に影響するところから図10では最適サイズと各要因の関係を求めてみた。ここで特徴的なことは $C_{I,OPT}$ の幅が、収益性の高い場合には狭いのでよいが、低い場合には著しく広がるので経済環境の多少の変化によって最適点から大きく偏倚し収益性を更に悪化させる可能性がある点である。

近來の化学工業では高収益の製品は少なく、加うるに予測の信頼度がまだ十分でないため、この点には特に留意すべきであろう。

本例では第1次設備のみについて検討したが、現価法の性質上増設時期がはなれている場合には、増設設備を含めることの影響は比較的少ない。一般的には——特に

収益性の低いプラントの場合——増設プラントも含めた検討が必要であるが、後日に譲りたい。

結 語

以上二つの例を挙げて化学プラントの最適化に当たって、市場分析、生産計画などの経済性に関する要因と設計計算——特にプラントサイズなど——との関連性を論じた。また手法としてはシミュレーションが実用的であることを示したが、この種の最適化問題の真に有意義な結論をうるためには未だ十分なものではない。今後この分野の研究が更に進められることを切望する次第である。

参 考 文 献

- 1) Dzielinski, B.P. & Gomory R.E.: *Management Sci.*, 11, No. 9, 874 (1965)
- 2) Margee, J.F.: *Harvard Business Review*, 42, No. 4, 126 (1964)
- 3) 宮武 修, 中山 隆: モンテカルロ法 (日刊工業社)
- 4) 水野幸男: 在庫管理入門 (日科技連)
- 5) Reynard, E.L.: *Ind. & Eng.*, 58, No. 7, 61 (1966)
- 6) Urban, W.J. & Holland, E.A.: *Chem. Eng.*, March 28, 103 (1966)
- 7) White, J.M.: *Jour. Ind. Eng.*, 17, No. 5, 275 (1966)
- 8) 土方 武: 化学経済, 66年8月号 (780)
- 9) H. ウォルド, 森田優三監訳: 需要分析, 春秋社
- 10) H. Davis: *The Analysis of Economic Time Series*, The principia press of Trinity university.
- 11) Dorfman: *Application of Linear Programming to the Theory of the Firm*, University of Calif. press (1951); 小宮隆太郎訳: リニヤープログラミング, 日本規格協会 (1955)
- 12) B. L. Schwartz: *Management Science*, B-538, 12, No. 12 (1966) 8月号

プロセスシステム工学における感度解析の役割*

高 松 武 一 郎**

1. 感度解析の重要性

現在、種々の最適化手法が開発されているが、これらの手法は、普通、対象とするプロセスやプラントの挙動が、数式的に表現されているという前提から出発している。ところが、数式モデルというのはあくまで実際の現象をある程度近似表現したものにすぎず、そのモデルに含まれているパラメータも多かれ少なかれ誤差を含んだものであり、また、種々の原因で変化するものと考えられる。したがってプロセスシステム工学の重要な内容の一つであるプロセスやプラントの最適化問題に関しても、ある数式モデルを基にして何らかの評価関数を最大

あるいは最小にする最適操作量を決定すれば、数学的にはそれで解決されたのかも知れないが、実際のプロセス、プラントにその解を適用しようとする時には、数式モデルのパラメータに誤差が含まれていたり、あるいは不測の変化に対してもその最適解を用いて十分であるというある程度の保障がなければ、実際の意味からは最適化問題が解決されたことにならないのである。もしパラメータの変化に対して最適値が大きく偏りするのであれば、新しく変化したパラメータについて最適操作量を計算しなおさなければならないであろう。このように最適化という問題をより実際の立場から見た時、必然的にモデルのパラメータ変化に対して最適な状態というのはどの程度悪くなるのか、またそれを打ち消すためにはどのようにすれば良いのかといった感度解析の必要性が生

* 昭和42年1月21日受理

** Takeichiro Takamatsu 京都大学 工学部

れてくる。

また、プロセスシステムの最適操作量が計算で求められたとしても、実際にはこの最適値に厳密に維持されない場合が多い。このとき最適操作量の微小摂動に対する最適評価関数の変化の大きさ、すなわち最適操作量の感度が求められれば、許容される評価関数の値の変動内にプロセスを維持するには最適操作量がどの程度の精度でなければならないかが考案できるであろう。

さらに進んで、パラメータ、操作量のさけえられない微小変動に対する評価関数の感度が所期の目的からして大きすぎる場合、パラメータの変化に応じて操作量を調節する適応系の設定や操作変数の変更など、システムの設計自体を変更するのに重要な情報がえられる。また一般にプロセスシステムを設計する一つの目標として「種々の入力、外乱に対して感度の小さいシステムを作ること」があるが、予め感度を評価関数に入れて設計することや任意に動かさうパラメータ、変数をシステムの感度が小さくなるようにすることなど、プロセスやプラントの最適設計そのものに対してこの感度というものを予め考慮して設計してゆく必要が出てくるのであって、工学系の設計の本質ともいうべきものであろう。

このような感度解析の役割、重要性について最近多くの人々が認識しつつあり、1964年の International Symposium of Sensitivity Analysis においても、Tomović などは次のような問題が今後解決されなければならないことを指摘している¹⁾。

i) パラメータベクトルの基準状態の周りの微小摂動に対する感度——現在研究されているすべての問題はこの範囲に入るもので、後節においてその内容を詳述する予定である。

ii) パラメータベクトルの基準状態の周りの大きい変動に対する感度、すなわち、大域感度——プロセスシステム工学において取り扱う変動は必ずしも基準状態のまわりの微小摂動とは限らず、大幅に変動する場合も多い。例えば蒸溜プロセス、化学反応プロセスにおける原料組成、触媒の活性などは相当変化するものと考えねばならない。このような場合の大域感度についてはほとんど研究がなされておらず、今後の研究開発が期待される。

iii) 数式モデルの次数の低減に対する感度——この問題もほとんど研究が進んでおらず、しかもプロセスシステム工学にとってきわめて重要な課題である。例えば熱伝導の現象を

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = -\lambda_0 A \frac{\partial T}{\partial L} \quad (1.1)$$

あるいは

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = -\lambda_0 (1 + \alpha T) A \frac{\partial T}{\partial L} \quad (1.2)$$

Q : [kcal], θ : [hr], T : [$^{\circ}$ C], L : [m],

A : [m^2], λ : [$\text{kcal}/\text{m}^2 \cdot \text{hr} \cdot ^{\circ}\text{C}$], α : 定数

のいずれの式を用いるか、あるいはまた管式反応プロセスのモデルとして、1次元拡散で流体混合の度合を表現した

$$E \frac{d^2 c}{dx^2} - u \frac{dc}{dx} - r(c, T) = 0 \quad (1.3)$$

E : [m^2/hr], c : [mol/m^3], x : [m],

u : [m/hr], r : [$\text{mol}/\text{m}^3 \cdot \text{hr}$]

を用いるべきか、近似的に押し出し流れと考えた

$$-u \frac{dc}{dx} - r(c, T) = 0 \quad (1.4)$$

を用いて十分工業的設計、操作の目的に合致するかどうかなど用いる数式モデルの方程式の形に対する感度はモデルアイデンティフィケーションの鍵になると考えられる。いわゆる Engineering science として考えれば式(1.1)より(1.2)、式(1.4)より(1.3)が適当であることは明らかであるが、現象に忠実であればあるほど数式モデルは複雑となり次数が高くなって、効果的にプロセスシステムを設計、操作するには無駄をしていることになりかねない。この場合、数式モデルの次数の感度がわかれば必要にして十分な最も簡単なモデルを選定することが可能となるであろう。

iv) 連続型あるいは分布系の数式モデルから離散型のモデルへの変換に対する感度——この問題もプロセスシステム工学の分野でしばしば出会うものである。例えば流れの混合特性を表現するのに、1次元拡散モデルによる分布系として取り扱うと非定常的な考察が面倒であるから、槽列モデルがよく用いられるが、これは連続型から離散型への変換であり、この変換によって問題にしている解がどの程度の誤差をうけるか、また誤差を最小にするにはどのようなパラメータ間の関係が用いられるべきかなどの感度解析の立場からの保証が離散型によるシステム設計には必要である。

さらに一般的には、微分方程式をデジタル計算機で計算するという事は、微分を差分におきかえる事であるが、この変換の誤差の問題、あるいはまた非線型系を局所線型化によりデジタル計算機で解く場合の程度の局所線型化で必要十分であるかなど重要な基本的問題を含むものである。

v) 構造的感度、すなわち、システムを構成している種々の機能ブロックの変化の影響に対応する感度——プロセスシステム工学の分野では種々の機能を表現する関数あるいは微分方程式群の形を決定する必要のある場合がしばしばある。例えば、素反応の複雑な結合である反応系を同定する場合、図1は A_1 から D_1 が生成される全く空想的な二つの構造を示したものであるが、図(a)

と考えた場合の D_4 の挙動と 図 (b) と考えた場合の D_4 の挙動がほとんど変化しなければ、工学系の設計の場合にはいずれの構造で同定しても満足できるシステムが得られるであろう。またこのような構造的感度が小さければ、それらの構造のシステムを一まとめにしたものに対して最適設計、操作の政策を求めておくことによって工業的にきわめて便利に利用できる。

以上のいずれの問題もまだ研究されかけただけであり、今後ますますこの方面の研究が必要であろう。これら以外にもプロセスシステム工学に特有なものとして

vi) 最適操作量の感度——ケミカルプロセスでは流量を操作量としてとることが多いが、流量の測定は比較的簡単であるとはいえ、相当大きい誤差を含むものである。しかもプロセスシステム工学の見地からすると最適政策の評価関数に対して流量は大きい影響をもつ。したがってたとえ流量の最適操作量が数理的に得られたとしてもその値に厳密に維持する事は不可能に近く、流量変動、すなわち、最適操作量そのものの変動に対する感度を知っておく事はきわめて重要である。

さらに広範な問題として、すでに説明したが、

vii) プロセス、プラントの最適設計法そのものにこの感度解析の概念をいかに適用してゆくか。

といった問題も今後解決されるべきであろう。この方面の研究、特にケミカルプロセスでの考察は皆無といってもよく、多くの参考文献をあげてその体系を述べることは筆者にとってきわめて困難であるので、以下に感度の数学的定義から述べ、代表的な文献によって i) から vii) までの取り扱いの現状にふれさせていただくことにする。

2. Tomović による感度係数の定義²⁾

前節で述べた種々の問題のうち最も簡単でまた他の感度を考察する基礎となるのは、動的システムに対する数式モデルのパラメータが変化するとき、そのモデルの状態変数が描く軌跡がいかなる変化を受けるか（いわゆる構造安定）を知ることにあるが Tomović はその指標として以下に述べる感度係数を定義している。

簡単のために、今考えている動的システムは

$$F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t, q_0) = 0 \quad (2 \cdot 1)$$

で表わされているとする。例えば逆混合を考えた管式反応装置内の微小区間でのプロセス方程式は

$$E \frac{d^2 x}{dt^2} - u \frac{dx}{dt} - r(x, T) = 0$$

で表わされ、 E, u などは式 (2・1) のパラメータ q_0 に相当している。ここに x はシステムの状態を表わし、 q_0 はパラメータとする。また q_0 の値が変われば x の値も

(a) (b)
図 1 空想的な化学反応システムの構造

かわるのでこの (2・1) の解を $x(t, q_0)$ で表わすことにする。この式 (2・1) で表わされるシステムのパラメータに何らかの原因で dq の変化が起こったときの解は、

$$F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t, q_0 + dq) = 0 \quad (2 \cdot 2)$$

を解けばえられるが、この二つの式の解、 $x(t, q_0 + dq)$, $x(t, q_0)$ の差の dq に対する比

$$du = \frac{x(t, q_0 + dq) - x(t, q_0)}{dq} \quad (2 \cdot 3)$$

は q_0 のまわりの微小変化に対する状態変数 x の感度を表わすと考えられる。

$dq \rightarrow 0$ とすれば

$$\lim_{dq \rightarrow 0} \frac{x(t, q_0 + dq) - x(t, q_0)}{dq} = \frac{\partial x(t, q_0)}{\partial q_0} = u(t, q_0) \quad (2 \cdot 4)$$

が得られるが、この $u(t, q_0)$ を動的システムの感度係数と呼ぶ。式 (2・4) で定義された感度係数 $u(t, q_0)$ の満たす微分方程式は式 (2・1) から容易にわかるように

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \cdot \frac{\partial \ddot{x}}{\partial q_0} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_0} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_0} + \frac{\partial F}{\partial q_0} = 0 \quad (2 \cdot 5)$$

ここで $\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_0} = \dot{u}$, $\frac{\partial \ddot{x}}{\partial q_0} = \ddot{u}$ なる関係を用いれば式 (2・5) は

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \ddot{u} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{u} + \frac{\partial F}{\partial x} u = - \frac{\partial F}{\partial q_0} \quad (2 \cdot 6)$$

となる。式 (2・4) の感度係数 $u(t, q_0)$ は、感度方程式と呼ばれる式 (2・6) を解けば得られるが、ここで注意しておかねばならないことは、もとのプロセスシステムを表わす微分方程式が非線型であっても感度方程式は線型になることである。またこの式 (2・6) に対する初期条件は式 (2・1) と式 (2・2) とで初期条件 $x(0)$ に変化がなければ、

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= 0 \\ \dot{u}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 7)$$

で与えられる。したがって式 (2・1) と式 (2・6) をそれぞれの初期条件のもとで同時に解く事ができる。特に式 (2・1) を解くアナログ計算機のプログラムと同様のプログラムで式 (2・8) を解きうることに留意しなければならない。

3. 感度関数の意味とその応用例

前節では、微分方程式で表わされるシステムにおいて、含まれているパラメータ q_0 の微小摂動に対する状態変数 x の変化が感度係数と定義されることを述べたが、プロセスシステム工学における最適化問題では、既に第1節でふれたようにシステムのパラメータや操作量の微小摂動が評価関数の値に及ぼす影響が重要な問題となる。すなわち、パラメータや操作量の微小摂動によって状態変数の値がかなり変化しても、究極的に状態変数や操作変数の関数である評価関数の値が変わらなければ、それらの変動はそれほど重視する必要はなく、パラメータは不変としてシステムを合成してもよく、あるいはまた操作量の制御の精度を高く保つ必要はないであろう。一方パラメータや操作量の微小摂動が評価関数の値に大きく影響するならば、パラメータの変動につれて最適政策を満たす操作変数を適宜変化させてゆかねばならない。

上記のようなパラメータや操作量の微小摂動に対する評価関数の変動の度合を表わす関数を感度関数と呼ぶことにする。

3.1 感度関数の定義

まずダイナミックシステムにおける感度関数の定義の一例をあげてみよう³⁾。ここで考えるシステムは

$$\dot{x} = f(t, x, v, q) \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

x : n 次元のベクトル, 状態変数

v : r 次元のベクトル, 操作変数

q : $q = (q_1, \dots, q_m)$ m コのプラントあるいはプロセスのパラメータ

で表わされるものとする。

評価関数は一般に状態変数, 操作変数, パラメータなどの汎関数としてつぎのように表現できるであろう。

$$V = \int_{t_0}^T P(x; v; q; t) dt \rightarrow \text{Min} \quad (3.2)$$

q が与えられれば、上式の V が最小値を示すようにプロセスの操作変数, 設計変数の最適値は適当な数理的手法により求められる筈である。例えば図2は最適操作量を決定する操作を模式的に画いたものであるが、プロセス

図2 最適操作量を決定するための模式図

のパラメータ q が決められると式 (3.2) の評価関数を最大あるいは最小にする様に、最適操作変数 $v^*(t)$ を計算でき、システムの状態 x がシステム方程式 (3.1) から求められ、また $v^*(t)$ は操作量を決定する操作ブロック

で何らかの成分 b を b_0 とえらぶことによって与えられる。 b は p 次元のベクトルで、 q がきまれば V を最適ならしめる最適な $v^*(t)$ を出す b_0 がきまるので、

$$b_{0i} = g_i^*(q_1, q_2, \dots, q_m), \quad i=1, 2, \dots, p \quad (3.3)$$

したがって、最適化計算の結果の操作量は、

$$v^*(t) = \pi_c[x(t), t, b_0] = \pi[x(t), t, q] \quad (3.4)$$

と表現できる。

最適操作量を決定する操作の成分 b_0 が $b_0 = g^*(q)$ から b ($\neq b_0$) に変動したとすると、 $v^*(t)$ は与えられたシステムに対してもはや最適でなくなる。すなわち

$$\pi_c[x(t), t, b] \neq \pi_c[x(t), t, b_0]$$

となり、この時のシステム動特性は

$$\dot{x} = f[t, x, \pi_c[x(t), t, b], q] \quad (3.5)$$

で与えられる。このシステム方程式に対する評価関数の値を簡単のため $V(b, q)$ で表わす。この値は明らかに最小値ではなく $V(b, q)$ の b に関する最小値は明らかに $V(b_0, q)$ である。 $b - b_0$ なる変動による評価関数の値の変化はたとえば最小値問題に対して、

$$\Delta V = V(b, q) - V(b_0, q) > 0 \quad (3.6)$$

であり、 $V(b, q)$ を $b = b_0$ の周りで Taylor 展開すれば

$$\Delta V \cong \sum_i \frac{\partial V}{\partial b_i} \bigg|_{b=b_0} \delta b_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial b_j} \bigg|_{b=b_0} \delta b_i \delta b_j \quad (3.7)$$

ただし

$$\delta b_i = b_i - b_{0i}$$

$V(b, q)$ は $b = b_0$ のとき最小値をとるから $b = b_0$ の点では一次の微係数は zero となり

$$\Delta V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial b_j} \bigg|_{b=b_0} \delta b_i \delta b_j > 0 \quad (3.8)$$

と与えられる。

つきに最適化計算を行なうブロックの成分には変動がなく $b_0 = g^*(q_0)$ で与えられる成分を用いて、 q_0 なる標準パラメータ値に対して設計されている最適化計算システムが使われているとき、プロセスあるいはプラントのパラメータが上述の標準値 q_0 からベクトル q ($\neq q_0$) で与えられる他の値に変動したとき評価関数がどのような影響をうけるか考察しよう。

プラントパラメータが q で与えられ最適化の計算ブロックの成分の値が $b_0 = g^*(q_0)$ で与えられているとき、それに対応する最適評価関数の値を $V(b_0, q)$ で示すことにする。そうすれば $\delta q_i = q_i - q_{0i}$ なる変化による評価関数の変動は

$$\Delta V = V(b_0, q) - V(b_0, q_0)$$

となり、 $V(b_0, q)$ を q_0 の周りに Taylor 展開すれば、第1近似として

$$\Delta V \cong \sum_i \frac{\partial V(b_0, q)}{\partial q_i} \bigg|_{q=q_0} \delta q_i \quad (3.9)$$

となる。この式(3.9)に含まれる微係数 $\frac{\partial V(b_0, q)}{\partial q_i} \Big|_{q=q_0}$ をパラメータ q_i に対する評価関数の感度関数と呼ぶのである。なお式(3.8)の2次の微係数ももちろん感度関数と呼ぶ事ができる。ここで注意しなければならないのは、 q は予め与えられたものであり、 $V(b_0, q)$ は $q=q_0$ で q に関して必ずしも最小値をとる必要はないから1次の微係数で表わされる感度関数は零になるとは限らないことである。したがって ΔV は変動するパラメータの種類や変動の仕方によって正であったり負であったりする。もし $V(b_0, q)$ が $V(b_0, q_0)$ より小さくなれば、成分値として $b=q^*(q)$ を持つように最適計算システムを調整すれば評価関数の値をより低くすることができる。

Figurek はシステム方程式が

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A_0(t)x + B_0(t)u, & x(t_0) &= x_0 \\ y &= H_0(t)x \\ x: \text{状態変数} & & y: \text{システム出力} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

と線型で表わされ、評価関数が

$$V = \int_{t_0}^T [\langle y, Q_0(t)y \rangle + \langle u, R_0(t)u \rangle] dt + \langle x(T), Kx(T) \rangle \quad (3.11)$$

のごとく2次型で表わされる場合、任意の初期条件に対して感度関数を一般的に求められることを示している。

3.2 最適操作量に対する感度関数⁽¹⁾

化学プロセスの最適化問題においてその操作量として流量をとることが多く、実際問題としてはその操作量を完全に最適値に維持することは非常に難しい問題である。したがって最適操作量の微小摂動による評価関数の変動、すなわち感度関数を知ることは実際の操作上きわめて有意義である。

化学プロセスの特徴の一つはその系が多くの単位要素が複雑に結合されたシステムであるということであろう。このような大規模な複合システムに対して完全に動的なモデルを作り、それに基づいて前述のような動的最適化を考えてゆくことは現在のところ非常に難しい問題であることは明らかである。そこでひとまず系全体を定常的に取り扱って、いわゆる定常最適化を行ない、各操作量の最適値を求めそれに適した設計変数を定めたり、各操作量を最適値にいつも維持するような操作、制御を考えるのも一つの方法と考えられ、現在この段階の最適化に対して多くの実用例がみられる。

さて、化学プロセスの最適操作量を求める方法の有力な手法と考えられるものに離散型最大原理(D. M. P.)があるが、このD. M. P.を用いて最適化問題を解く場合、随伴系の値を利用することにより簡単に感度関数の値が求められることをここで示してみよう。

図3に示されるような N コの並流多段結合系を考えることにする。このようなプロセスの定常状態は、次の

図3 離散型プロセス

ようなプロセス方程式で示することができる。

$$\left. \begin{aligned} x_i^n &= F_i^n(x^{n-1}, u^n) & n=1, 2, \dots, N \\ i &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

ここで x^{n-1} は第 n ステージに入る m 次元ベクトルの状態変数で、 u^n は第 n ステージに入る r 次元の操作量、例えば反応プロセスでは加熱、冷却流体の流量、操作圧力など、その他一般に決定すべき設計変数、操作変数である。このようなプロセスの定常最適化問題というのは一般に次のように定式化できる。

『与えられた初期値 $x^0=a$ に対して $\Phi = \sum_{i=1}^m c_i x_i^N$ で表わされる評価関数を最大(あるいは最小)にするように式(3.12)に含まれる各段の操作量 u^n の列 $(u^1, u^2, \dots, u^N)$ を決定せよ。』

この種の問題の解をうる方法として開発されてきたのがD. M. P.なのであるが、評価関数を極大、極小ならしめる場合の結果を次に示しておく。

式(3.12)に対する随伴系を次式のように導入すると

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i^{n-1} &= \sum_{j=1}^m \lambda_j^n \frac{\partial F_j^n(x^{n-1}, u^n)}{\partial x_i^{n-1}} \\ \lambda_i^N &= c_i \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

各段の最適操作量は、Hamiltonian H^n を

$$H^n = \sum_{i=1}^m \lambda_i^n F_i(x^{n-1}, u^n) \quad (3.14)$$

とおいたとき次の条件から定められる。

$$\frac{\partial H^n}{\partial u^n} = 0 \quad (3.15)$$

問題は、この方法によって各段の最適操作量が決定されたときこの操作量の最適値からのずれが、P. I. に対してどのような影響を及ぼすかを知ることである。

ところが最適操作量は u^n の変動の評価関数に及ぼす一次の摂動が零になるようなものであるから、最適操作量 u^n の変動の評価関数に及ぼす影響は一次の摂動論からは求められず、2次以上の摂動を調べる必要がある。その結果、 $n=\nu$ 番目の段の操作量がその最適値から ε だけ偏異したとき評価関数の最適値からのずれ $\varepsilon^2 Z_1^N$ は次式で与えられる。ただし、ここでは簡単化のために評価関数としては $x_1^N \Rightarrow \text{Max}$ 、また、各段には各1コ操作量のみがあると仮定しておく。

$$\begin{aligned} Z_1^N &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 F_i^r(\bar{x}^{N-1}, \bar{u}^N)}{\partial (\bar{u}^N)^2} \lambda_i^N \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=\nu+1}^N \sum_{i=1}^m \lambda_i^n \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 F_i^n(\bar{x}^{n-1}, \bar{u}^n)}{\partial \bar{x}_j^{n-1} \partial \bar{x}_k^{n-1}} y_j^{n-1} y_k^{n-1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

図4 多段抽出プロセス

図5 平衡関係

図6 感度関数の数値計算例

ただし

$$\left. \begin{aligned} n &= \nu & y_i^\nu &= \frac{\partial F_i^\nu(\bar{x}^{\nu-1}, \bar{w}^\nu)}{\partial \bar{w}^\nu} \\ n &\geq \nu+1 & y_i^\nu &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i^\nu(\bar{x}^{n-1}, \bar{w}^n)}{\partial \bar{x}_j^{n-1}} y_j^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 17)$$

Takamatsu ら⁴⁾は10段からなる液-液抽出プロセスを例にとり離散型最大原理から感度関係を求めている。図4において、 q は原液の流量、 w^n は第 n 段目における溶媒流量、 x_R^n 、 x_E^n はそれぞれ第 n 段を去る抽剤および抽料中の抽質の組成である。したがって、このプロセスの第 n 段に対して次の関係式が成立する。

<物質収支>

$$q(x_R^{n-1} - x_R^n) = w^n x_E^n \quad n=1, 2, \dots, N \quad (3 \cdot 18)$$

<平衡関係>

$$x_E^n = \phi(x_R^n) \quad (3 \cdot 19)$$

<各段における利益>

$$p^n = \alpha w^n x_E^n - \beta w^n \quad (3 \cdot 20)$$

ただし、 α 、 β はそれぞれ抽質および抽剤の単価である。このとき、全段から得られる利益 $\sum_{n=1}^N p^n$ を最大にするには各段の抽剤の量 w^n をどのように与えればよいか。またその最適値からのずれが評価関数にどのような影響を及ぼすかという問題である。

ここですべての変数を無次元化し

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha}, \quad u^n = \frac{w^n}{q}, \quad x_1^n = x_R^n,$$

$$x_2^n = x_2^{n-1} + u^n(x_E^n - \lambda), \quad x_2^0 = 0$$

のように新しく変数を定義すれば全段からの利益 $\sum p^n$ は $x_2^N \cdot \alpha \cdot q$ (α 、 q : 定数) となるから式(3・18)~(3・20)は次式のようにになる。プロセス方程式が

$$x_1^{n-1} = x_1^n + u^n \phi(x_1^n) \quad x_1^0 = a \quad (3 \cdot 21)$$

$$x_2^{n-1} = x_2^n + u^n(\lambda - \phi(x_1^n)) \quad x_2^0 = a \quad (3 \cdot 22)$$

なるとき、 x_2^N を最大にするような $u^1, \dots, u^n$ を決定し、その感度関数を求める問題となる。

数値計算例としては

$$N=10, \quad x_1^0 = a = 0.95$$

とし、平衡関数を図5のように、A、B、Cと変化させたとき $\lambda=0.05$ に対して感度関数 $|Z_n^N|$ を示したのが図6である。この結果、各段での溶媒流量の値の変化の最適政策に及ぼす影響の度合は必ずしも等しくなく、どのステージの流量に注目しなければならないかがわかる。

4. システムシンセンシスにおける感度解析の役割

現在、最適な系の設計は種々の数学的な最適化手法によって非常な進歩をとげているが、実用に際しての最大の疑問は、システムモデルのパラメータ値への依存度が

高いために、システムパラメータの誤差、変動が実際の評価関数に本質的な低下をもたらすのではないかという点である。したがって、パラメータのある範囲にわたって良好なシステム特性を保障するようなシンセシスの手法を開発してゆくことが望ましい。

4.1 評価関数のなかに感度を導入すること⁸⁾

通常の評価関数にプロセスの感度係数を含んだ項を付け加え、そのように修正された評価関数を最大あるいは最小にするような操作変数を見出すことによって、上述の目的を達成しようとするものである。

例えば次のような微分方程式で記述されるシステムについて考察する。

$$\dot{x}_i = f_i(x, m, t, q) \quad x_i(0) = c_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

ここに、 $x(t)$: n 次元状態ベクトル

$m(t)$: r 次元操作ベクトル

q : N 次元のプロセスパラメータベクトル

評価関数としては

$$V = \int_0^T f_0(x, m, t) dt \rightarrow \text{最小} \quad (4.2)$$

このように記述された最適化問題の解がパラメータの変化に対して非常に鋭敏であれば、僅かなパラメータの変化によってシステムの評価関数は最適状態から大きくへだたったものになりうる。一般に工学的設計では、種々の変動に対して insensitive であることもシステムの良否を左右する一つの尺度であるが通常の評価関数に対して最適化の方法を適用しているだけではこの要求が必ずしも満足されているとはいえない。したがってこのような insensitive であるという要求をも含んだ修正評価関数を見出すことが一番大切な問題となってくる。例えばもとの評価関数に次のような項を付加するのである。

$$\hat{J} = \int_0^T g_0(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}) dt \quad (4.3)$$

ここに $y^{(i)}$ は次式で示される感度係数である。

$$y^{(i)} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \quad (4.4)$$

式(4.3)をもう少し簡単化して次のごとく考えてみると、

$$\hat{J} = \int_0^T \sum_{i=1}^N g_0^{(i)}(y^{(i)}) dt \quad (4.5)$$

これをもとの式(4.2)に付加して式(4.1)の最適化問題を

$$V + \hat{J} = \int_0^T f_0(x, m, t) dt + \int_0^T \sum_{i=1}^N g_0^{(i)}(y^{(i)}) dt \quad (4.6)$$

のように修正された評価関数に対する最適化問題と考えることによってパラメータ変動に対してより insensitive な最適解を求めようとするのである。

Lee らはこの考え方の例としてごく簡単な抽象的な数

図7 インセンシティブな構造の考察例

式モデルを用いて数値計算結果を例示しているが、プロセスシステム工学において実際の場合に評価関数を修正するため感度係数や感度関数のどのような関数をどのような形で入れればよいかは大問題であり、現在のところ全く未開拓の問題である。

4.2 Insensitive なシステム構造のシンセシス

種々の変動に insensitive なシステムを設計することがシステム工学の一つの大きな目標である。プロセスパラメータの大きい変化に対し、これを打ち消すようなシステムをシンセシスすることが最も基本的な問題であろう。

Meerov⁹⁾ はプロセスゲインの変化を打ち消す種々の構造を考察し、その安定性の検討の重要性を指摘している。

例えば図7の(a)に示すような線型のプロセスでプロセスゲイン K が何らかの外乱により変化する場合、出力を K の変化に対して insensitive にするような構造のシンセシスについて、Kochenburger の論文⁷⁾ の例題について論議している。その考え方は例えば図7(b)の x_0/x_i は

$$\frac{x_0}{x_i} = \frac{(1+T_1s)^2 K}{\begin{bmatrix} m^2(1+T_1s)^2(1+T_1s)^2(1+T_2s) \\ + m^2(1+T_1s)(1+T_1s)(1+T_2s) \\ + m(1+T_1s)^2(1+T_2s) + (1+T_1s)^2 K \end{bmatrix}} \quad (4.7)$$

$$m = 1/K_d$$

となり、 $m \rightarrow 0$ で式(4.7)は K の値に無関係となる。したがって K_d を十分大きくとったときの系の安定性を吟味しておけば insensitive なシステムを合成することができるわけである。

よく似た考え方で実際のプロセスシステムに付加的な機能ブロックをつけ、そのブロックのパラメータをもとのシステムパラメータの出力に対する感度が零になるように選ぶこともできる⁸⁾。

あ と が き

プロセスシステム工学は数式モデルを用いて最適設

計，操作を行なうことが重要な課題の一つであるが，現在どのような数式モデルを用いたらよいのか，また得られた解が実用上どれだけの意味をもっているかなどということが明確にならない限り，方法論としてはすぐれていても得られた結果に対する信頼性，実用性に問題が残る。この問題点を解決する一つの有力な手段が感度解析の立場であると筆者は確信する。

限られた頁数のため，また感度解析の意味に重点をおいたため，感度係数のアナログ計算機による求め方²⁾，シ

グナルフロー線図の応用³⁾，数式モデル作成への応用¹⁰⁾，などについては全くふれることができなかったが，実験によって確認できないシステムの最適計画，設計の問題の解がややもすると結果の信頼性に疑問がもたれている現在，プロセスシステム工学に関係される諸兄に幾分でもお役に立てばと思ってこの記事を書いた。最後にプロセスシステム工学が Model Identification, 最適化手法，感度解析，安定性などの観点を総合して体系づけられることを念じて筆をおく。

参 考 文 献

- 1) Tomović, R.: "Sensitivity Methods in Control Theory", p.103, Pergamon Press (1966)
- 2) Tomović, R.: "Sensitivity Analysis of Dynamic Systems", McGraw-Hill Book Comp, Inc. (1964)
- 3) Pagurek, B.: *I.E.E.E., Trans. on A.C.*, 10, 178 (1965)
- 4) Takamatsu, T., E. Nakanishi, I. Hashimoto: Preprints of the 3rd I.F.A.C. Congress at London, 19-F (1966)
- 5) Tuel, W.G., I. Lee, P.M. DeRusso: Preprints of the 3rd I.F.A.C. Congress at London, 24-B (1966)
- 6) Meerov, M. V.: "Sensitivity Methods in Control Theory", p.366, Pergamon Press (1966)
- 7) Kochenburger, R. J.: Preprints of the 2nd I.F.A.C. Congress at Basle, paper 434 (1963)
- 8) Hanoch, Ur., G. Trwzal: "Sensitivity Methods in Control Theory", p.267, Pergamon Press (1966)
- 9) Sedler, M.: "Sensitivity Methods in Control Theory", p.143, Pergamon Press (1966)
- 10) Eykoff, P., et al.: Survey Paper in the 3rd I.F.A.C. Congress at London (1966)

[特集終わり]