df can be obtained by the following equation given by E. Schmidt:

$$\Delta\epsilon_g = \frac{\Delta\psi}{2H} [1 - \phi(Ah) - \phi(Ar) + \phi(A\sqrt{h^2 + r^2})]$$

where

$$\phi(Z) = e^{-Z} - Ze^{-Z} - Z^2 E_4(-Z)$$

$$E_4(-Z) = \int_{-\infty}^Z \frac{e^{-x}}{x} dx$$

By integration, the emissivity at the corners of the surface bc in the rectangular parallelepiped $b \times c \times h$ is given by the following equation :

$$\begin{aligned} \epsilon_g = & \frac{1}{4} [1 - \phi(Ah)] - \frac{1}{2H} \left[\int_0^{\tan^{-1}(b/c)} \phi\left(A\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{\cos^2\psi}}\right) d\psi \right. \\ & \left. + \int_0^{\tan^{-1}(c/b)} \phi\left(A\sqrt{h^2 + \frac{c^2}{\cos^2\psi}}\right) d\psi - \int_0^{\tan^{-1}(b/c)} \phi\left(\frac{Ab}{\cos\psi}\right) d\psi - \int_0^{\tan^{-1}(c/b)} \phi\left(\frac{Ac}{\cos\psi}\right) d\psi \right] \end{aligned}$$

The integration can be performed by transforming $\phi(Z)$ into the following equation :

$$\phi(Z) = K_0 - K_1 Z + K_2 Z^2 - K_3 Z^3$$

The results of the integration are summarized in Fig. 5 for various shapes and sizes of rectangular parallelepipeds. To find the emissivity at any point on the base surface of any rectangular parallelepiped, divide the parallelepiped into four parallelepipeds by two planes passing through the point. Then the emissivity for the four parallelepipeds to the point can readily be obtained from Fig. 5. The sum of the four emissivities is the emissivity in question.