一般化ニュートン流体の球のまわりの遅い流れについて*

吉岡直哉**・中村良**

京都大学工学部 化学工学科

緒言

Leslie²⁾はOldroydモデル粘弾性流体の球のまわりの遅い流れの問題を摂動近似法により解析した。また富田⁴⁾、Slattery³⁾らは指数モデルで表わされる一般化ニュートン流体について、変分近似法を用いて球に働く抗力の推定式を提出した。Leslieの結果は流速が非常に遅く、かつ流体がニュートン流体の挙動を示さなくなる初期の領域にしか適用できず、また富田、Slatteryらの結果は実測値とかなり誤差があるため、球に働く抗力を推定するに十分とはいえない。

Leslieの結果から、球のまわりの遅い流れでは抗力に関しては粘弾性効果はあまり重要でなく、一般化ニュートン流体の仮定が満足されることが推測される。したがって本研究では一般化ニュートン流体の仮定のもとで摂動近似法によりこの流動系を解析し、その結果得られた

抗力係数の理論値とC・M・C水溶液中の落球実験より得た実測値とを比較検討した。

§1. レオロジー状態式

高分子溶液などで、定常みかけ粘度 η_a と速度勾配 κ の関係が動粘度 $\eta(\omega)$ と角振動数 ω の関係で近似されることが多い¹⁾。そこで、Maxwell要素二個からなる一般化Maxwellモデルの動粘度の式に類似な次式でみかけ粘度を近似する。

$$\eta_a(\kappa) = \frac{\eta_1}{1 + \lambda_1^2 \kappa^2} + \frac{\eta_2}{1 + \lambda_2^2 \kappa^2} \quad (1)$$

この式を一般化ニュートン流体の仮定***により一般化すると

$$\eta_a(\Pi) = \frac{\eta_1}{1 + \lambda_1^2 \Pi} + \frac{\eta_2}{1 + \lambda_2^2 \Pi}$$

$$\Pi = 2 \sum_{ij} d_{ij} d_{ij}, \quad d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})^{****} \quad (2)$$

となる。 Π は変形速度テンソル d_{ij} の第二不変量である。Eq.(1)をEq.(2)に拡張するにあたり $\det(d_{ij})$ すなわち d_{ij} の第三不変量の効果はないものと仮定した。Eq.(2)を用いて応力テンソル τ_{ij} と d_{ij} の関係は次式で与えられる。

$$\tau_{ij} = 2\eta_a(\Pi)d_{ij} \quad (3)$$

球のまわりの流れにおいて、球半径 R 、一樣接近速度 v_∞ を用いてEq.(2)を次のように書きかえる。

$$\eta_a = \eta_1 \left[\frac{1}{1 + \epsilon_1 \Pi'} + \frac{\alpha}{1 + \epsilon_2 \Pi'} \right], \quad \epsilon_i = \lambda_i^2 \left(\frac{v_\infty}{R} \right)^2, \quad i=1,2$$

$$\Pi' = \Pi \left(\frac{R}{v_\infty} \right)^2, \quad \alpha = \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad (2')$$

みかけ粘度をEq.(1)で表わすと、一般に $\lambda_1 \ll \lambda_2$ 、 $\alpha < 1$ となる。したがってEq.(1)の右辺第1項が定数とみなせる領域以外において、すなわち $\lambda_1^2 \kappa^2 \ll 1$ のとき以外は $\lambda_2^2 \kappa^2 \gg 1$ となりEq.(1)の右辺第2項はほとんど0となる。この範囲においてEq.(2')の右辺第2項は Π' の増加とともに急激に減少し、 Π' が最大値をとる領域においてほとんど0となる。したがってニュートン流体のときのStokesの解を用いてEq.(2')を次式で近似する。

$$\eta_a = \frac{\eta_1}{1 + \epsilon_1 \Pi'} [1 + ah(\xi, \theta)], \quad \xi = \frac{r}{R} \quad (4)$$

$$h(\xi, \theta) = 1 - 3(\xi^2 - \xi^{-4}) \cos^2 \theta - \xi^{-8} \sin^2 \theta$$

$$= \left(\frac{4}{9} \right) \left(\frac{R}{v_\infty} \right)^2 \Pi_s \quad (5)$$

* <On the Creeping Flow of Generalized Newtonian Fluid around a Sphere>

Received on March 15, 1965

** Naoya Yoshioka, Ryô Nakamura (Dept. of Chem. Eng., Kyoto Univ., Kyoto, Japan)

*** 高分子濃厚溶液、コロイド懸濁液などは非ニュートン粘性を示すのみならず、法線応力効果(ワイゼンベルグ効果など)、非定常現象であられる粘弾性効果を示すことが多い。したがって、通常の粘度計を用いて剪断応力 τ と速度勾配 κ の関係

$$\tau = \eta(\kappa)\kappa \quad (i)$$

を求め、非ニュートン粘度 η が κ (あるいは τ)のいかなる関数になっているかを規定するだけではこれらの流体のレオロジー状態式として完全とはいえない。すなわち(i)の関係以外に法線応力の測定、非定常実験による測定などが必要である。しかし、そのレオロジー状態式をテンソル表示により一般的に表わすことは非常に困難な問題である。

そこで、法線応力効果、粘弾性現象などを無視し、 η が κ により変化するという現象のみに着目して(i)式をテンソル表示により一般化した式

$$\tau_{ij} = 2\eta(\Pi, \text{III})d_{ij} \quad (ii)$$

でレオロジー状態式を近似するとき、これを一般化ニュートン流体モデルとよぶ。ここで Π 、 III は d_{ij} の第二、第三不変量である。(普通 III の効果は無視している)。従来まで化学工学で使われてきた“指数モデル”“Ellisモデル”などの多くの模型はこの一般化ニュートン流体模型である。そしてBinghamモデルを除けばそれらの間には適用範囲が多少異なるという以外に本質的な差異はない。ただ、モデルが適用しようとする流動系に対して大きな欠点(例えば、零変形速度粘度が重要な流動系に指数モデルを使うような)を含まないということを十分に確かめなければならない。本研究で用いたモデル(1)は κ が小さい範囲に通じているが、その適用範囲は従来のモデルより狭くなっている。しかし、遅い流れの問題では低変形速度範囲における流体挙動が重要であることおよび計算の簡単さのために(1)のモデルを選んだ。

なお、当然のことながら一般化ニュートン流体モデルは法線応力効果、粘弾性現象などを説明できない。法線応力効果、粘弾性現象などを考慮したものにRivlin-Ericksen流体、Oldroydモデルなどがあるが、解析の困難さ、実験の困難さのために現象の定量的記述の基礎はいまだ十分に確立されていない。

**** (*)は共変微分をあらわす。直角座標では

$$(v_{i,j} + v_{j,i}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$h(\xi, \theta)$ は Π_s が最大値をとる $\theta = \pi/2$, $\xi = 1$ で 0 となる。

§2. 基礎方程式

速度の ϕ -方向成分を 0 とし、流動系は ϕ -方向に一樣であると仮定すると定常状態における遅い流れに対する運動方程式 (Appendix 参照) は

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta_a \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cot \theta \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \frac{\partial \eta_a}{\partial r} + \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial \eta_a}{\partial \theta} \\ 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta_a \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \\ &\quad + \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial \eta_a}{\partial r} + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{r} \frac{\partial \eta_a}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

連続の式は

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0 \quad (7)$$

第二不変量 Π は

$$\Pi = 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \cot \theta \right)^2 \right] \\ + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 \quad (8)$$

$$F^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (9)$$

である。

境界条件は次式で与えられる。

$$\text{境界条件: 1. } r=R \text{ で } v_r = v_\theta = 0 \quad (10)$$

境界条件: 2. $r \rightarrow \infty$ で

$$v_r \rightarrow v_\infty \cos \theta, \quad v_\theta \rightarrow -v_\infty \sin \theta \quad (11)$$

Eq. (6), (7), (4) 式を境界条件 (10), (11) のもとで解いて得られる解

$$\left. \begin{aligned} v &= v \left(\frac{r}{R}, \theta; \alpha, \varepsilon_1 \right) \\ p &= p \left(\frac{r}{R}, \theta; \alpha, \varepsilon_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

の $\alpha = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ のまわりの Taylor 展開が可能であるものとする。

$$v = v_0 \left(\frac{r}{R}, \theta \right) + \alpha v_\alpha \left(\frac{r}{R}, \theta \right) + \varepsilon_1 v_\varepsilon \left(\frac{r}{R}, \theta \right) + \cdots \quad (13)$$

$$p = p_0 \left(\frac{r}{R}, \theta \right) + \alpha p_\alpha \left(\frac{r}{R}, \theta \right) + \varepsilon_1 p_\varepsilon \left(\frac{r}{R}, \theta \right) + \cdots \quad (14)$$

Eq. (13), (14) を Eq. (4), (6) および (8) に代入して α, ε_1 のおおのの幅ごとに整理してその係数をそれぞれ 0 に等置すると運動方程式はそれぞれ次のようになる。

2.1 0 次の項

$$0 = -\frac{\partial p_0}{\partial r} + \eta_1 \left[\nabla^2 v_{r0} - \frac{2}{r^2} v_{r0} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_{\theta 0} \cot \theta \right] \quad (15)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} + \eta_1 \left[\nabla^2 v_{\theta 0} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta 0}}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \quad (16)$$

2.2 α の一次の項

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p_\alpha}{\partial r} + \eta_1 \left[\nabla^2 v_{r\alpha} - \frac{2}{r^2} v_{r\alpha} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\theta \alpha}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_{\theta \alpha} \cot \theta \right] \\ &\quad + \eta_1 \left[h \left(\nabla^2 v_{r0} - \frac{2}{r^2} v_{r0} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_{\theta 0} \cot \theta \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial v_{r0}}{\partial r} \right) \frac{\partial h}{\partial r} + \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{\theta 0}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p_\alpha}{\partial \theta} + \eta_1 \left[\nabla^2 v_{\theta \alpha} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{r\alpha}}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta \alpha}}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \\ &\quad + \eta_1 \left[h \left(\nabla^2 v_{\theta 0} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta 0}}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{\theta 0}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial h}{\partial r} + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{v_{r0}}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

2.3 ε_1 の一次の項

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial r} + \eta_1 \left[\nabla^2 v_{r\varepsilon} - \frac{2}{r^2} v_{r\varepsilon} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\theta \varepsilon}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_{\theta \varepsilon} \cot \theta \right] \\ &\quad - \eta_1 \left[\Pi_0' \left\{ \nabla^2 v_{r0} - \frac{2}{r^2} v_{r0} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_{\theta 0} \cot \theta \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial v_{r0}}{\partial r} \right) \frac{\partial \Pi_0'}{\partial r} + \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{\theta 0}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_0'}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \theta} + \eta_1 \left[\nabla^2 v_{\theta \varepsilon} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{r\varepsilon}}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta \varepsilon}}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \\ &\quad - \eta_1 \left[\Pi_0' \left\{ \nabla^2 v_{\theta 0} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta 0}}{r^2 \sin^2 \theta} \right\} + \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{\theta 0}}{r} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial \Pi_0'}{\partial r} + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{v_{r0}}{r} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_0'}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Pi_0' &= \left(\frac{R}{v_\infty} \right)^2 \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial v_{r0}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{v_{r0}}{r} \right)^2 + \left(\frac{v_{r0}}{r} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{v_{\theta 0}}{r} \cot \theta \right)^2 \right\} + \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{\theta 0}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} \right\}^2 \right] \end{aligned} \quad (21)$$

流れ関数 ψ を導入すると各速度成分は次式で与えられる。

$$v_r = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (22)$$

Eq. (13), (14) の仮定により ψ は

$$\psi = \psi_0 + \alpha \psi_\alpha + \varepsilon_1 \psi_\varepsilon + \cdots \quad (23)$$

の展開が可能である。

Table 1 Coefficients of Eq. (35), (36) and (37)

i	0	1	2	3	4	5	6
A_i^*		0.1415	-0.0690	-0.1157	0.0714	-0.0167	-0.0115
B_i^*	-1.2857	0.1201	0.4585	-0.6250	0.0367	0.0096	
C_i^*	3.086	0.138	-0.572	-0.869	1.357	-0.054	
D_i^*	-5.143	0.481	1.834	-2.500	0.147	0.033	
E_i^*	-3.086	-0.069	-0.045	2.476	-2.857	0.322	0.173
G_i^*	3.857	-0.120	-0.266	3.125	-0.257	-0.087	
K_i^*		-1.362	-0.721	3.214	-1.750	-3.690	2.481
L_i^*		1.201	-10.50	20.25	-13.85	3.25	

Table 2 Coefficients of Eq. (40), (41) and (42)

i	0	1	2	3	4	5	6
A_i^*		-0.1553	0.3185	-0.2604	0.1607	-0.0375	-0.0260
B_i^*	-2.8929	0.2702	1.0318	-1.406	0.0826	0.0216	
C_i^*	6.944	0.311	-1.287	-1.955	3.053	-0.122	
D_i^*	-11.57	1.082	4.127	-5.625	0.331	0.086	
E_i^*	-6.944	-0.155	-0.102	5.571	-6.428	0.725	0.389
G_i^*	-8.678	0.270	0.599	-7.031	0.578	0.196	
K_i^*		0.311	-1.621	7.232	-3.938	-8.308	5.581
L_i^*		2.702	-23.62	45.56	-31.15	7.31	

§3. 解

3・1 0次の項の解

$$\left. \begin{array}{l} \text{境界条件 1. } r=R \text{ で } \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} = 0 \\ \text{境界条件 2. } r \rightarrow \infty \text{ で } \psi_0 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) v_\infty r^2 \sin^2 \theta \end{array} \right\} \quad (24)$$

Eq.(15), (16) から p_0 の項を消去すると ψ_0 に関する微分方程式は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\sin \theta}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi_0 = 0 \quad (25)$$

この式の解はいわゆる Stokes の解で次式で与えられる。

$$\psi_0 = (1/4) R^2 v_\infty (-\xi^{-1} + 3\xi - 2\xi^2) \sin^2 \theta \quad (26)$$

$$\left. \begin{array}{l} v_{r0} = v_\infty (1 - (3/2)\xi^{-1} + (1/2)\xi^{-2}) \cos \theta \\ v_{\theta 0} = -v_\infty (1 - (3/4)\xi^{-1} - (1/4)\xi^{-2}) \sin \theta \end{array} \right\} \quad (27)$$

$$p_0 - p_\infty = -(3/2)(\eta_1 v_\infty / R) \xi^{-2} \cos \theta \quad (28)$$

3・2 α の一次の項の解

ψ_α に関する微分方程式は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\sin \theta}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi_\alpha = R^2 v_\infty [-162\xi^{-7} + 504\xi^{-9} - 180\xi^{-11} - 204\xi^{-13}) \sin^2 \theta + (162\xi^{-7} - 495\xi^{-9} + 126\xi^{-11} + 90\xi^{-13}) \sin^4 \theta] \quad (29)$$

となる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{境界条件 1. } \xi=1 \text{ で } \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \theta} = 0 \\ \text{境界条件 2. } \xi \rightarrow \infty \text{ で } \psi_\alpha = o(\xi^2) \end{array} \right\} \quad (30)$$

$$\psi_\alpha = R^2 v_\infty \sum F_i(\xi) \theta_i(\theta) \quad (31)$$

の変数分離形の解を仮定すると

$$\theta_1 = \sin^2 \theta, \theta_2 = (-0.8 \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) \quad (32)$$

となり F_1, F_2 に関する微分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d^4 F_1}{d\xi^4} - \frac{4}{\xi^2} \frac{d^2 F_1}{d\xi^2} + \frac{8}{\xi^3} \frac{dF_1}{d\xi} - \frac{8F_1}{\xi^4} \\ = -32.4\xi^{-7} + 108\xi^{-9} - 79.2\xi^{-11} - 132\xi^{-13} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 F_2}{d\xi^4} - \frac{24}{\xi^2} \frac{d^2 F_2}{d\xi^2} + \frac{48}{\xi^3} \frac{dF_2}{d\xi} + \frac{72}{\xi^4} F_2 \\ = 162\xi^{-7} - 495\xi^{-9} + 126\xi^{-11} + 90\xi^{-13} \end{aligned} \quad (34)$$

これらの微分方程式を解いて, Eq.(29) の解として次式が求まる。

$$\begin{aligned} \psi_\alpha = R^2 v_\infty \left[\sum_{i=1}^6 A_i \xi^{-2i+2} \sin^2 \theta + \left\{ B_0 \xi^{-3} \ln \xi \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^5 B_i \xi^{-2i+1} \right\} \times (-0.8 + \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (35)$$

速度成分および圧力はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} v_{r\alpha} = v_\infty \left[\left\{ C_0 \xi^{-5} \ln \xi + \sum_{i=1}^5 C_i \xi^{-2i+1} \right\} \cos^3 \theta + \left\{ D_0 \xi^{-5} \ln \xi + \sum_{i=1}^5 D_i \xi^{-2i-1} \right\} \cos^3 \theta \right] \\ v_{\theta\alpha} = v_\infty \left[\left\{ E_0 \xi^{-5} \ln \xi + \sum_{i=1}^5 E_i \xi^{-2i+1} \right\} \sin \theta + \left\{ G_0 \xi^{-5} \ln \xi + \sum_{i=1}^5 G_i \xi^{-2i-1} \right\} \sin^3 \theta \right] \\ p_\alpha = \left(\frac{\eta_1 v_\infty}{R} \right) \left[\sum_{i=1}^6 K_i \xi^{-2i} \cos \theta + \sum_{i=1}^5 L_i \xi^{-2i-2} \cos^3 \theta \right] \end{array} \right\} \quad (36)$$

3・3 ϵ_1 の一次の項の解

3・3 のときと全く同様にして ψ_ϵ に関する微分方程式は次のようになる。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\sin \theta}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi_e$$

$$= R^2 v_{\infty} [(-364.5 \xi^{-7} + 1134 \xi^{-9} - 405 \xi^{-11} - 458.6 \xi^{-13}) \sin^2 \theta + (364.5 \xi^{-7} - 1113.75 \xi^{-9} + 283.5 \xi^{-11} + 202.5 \xi^{-13}) \sin^4 \theta] \quad (38)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{境界条件 1. } \xi=1 \text{ で } \frac{\partial \psi_e}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_e}{\partial \theta} = 0 \\ \text{境界条件 2. } \xi \rightarrow \infty \text{ で } \psi_e = o(\xi^2) \end{array} \right\} \quad (39)$$

Eq.(38), (39) の解は

$$\psi_e = R^2 v_{\infty} \left[\sum_{i=1}^6 A_i \xi^{-2i+3} \sin^2 \theta + \left\{ B_0 \xi^{-3} \ln \xi + \sum_{i=1}^5 B_i \xi^{-2i+1} \right\} \times (-0.8 + \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \right] \quad (40)$$

圧力分布および速度成分はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} v_{re} = v_{\infty} \left[\left\{ C_0 \xi^{-5} \ln \xi + \sum_{i=1}^5 C_i \xi^{-2i+1} \right\} \cos \theta + \left\{ D_0 \xi^{-5} \ln \xi + \sum_{i=1}^5 D_i \xi^{-2i+1} \right\} \cos^3 \theta \right] \\ v_{\theta e} = v_{\infty} \left[\left\{ E_0 \xi^{-5} \ln \xi + \sum_{i=1}^6 E_i \xi^{-2i+1} \right\} \sin \theta + \left\{ G_0 \xi^{-5} \ln \xi + \sum_{i=1}^5 G_i \xi^{-2i+1} \right\} \sin^3 \theta \right] \\ p_e = \left(\frac{\eta_1 v_{\infty}}{R} \right) \left[\sum_{i=1}^6 K_i \xi^{-2i-1} \cos \theta + \sum_{i=1}^5 L_i \xi^{-2i-2} \cos^3 \theta \right] \end{array} \right\} \quad (41)$$

$$(42)$$

Leslie は Oldroyd モデル粘弾性流体について同じ流動問題を摂動近似で解析した。その結果によると、摂動パラメータ（無次元緩和時間）の一次の項の流線は $\theta = \pi/2$ の面に関して鏡映対称である。(2') 式からわかるように本報文で用いた一般化ニュートン流体モデルでは摂動パラメータの一次の項は Leslie のパラメータの二次の項に相当し鏡映対称となるような流線は生じない。なお、鏡映対称の項は抗力に影響を与えない。

Fig. 1 Pressure and shear stress distribution on a sphere

§4. 球に働く抗力

§3 で得られた結果から、球表面上における圧力分布および剪断速度分布はそれぞれ次のようになる。

$$(p - p_{\infty})|_{r=R} = -(\eta_1 v_{\infty} / R) [(1.5 + 1.828 \alpha + 0.743 \varepsilon_1) \cos \theta - (0.351 \alpha + 0.799 \varepsilon_1) \cos^3 \theta] \quad (43)$$

$$d_{r\theta}|_{r=R} = -(v_{\infty} / R) [(1.5 + 0.0636 \alpha + 0.140 \varepsilon_1) \sin \theta + (1.088 \alpha + 2.455 \varepsilon_1) \sin^3 \theta] \quad (44)$$

また、球表面上における応力分布を α, ε_1 の一次の項まで求めると

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} = (v_{\infty} \eta_1 / R) [(1.5 + 1.564 \alpha + 0.140 \varepsilon_1) \sin \theta - (0.412 \alpha + 0.92 \varepsilon_1) \sin^3 \theta] \quad (45)$$

Fig. 1 は $(\tau_{r\theta}|_{r=R}) \left(\frac{R}{v_{\infty} \eta_1} \right)$ と $((p_{\infty} - p)|_{r=R}) \left(\frac{R}{v_{\infty} \eta_1} \right)$

を ($\alpha = 0.25, \varepsilon_1 = 0.20$) θ に対して点線したものである。点線はニュートン流体のときの値である。

圧力抗力を F_n とすると

$$F_n = 2\pi R^2 \int_0^\pi (p_{\infty} - p)|_{r=R} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$= 2\pi R v_{\infty} \eta_1 (1 + \alpha) [1 + \delta_n],$$

$$\delta_n = \frac{0.078 \alpha + 0.176 \varepsilon_1}{1 + \alpha} \quad (46)$$

摩擦抗力を F_t とすると

$$F_t = 2\pi R^2 \int_0^\pi \tau_{r\theta}|_{r=R} \sin^2 \theta d\theta$$

$$= 4\pi R v_{\infty} \eta_1 (1 + \alpha) [1 - \delta_t], \quad \delta_t = \frac{0.177 \alpha + 0.397 \varepsilon_1}{1 + \alpha} \quad (47)$$

全体としての抗力 F は

$$F = F_t + F_n = 6\pi R v_{\infty} \eta_1 (1 + \alpha) [1 - \delta],$$

$$\delta = \frac{0.092 \alpha + 0.206 \varepsilon_1}{1 + \alpha} \quad (48)$$

粘度計で測定したレオロジー状態式を一般化するとき、粘度計での速度勾配 κ に相当する量は変形速度テンソルの第二不変量 Π である。球のまわりの遅い流れについて、この Π の挙動を Stokes の解をもとにして考察する。Stokes の解によると

$$\Pi_s = (9/4) (v_{\infty} / R)^2 [3(\xi^{-2} - \xi^{-4}) \cos^2 \theta + \xi^{-8} \sin^2 \theta]$$

である。

球表面上においては、 $\theta = 0, \pi$ の近傍で Π_s は非常に小さい値となる。また半径方向には ξ の増加とともに急激に減少する。近似したレオロジー状態式 Eq. (4) の $ah(\xi, \theta)$ の項が抗力式 Eq. (46), (47) および (48) において $h(\xi, \theta) = 1$ と近似してよいほど大きく寄与しているのは、 $\theta = 0, \pi$ の近傍の Π_s が小さいところが圧力分布に、また Π_s が半径方向に急激な減少関数であるこ

とが d_{r0} に大きく寄与しているためであると考えられる。

Eq.(46), (47) および (48) の $\delta_n, \delta_i, \delta$ は Stokes の抵抗則からのずれの程度を表わすパラメータである。 δ_n が正であることから圧力抗力は ε_1 の増加とともに増加し、逆に摩擦抗力は減少する。全体としての F は ε_1 の増加につれて減少する。しかし、本研究のように遅い流れを取り扱うときはこれらのパラメータに大きな値を期待することはできず、Stokes の抵抗則からのずれは小さい。

便宜上、ニュートン流体のときと同じまとめ方をするために次式で抗力係数 C_D および Re 数を定義する。

$$Re = \frac{\rho D v_{\infty}}{\eta_1(1+\alpha)(1-\delta)}, \quad C_D = \frac{F}{\left(\frac{1}{2}\rho v_{\infty}^2\right)\left(\frac{\pi}{4}D^2\right)} \quad (49)$$

Eq.(48) から

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (50)$$

したがって C_D と Re の関係はニュートン流体のときと同一である。

§5. 実験結果および Eq.(50) との比較

実験温度は 20°C であった。用いた試料は $\text{C}\cdot\text{M}\cdot\text{C}^*$ の 2.1%, 2.7%, 3.1% 溶液である。非ニュートン粘度の測定は Maron, Krieger & Sisko 毛管粘度計を用いて行なった。みかけ粘度と速度勾配の関係を Fig. 2 に示す。図中の黒丸が実測値である。実線は Eq. 1 から計算した結果である。Eq. (1) のパラメータおよび溶液の密度を Table 3 に示す。

12×15cm, 高さ 50cm の角筒にみたした $\text{C}\cdot\text{M}\cdot\text{C}$ 溶液中を鋼球を落下させて実験を行なった。実験に用いた鋼球は直径が 0.07, 0.08, 0.100, 0.120, 0.159, 0.200, 0.238, 0.3175, 0.397 および 0.635cm の十種類である。鋼球の比重は 7.61 である。落下速度が速い球は 10cm 間の、遅いものは 5cm 間の落下時間をストップウォッチで測定した。一つの径の鋼球につき十回測定してその平均値を求めた。壁面の影響については現在のところ全く不明であるので壁面補正はほどこさなかった。(Slattery は壁効果はないとしている。)

各実験における $3(v_{\infty}/D)$ の値は次のようである。

2.1% 溶液で $12.5 \sim 49.3 \text{ sec}^{-1}$,

2.7% で $4.01 \sim 36.3 \text{ sec}^{-1}$,

3.1% で $2.77 \sim 24.2 \text{ sec}^{-1}$ である。

実測値と計算値の比較を Fig. 3 に示す。

二つの点を除いて $\pm 5\%$ 以内の誤差である。これは富田, Slattery らの式と比較して非常によく一致してい

Fig. 2 Capillary viscometer data compared with Eq. (1)

Fig. 3 Comparison of experimental values of drag coefficient with Eq.(50)

Table 3 Parameters of Eq.(1)

	ρ [g/cm³]	λ_1 [sec²]	η_1 [g/cm-sec]	λ_2 [sec²]	η_2 [g/cm-sec²]	α [-]
2.1%	1.0084	0.0000748	5.60	0.0411	1.33	0.238
2.7%	1.0111	0.000456	17.02	0.289	4.22	0.248
3.1%	1.0124	0.000924	25.08	0.375	5.72	0.228

る。

結 論

1) 毛管粘度計で測定した速度勾配とみかけ粘度の関係を Eq.(1) で表わし、さらにこれを Eq. (4) で近似して、球のまわりの遅い流れを摂動近似により摂動パラメータの一次の項まで解析した結果、抗力に関しては実測

* 第一工業製薬 商品名ファイナガム LV No.1

値と±5%以内の一致をみた。

2) §4で述べたように球のまわりの流動を取り扱うときは、レオロジー状態式の数値勾配範囲を $3(v_\infty/D)$ の値よりかなり小さいところまで実測する必要がある。

3) §4の結果から、高粘度非ニュートン流体の零変形速度粘度は落球法により十分精密に測定できる。

4) 本研究で用いたレオロジー状態式は従来まで使用されてきたものより多くの定数を含む。しかし、この定数の決定は試行法などを含まず比較的容易であること、および抗力に関して簡単な形で整理されていることから定数が多いための支障はない。

「Appendix」

$$v^* = v/v_\infty, \quad r^* = (r/R), \quad p^* = p / \left(\eta_1 \frac{v_\infty}{R} \right), \quad \eta_a^* = \eta_a / \eta_1$$

で与えられる無次元量を用いて定常状態における運動方程式を

あらわすと

$$\begin{aligned} p^{*2} = & \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{\partial}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \\ \left(\frac{\rho R v_\infty}{\eta_1} \right) & \left(v_r^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^{*2}}{r^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \eta_a^* \\ & \left(p^{*2} v_r^* - \frac{2}{r^{*2}} v_r^* - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} - \frac{2}{r^{*2}} v_\theta^* \cot \theta \right) \\ & + 2 \left(\frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} \right) \frac{\partial \eta_a^*}{\partial r^*} + \left\{ r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right\} \frac{1}{r^*} \frac{\partial \eta_a^*}{\partial \theta}, \\ \left(\frac{\rho R v_\infty}{\eta_1} \right) & \left(v_r^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{v_r^* v_\theta^*}{r^*} \right) = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} \\ & + \eta_a^* \left(p^{*2} v_\theta^* + \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^{*2}}{r^{*2} \sin^2 \theta} \right) \\ & + \left\{ r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial \eta_a^*}{\partial r^*} + 2 \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{v_r^*}{r^*} \right) \\ & \frac{1}{r^*} \frac{\partial \eta_a^*}{\partial \theta} \end{aligned}$$

ここで、 $(\rho R v_\infty / \eta_1) \rightarrow 0$ を考えて各々の式の左辺を0とおくと運動方程式は Eq. (6) となる。

Nomenclature

C_D : drag coefficient	[—]	ϵ_i : defined by Eq. (2') $i=1, 2$	[—]
D : diameter of sphere	[cm]	η_a : apparent steady viscosity	[g/cm-sec]
d_{ij} : rate of deformation tensor	[sec ⁻¹]	η_i : parameter in Eq. (1) $i=1, 2$	[g/cm-sec]
F : total drag	[g-cm/sec ²]	$\eta(\omega)$: dynamic viscosity	[g/cm-sec]
F_n : pressure drag	[g-cm/sec ²]	κ : velocity gradient	[sec ⁻¹]
F_t : friction drag	[g-cm/sec ²]	λ_i : parameter in Eq. (1) $i=1, 2$	[sec]
p : pressure	[g/cm-sec ²]	ξ : r/R	[—]
P_∞ : pressure at infinity	[g/cm-sec ²]	τ_{ij} : shear stress tensor	[g/cm-sec ²]
R : radius of sphere	[cm]	ψ : stream function	[cm ³ /sec]
Re : Reynolds number	[—]	ω : angular frequency	[sec ⁻¹]
v_∞ : uniform approaching velocity	[cm/sec]	Π : second invariant of rate of deformation tensor	[sec ⁻²]
α : defined by Eq. (2')	[—]	Π' : defined by Eq. (2')	[—]
δ : " Eq. (48)	[—]	Π : third invariant of rate of deformation tensor	[sec ⁻³]
δ_n : " Eq. (46)	[—]		
δ_t : " Eq. (47)	[—]		

Literature cited

- 1) Dewitt, T. W., Markovitz, H., Padden, F. J., Zapas, L. J. : (1961)
J. Colloid Sci., 10, 174 (1955)
- 2) Leslie, F. M. : *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 14, 36 (1961)
- 3) Slattery, J. C. : *A. I. Ch. E. Journal*, 8, 663 (1962)
- 4) Tomita, Y. : *Bull. J. S. M. E.*, 2, 469 (1959)

圧縮気体中の液体蒸気含量について (中原伯子・平田光穂, 化学工学, 29, 746~753 (1965)) 圧力下の蒸気圧は一般に Poynting の式で示される。しかし極性の液体の圧縮された気体中の蒸気圧は Poynting の式からの計算値よりはるかに大きい。この増加量は液体と気体の分子間の相互作用に基づくものであり、圧縮気体への液体の溶解度と考えられる。したがって、その溶解度 (α) を気相中の気体の分圧に対する Poynting 圧以上の液蒸気圧の比と定義する。 α は同一液体の系では温度と気体の物性との関数であり、全圧には依らない。液体アンモニアと水について α を計算する推算式を得た。これらの式を用いて分圧を求め、実測値および Krichevsky-Khazanov の式から計算した分圧との比較をおこなった。

臨界溶解温度とその組成 (平沼充安・久郷昌夫, 化学工学, 29, 753~759 (1965)) 筆者らは前報で, Guggenheim が導いた鎖状分子溶液における成分の活量の式の r (分子が占める格子点の数) および w (過剰配位エネルギー) を実測値より規定しつつも成分系溶液にも拡張して、二成分定数のみを用いて多成分系気液平衡関係を精度よく予知しうることを示した。さて、臨界溶解温度およびその組成を予知する方法は正則溶液など特殊な場合をのぞき見当らない。そこで、これらの式をもちいて臨界温度とその組成を求めたところかなりよく実測値と一致した。さらに r および w の値と分子の水素結合能力との関係を比較した。

二成分系の気液平衡関係の相関 (中西浩一郎, 化学工学, 29, 760~765 (1965)) 二成分系について両成分の蒸気圧と大気圧における気液平衡関係のデータより、等温における全圧・モル組成関係または減圧下における沸点曲線を計算することのできる一相関法を提案する。この方法は共沸および非共沸いづれの場合にも適用でき、共沸条件についての既知のデータを正確に再現することができた。

移動床型半連続向流イオン交換塔における濃度分布の数値計算 (権藤晋一郎, 化学工学, 29, 766~771 (1965)) 移動床型半連続向流イオン交換塔の定常状態における濃度分布を、理想段における物質収支を表わす差分方程式にもとづいて算出する方法を提示した。

この方法を強酸性陽イオン交換樹脂によるナトリウムイオン-水素イオン系の交換に適用し、移動床における濃度分布を種々の両相容積接触比について求めた。

数値計算の結果を実験結果と対比し、この計算法によって移動床における交換帯長を推定する方法について論じた。

粒体および粉体材料層の減率乾燥速度解析 (桐葉良三・林信也・藤谷義, 化学工学, 29, 771~778 (1965)) 非吸着性の粒体及び粉体層の減率乾燥第1段の乾燥機構に対する既報の実験的研究より、材料層中に内部蒸発が起きている層が存在していることがわかっていく。本報においては、この層における物質移動を1種の擬定常状態の近似により解析して、乾燥速度式を求めた。この解析による乾燥速度の計算値は実測値とよく一致した。同じ考えに基づいて減率乾燥第2段の機構を解析し、乾燥速度、乾いた層と湿った層の境界面の温度との実験値を説明することができた。

被毒バナジウム触媒による亜硫酸ガスの酸化反応の工学的研究 (石井忠雄, 化学工学, 29, 779~784 (1965))

活性低下した工業用バナジウム触媒による硫酸製造用転化器の操業条件を解析する目的で、被毒した触媒により、 SO_2 の酸化反応速度を温度 400~600°C、転化率 0~ α_c の範囲で測定した。この値を用いて二段式断熱型転化器の解析を行ない新触媒の場合と比較した。Weller の実験式を使用して求めた被毒触媒の速度恒数は新触媒の40~60%に低下していたが、一般的操業指針にもとづく転化器の最終出口転化率は約2%低下する。

ニュートン流体およびビンガム流体の管内乱流 (北浦嘉之・長瀬洋一, 化学工学, 29, 784~790 (1965)) ニュートン流体の対数速度分布式とカルマン定数 κ_N の表式を2つの仮説、1. 乱流エネルギーの局所等方的消散、2. 乱流エネルギーと乱流応力との間の輸送機構の相似性、の下に預えきする。ビンガム流体に対しても上の仮説を用い、速度分布および断面の平均速度を表わす x の表式を導く。 κ_N と x の理論式は実験結果とよく一致し、また不完全ビンガム流体の $x = x_I$ は Fig. 5, 6 に示したごとく $x - dx$ に等しい。

一般化ニュートン流体の球のまわりの遅い流れについて (吉岡直哉・中村良, 化学工学, 29, 791~796 (1965))

毛管粘度計で測定した見かけ粘度を Eq.(1) で近似し、球の場合これを Eq.(4) で近似した。Eq.(4) を用いて球のまわりの遅い流れについて摂動法により近似解を求めた。見かけ粘度の実測値を Fig. 1 に示す。Eq.(23) の流れ関数 ψ_0, ψ_1, ψ_2 は Eq.(26), (35), (40) で与えられる。 Re と C_D を Eq.(49) で定義すると C_D と Re の関係は Eq.(50) で与えられる。抵抗係数 C_D の実測値と計算値の比較を Fig. 3 に示す。誤差は $\pm 5\%$ 以内である。

タービン型攪拌羽根の消費動力に対する吐出流の影響 (竹田邦彦・星野照彦, 化学工学, 29, 797~803 (1965))

攪拌羽根の回転抵抗力および消費動力を、一次回転流に起因するものと二次循環流に起因するものに分けて研究し、1) 混合作用および一次回転流をおこす主因は吐出流であることを指摘し、2) 二種類のトルク成分の測定装置をもちいて、インペラの羽根枚数と羽根幅をきめる実験的根拠を得、3) 二種類の成分の和として消費動力をあらわす式をつくり、攪拌装置の基礎的計画における型式・寸法の選定に対する理論的な考え方を導いた。

凝集性懸濁液の管内流動に関する諸因子 (北浦嘉之・長瀬洋一, 化学工学, 29, 804~806 (1965)) f_{loc} 内の水分による有効濃度に関する補正係数 λ を測定した。 λ は濃集程度に応じて大きく変化し、凝集性懸濁液の粘度に大きく影響する。露み液係数 e と単一粒子の形状係数 k_{1p} について考察した。懸濁液の降伏応力は Fig. 2 のごとく塑性粘度と関係する。管内流れにおける compaction concentration と管径の関係を Fig. 3 に示す。