液 滴 の 生 成 と 運 動 (その 2) 気 液 系*

高 島 洋 一**

ここでは、液体をノズルあるいは回転円盤などを使って、気相中で微粒化する場合における液滴の生成と運動を取り上げる。

液体の微粒化は気液間の運動量交換、熱移動、物質移動の促進、円滑な連続燃焼あるいは塗装など、いろいろの目的に用いられる手段であり、その重要性は最近でも微粒化に関する研究が数多く報告されていることから推察できよう。

固体の粉碎と同様に、液体の微粒化もその現象はきわめて複雑であり、目的用途によって、液滴の生成過程も異なっている。したがって、今後に残されている未明な問題も少なくないが、これまでの多くの研究者によってなされた研究成果を総括的に述べ、スプレーに関する設計、操作条件、生成液滴の粒径分布などを知る上での参考に資したいと思う。

1. 液滴の生成過程

液体が微粒化してゆく過程はほぼ三つの型に分類することができよう。すなわち、(i) 線状液の切断、(ii) 薄膜状液の分裂、(iii) 液滴の衝撃的破裂である。

一般の微粒化では、以上の型が同時に混在していると考えてよく、方法によってどれかの型が支配的となる。なお、最後の項の衝撃的破裂とは高速気流中にふき出し

た液滴がつぶれるような場合あるいははげしい振動を受けて、破裂が起こるような場合であり、最も複雑な変形運動をとまう。

(i) 線状液の切断 水道の蛇口などから糸を引くように水が流下し、途中で、切断が起こり液滴が生成される状況はしばしば見受けられることである。既に 1879 年 Lord Rayleigh³⁹⁾ は理論的に非粘性液の線状からの切断を解析した論文を呈出している。彼の理論では、線状液の形状が表面張力だけで支えられていると考え、その直径が局部的に増減するような小さな振動が起こる場合を想定している。結局、波長が直径 D の 4.51 倍に相当する振動が、最も生長し易く、生成液滴を D_p とすると、 $D_p = 1.89 D$ となるような液滴ができ易い。その後、Weber⁴⁰⁾ は液の粘性、気体の密度を考慮すると、最も成長し易い振動の波長は長くなることを明かにし、例えば、大気中での線状の水の流れでは $4.5 D$ ではなくむしろ $6.5 D$ に近い値を得ている。また高粘度液では線状液の切断が起こり難く、微粒化はこの型によって生ずることが困難となる³⁵⁾。

(ii) 膜状液の分裂 Fan spray nozzle や Hollow-cone nozzle から噴き出す液は膜状でノズルから大気中に広がり、その薄くなった膜が振動によって破れて、無数の液滴となる。このような微粒化の過程に関する研究は Squire³³⁾、Hagerty ら³³⁾ の膜の安定性の解析をはじめ、最近では、Fraser ら³¹⁾、Dombrowski ら³²⁾ によって、それぞれ、膜中に孔があき広がることによる破裂や、粘性の影響を考慮した解析などがある。

膜状流れの安定性について、ここでは Hagerty らの解析を簡単に述べよう。Fig. 1 にしめたように、膜の厚みを $2a$ 、膜の移動方向を x 、膜に垂直な方向を y 、膜の平均移動速度を V とし、 $y = +a$ 、 $y = -a$ の膜面に小さい乱れが生じ、その角周波数を ω 、初振幅を H 、波数を n とする。今表面の運動を

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= He^{i\omega t + inx} & (y = +a) \\ h_2 &= He^{i\omega t + inx + i\phi} & (y = -a) \end{aligned} \right\}$$

で表わされるとすると、液相 ($a \geq y \geq -a$) では速度ポテンシャルは

$$\phi_1 = (A \cosh ny + B \sinh ny) e^{i\omega t + inx} + Vx$$

ここに

Fig. 1 Idealized fluid-sheet system³³⁾

* 昭和 42 年 3 月 11 日受理

** Yoichi Takashima 東京工業大学 原子炉工学研究所

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{i\left(\frac{\omega}{n} + V\right)(1 - e^{i\phi})}{2 \sinh na} \cdot H \\ B &= \frac{i\left(\frac{\omega}{n} + V\right)(1 + e^{i\phi})}{2 \cosh na} \cdot H \end{aligned} \right\}$$

一方の気相 ($y > a$) では

$$\Phi_{g1} = C e^{-ny + inz + i\omega t + V'x}$$

ここに $C = iH \left(V' + \frac{\omega}{n} \right) e^{na}$

他方の気相 ($y < -a$) では

$$\Phi_{g2} = C e^{i\phi} \cdot e^{+ny + inz + i\omega t + V'x}$$

また, Bernoulli の式より

$$\frac{V^2}{2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \frac{dp}{\rho} g_c$$

ここに q はある点における流速である。圧力と表面張力の関係から

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_1 - \Delta p_{g1} &= -\sigma \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \\ \Delta p_1 - \Delta p_{g2} &= +\sigma \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} \end{aligned} \right\}$$

以上の速度ポテンシャル, Bernoulli の式および表面張力の式から, 次の二種の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= 0 \\ \omega &\div -nV \pm n\sqrt{\frac{n\sigma - V^2\rho_g}{\rho_l \tanh na}} \end{aligned} \right\} \text{非対称波}$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \pi \\ \omega &\div -nV \pm n\sqrt{\frac{n\sigma - V^2\rho_g}{\rho_l \coth na}} \end{aligned} \right\} \text{対称波}$$

前者は膜の厚みが変わらず, 旗の運動に似た振動を起こし, 後者は膜幅が対称的に変動するような振動を起こす。いずれの場合も $n < \rho_g V^2 / \sigma_a^2$ の時, ω は複素数となり, 振動は成長するので膜は不安定となる。なお, $\omega_0 = nV$ とすると, 臨界周波数 f_c は次のようになる。

$$f_c = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\rho_g V^3}{2\pi\sigma}$$

結局, 周波数 f が f_c より小の時, 膜は不安定となり, 乱れの成長速度 β は

$$\beta_s = n\sqrt{\frac{V^2\rho_g - n\sigma}{\rho_l \tanh na}} \quad (\text{非対称波})$$

$$\beta_D = n\sqrt{\frac{V^2\rho_g - n\sigma}{\rho_l \coth na}} \quad (\text{対称波})$$

となる。 $f < f_c$ の時, 1 サイクル前後の振幅をそれぞれ y_1, y_2 とおくと

$$\Delta = \ln \frac{y_2}{y_1} = \frac{\beta}{f}$$

となり, Δ は正となる。今, $\Omega = f/f_c$, $W = V^2\rho_g a / \sigma$ とおくと,

$$\Delta_s = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{(1-\Omega)}{\tanh \Omega W}} \quad (\text{非対称波})$$

$$\Delta_D = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{(1-\Omega)}{\coth \Omega W}} \quad (\text{対称波})$$

膜状流れの Weber 数 W の値が 0.1, 1.0 に対し, 上式の関係を図示すると Fig. 2 のようになる。

なお, $\beta_s = \beta_D \coth na$

となり, β_s は β_D より大きい。以上の関係から, 液体の薄膜状流れでは非対称振動による乱れから分裂が起こることが推定される。

一般に分裂が生ずるような場合, $na \ll 1$ と考えてよく, $\tanh na \div na$ となるので, 乱れの成長速度 β_s の最大値 β_{smax} およびその時の振動数 f_{opt} は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} f_{opt} &= \frac{1}{2} f_c = \frac{\rho_g V^3}{4\pi\sigma} \\ \beta_{smax} &\div \frac{\rho_g V^2}{2\sqrt{a\sigma\rho_l}} \end{aligned} \right\}$$

最も成長しやすい振動数 f_{opt} が膜の厚み $2a$ に無関係で, しかも気体密度に関係することは着目に値する。Dombrowski^{4,5)} らは Fan spray nozzle による微粒化に対し, 上述の関係が成立することを確認している。なお, Hagerty らの解析では流れの広がり考慮し

$$\Delta = \ln \frac{y_2}{y_1} = \frac{\beta}{f}$$

β : growth rate
 f : frequency
 $\Omega = f/f_c$, $W = \frac{V^2\rho_g a}{\sigma}$

Fig. 2 Logarithmic decrement versus frequency ratio for sinusoidal and dilational waves¹³⁾

ていないが、広がりがある場合でも解析結果を応用することができる。

Fig. 3 は Fan spray nozzle から薄膜状に噴出した液の分裂する過程をしめしたものである。x 軸上の流体を考え、膜は一定速度を保ちながら、一定の角度で広がる。すると、 $2ax = k_0$ の関係が成立する。生ずる乱れは f_{opt} の振動数を持ち、その波長 $\lambda_{opt} = V/f_{opt}$ の半分すなわち $\lambda_{opt}/2$ の幅の板状液に切断されると考える。この板状液は表面張力のため、直ちに棒状液となるとする。切断時の膜の厚みを $2a^*$ 、棒状液の半径を r_l とおくと、

$$r_l = \left(\frac{\lambda_{opt} a^*}{\pi} \right)^{1/2}$$

もし棒状液の切断が Rayleigh の理論に従うとすると、それから生成される液滴 d は $d = 3.78 r_l$ となるから

$$d \div 3.78 \left(\frac{\lambda_{opt} a^*}{\pi} \right)^{1/2}$$

が得られる。ここで a^* を推定することができれば、生成液滴の大きさも推定可能となる。

Weber⁽⁹⁾, Fraser⁽¹⁰⁾ らの実験によると乱れの成長度 E を

$$E = \int_0^t \beta dt = \ln \frac{y_t}{y_0}$$

とおくと、破断が起こるまでの成長度 E^* はノズルが与えられると、液流速 V 、気体密度 ρ_g に無関係に一定であるといわれる。したがって、 $x = Vt$ すなわち、 $t = k_0/2aV$ の関係から、

Fig. 3 A model of break up by sinuous wave (from Ref. (10))

Fig. 4 Perforation in a liquid sheet (from Ref. (10))

$$a^{*1/2} = \frac{1}{6} \frac{(\rho_l V k_0)^{1/3}}{E^{*1/3} (\rho_l \sigma)^{1/6}}$$

さらに

$$d = \frac{1.26}{E^{*1/3}} \left(\frac{\sigma k_0}{\rho_l V^2} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/6} \\ = \text{const} \left(\frac{\sigma k_0}{C^2 dp} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/6}$$

ここに dp はノズルに液を供給する駆動圧力、 C はノズルの流出係数である。この関係は Hollow-cone nozzle に対しても成立し、実験式をまとめる場合に重要な意味を持つ。最近、気体の密度 ρ_g がはたして生成液滴の平均径 d に対し、 $d \propto \rho_g^{-1/6}$ となるような影響があるかどうか Fraser⁽¹¹⁾ らにより検討されている。すなわち Fraser らは絶対圧力 20mmHg~760mmHg の容器内で spray を行なって、写真撮影による薄膜液の破裂を調べる一方、生成液滴の比表面積平均径の大きさと、 ρ_g の関係を調べている。

その結果、約 200mmHg 以上の範囲ではほぼ $d \propto \rho_g^{-1/6}$ が成立するが、圧力が低下すると、 d の値は急激に増加し、約 30% くらい過大となり、更に圧力が低下すると、 d はむしろ減少する傾向にあることなどが認められた。一方、低圧での薄膜状液の分裂を観測した結果によると、膜に小滴などの衝突によって孔があき、その孔が広がることにより液滴が生ずる過程を認めている。これは脱ガス、脱塩された純水を用いてもほとんど同様に起こることから、不純物の混入などによる膜切れではないかと考えられている。

Fig. 4 に薄膜に孔があいた後の広がり模様をしめす。半径方向の広がり速度を e とすると、表面張力、運動量変化の関係から

$$4\pi r_p \sigma = \frac{\delta}{\delta t} \rho_l \pi r_p^2 \cdot 2ae$$

また $e = \delta r_p / \delta t$ と見なされるから、最初の孔がきわめて小さいとすると

$$e \div \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_l}} = \sqrt{\frac{2\sigma x}{\rho_l \cdot k_0}}$$

となる。孔の成長速度は孔の大きさに無関係である。 e の値は二重露出法によって写真から測定され、理論式とよく合うといわれているが、この研究に関しては他に Ranz⁽²⁸⁾ の報告がある。

なお、Twin nozzles による薄膜の生成およびその分裂に関する研究^(9,38) も興味ある問題を含んでいるが、ここでは省略する。

(iii) 液滴の衝撃的破裂 ここではショック・チューブの中で、エアブラストによる液滴の破裂に関する Hanson⁽¹⁴⁾ らの研究結果および超音速気流中での液滴の微粒化を行なった Bitron⁽²⁷⁾ の報告について簡単に述べる。

Fig. 5 にエアブラストによる水滴の破裂の様態をしめす。図のように流れに直面している部分がまず押しつぶされ、更に凹んで、Cup 状となり薄膜となってつぶされる。一方、流れに垂直な滴の大円周辺は外側の異常低圧と相まって、大きな輪を形成する。Fig. 6 は Silicone oil 100 の液滴の破裂であるが、そのつぶれ方は更に複雑である。

Tables 1, 2 にエアブラストによって液滴が破れる限界気流速度 V_c と使用した液の粘性、表面張力の関係をしめす。なお、1949 年 Hinze¹⁷⁾ は既に Merrington²⁴⁾ らの液滴落下実験で、液滴の破裂は元の球からの変形が、ほぼその半径に等しい時に生じていることに着目し、粘性パラメータ $K = \mu^2 / \rho_l \sigma r$ が 1 より小の時と大の時にわけて臨界 Weber 数、 $W_{crit} (= \rho_g V_c^2 r / \sigma)$ が次の関係となることを述べている。

$$K \ll 1 \text{ の時 } W_{crit} = 6$$

$$K > 1 \text{ の時 } W_{crit} = 10$$

この関係は微粒化の限界を知るための貴重な目安となっている。この Hinze の式と、Hanson の得た Table 2 のデータを比較すると、落下液滴の破裂とエアブラストによる破裂の相異ばかりではなく、実際、 W_{crit} は液滴の大きさなどによっても異なり、むしろ $Re (= 2V_c r / \nu_g)$ との積が一定に近いように思われる。いづれにしろ、今後の詳細な実験結果を期待したい所であるが、Hinze の述べている簡単な関係はある程度、修正されることになるであろう。

高速気流による液の微粒化については抜山、棚沢²⁷⁾ による著名な実験式がある。

$$d_s = \frac{585}{V' - V} \left(\frac{\sigma}{\rho_l} \right)^{0.5} + 597 \left(\frac{\mu_l}{\sqrt{\rho_l \sigma}} \right)^{0.45} \left(\frac{1000 Q_l}{Q_g} \right)^{1.5}$$

ここに d_s は比表面積平均粒径 (μ)、 V' 、 V はそれぞれ気体、液体の速度 (m/sec)、 Q_l 、 Q_g はそれぞれ液体、気体の流量 (cc/sec) である。この式は次的には不健全にもかかわらず、実際とよく合うことが、他の実験者たち^{2, 23)} にも認められている。特に Bitron²⁾ は超音速気流 (マッハ数 2 以下) に対しても適応できると述べている。

以上、三つの型に関する液滴の生成について述べたが、主として、ノズルに関係した微粒化を対象としているので、次に回転盤による微粒化にふれてみよう。

2. 回転盤による微粒化

この方法のすぐれた点は比較的均一な大きさの液滴が得られること、ノズルの場合にはつまったりする恐れのある液体でも取り扱うことができることである。ただし、流量に制限があって、その制限以上では生成液滴は大き

Fig. 5
Breakup of water drops by 110 ft/sec air blast (from Ref. (14))

Fig. 6
Breakup of drops of 100 cstc silicone oil by 119 ft/sec air blast (from Ref. (14))

Table 1 Fluid properties (from Ref. (14))

Liquid	ν cstc	σ dyne/cm	ρ g/cc
Silicone oil	10	20.14	0.940
" "	50	20.18	0.960
" "	100	20.92	0.970
Water	0.892	71.97	0.998
Methyl alcohol	0.696	22.2	0.787

Table 2 Representative values of W_{crit} & Re (from Ref. (14))

Liquid	V_c ft/sec	D_μ	W_{crit}	Re	$(W/Re)_{crit}$
Silicone oil 10	73.5	426	6.62	592	3,920
	93.0	285	7.18	501	3,600
	121.3	180	7.93	406	3,220
	148.5	117	7.94	317	2,520
	199.2	126	15.4	444	6,850
" " 50	83.5	531	10.4	841	8,720
	122.0	273	11.8	611	7,220
	148.0	210	13.5	561	7,550
	199.2	126	15.4	444	6,850
	228.5	150	23.8	577	13,740
" " 100	93.7	540	13.1	946	12,380
	122.0	338	14.3	749	10,730
	148.5	239	15.5	649	10,100
	149.3	250	16.2	668	10,850
	199.3	185	22.6	650	14,700
Water	228.5	150	23.8	577	13,740
	121.3	391	4.79	864	4,140
	198.8	180	6.37	632	4,030
	282.0	94.5	7.14	446	3,180
Methyl alcohol	74.4	471	6.76	661	4,470
	121.3	186	7.45	415	3,090

く、また不均一となり、わざわざこの方法を採用した意義も薄れてしまう。

Hinze¹⁸⁾ らは Fig. 7 にしめすような回転キャップ型スプレーに関する研究を行ない、この方法による液滴の生成過程を明らかにしているので、その内容を簡単に述

Fig. 7 A rotating cup for atomization⁽¹³⁾

Fig. 8 A velocity component in layer of liquid within cup

Fig. 9 Geometrical development of liquid ligaments from a liquid torus (from Ref. (18))

べる。Fig. 8 にしめす記号に従うと、 ξ 方向の流速 v_ξ 、流量 Q は次のようになる。

$$v_\xi = \frac{\rho\omega^2}{\mu} \sin^2 \varphi_0 \left(\xi_1^3 \phi_1 \phi - \xi^2 \frac{\phi^2}{2} \right)$$

$$Q = \int_0^{\phi_1} 2\pi r \xi d\phi v_\xi = \frac{2\pi\rho\omega^2 \xi_1^3 \sin^2 \varphi_0 \cdot \phi_1^3}{3\mu}$$

この関係が成立するのは、液が層流をなし、回転方向に滑りがない時であることはいうまでもないであろう。次に出口の流れの厚み $\delta = \xi_1 \phi_1$ 、出口周辺直径 $D = 2\xi_1 \sin \varphi_0$ とすると

$$\delta = \left(\frac{6\mu Q}{\pi\rho\omega^2 D^2 \sin \varphi_0} \right)^{1/3}$$

Fig. 9 に液がキャップを離脱する状況をしめす。小流量の場合は周辺に細い液の輪 (liquid torus) ができ、そこで、最も成長しやすい振動に相当する波長 λ の間隔ごとに棒状液が弧を画いてとび出す。Hinze は実験および次元解析の結果、棒状液の本数を Z として、

$$Z = \frac{\pi D}{\lambda} = 0.215 \left(\frac{\rho_l \omega^2 D^3}{\sigma} \right)^{5/12} \left(\frac{\rho_l \sigma D}{\mu^2} \right)^{1/6}$$

という関係を導出している。限界流量 Q_c 以下で上の式は成立するが、 Q_c については次の関係を得ている。

$$\frac{\rho Q_c^2}{\sigma D^3} \cdot \left(\frac{\rho \omega^2 D^3}{\sigma} \right)^{0.60} \left(\frac{\mu^2}{\rho_l \sigma D} \right)^{0.167} = 1.77$$

なお、torus からとび出した線状液の切断により、液滴が生成されるが、その大きさを比表面積平均径 d_s でしめすと、

$$\frac{d_s}{D} = 0.41 \left(\frac{Q}{\omega D^3} \right)^{0.6} \left(\frac{\mu D}{\rho_l Q} \right)^{0.2} \left(\frac{\sigma D^3}{\rho_l Q^2} \right)^{0.1}$$

この関係は回転円盤に対し得られた実験式である^{9,12)}。

また、粒径分布の分散の程度は後で述べる σ_l でしめすと、 $\sigma_l \approx 0.1$ であり、ノズルによるスプレーから得られる液滴の場合は $\sigma_l \approx 0.8$ である。回転盤により得られる液滴がはるかに均一となっていることはこのことから明らかであるが、限界流量を越すと、ノズルの場合と同じになる。

3. 液滴の粒径分布

以上、液滴の生成過程について述べてきたように、現象が複雑な割合には研究もある程度進んでいるので、微粒化を試みる場合、大きな支障はないと思われる。一方生成液滴の粒径分布に関しては、分布が生ずる確率過程が明らかでないばかりでなく、スプレーの方法によっても違ってくるために、決定的なことは何も得られていないといつてよいであろう。ただ、経験的に分布関数として実際とよく適合できるとみなされている著名な式が数種用いられており、実用上、どの式を用いてもあまり大きな差異はなく、現在でもきわめてあいまいに取り扱われている。ここでは特によく用いられている三つの分布式についての相互関係を明らかにしてみよう。

(i) 対数正規分布^{1,7,26,34)} この分布は確率過程が判然としている。たとえば、液片が十分多数の振動を受け、ずたずたにちぎれてゆく場合を想定し、1回の波を受けるたびにちぎれる確率は大きいかけらも小さいかけらも、大きさの差別なく同じであると、得られる液滴の粒径分布は対数正規に近づく。これは1941年、Kolmogoroff²¹⁾ により数学的にも明らかにされ、確率が1/2に近い程、分布は広く、0または1に近いほど狭い。その分布式は

$$\begin{cases} \frac{dn}{Nd \ln x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_l} \exp - \frac{(\ln x/\bar{x})^2}{2\sigma_l^2} \\ \frac{dv}{Vd \ln x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_l} \exp - \frac{(\ln x/\bar{x})^2}{2\sigma_l^2} \\ \bar{x} = \bar{x} \cdot \exp 3\sigma_l^2 \end{cases}$$

(ii) 披山、棚沢の式^{2,28,27,32)} 空気吹き込用スプ

レーノズルから得られた液滴の分布を抜山、棚沢らが検討した結果、以下の式により表示している。確率過程の物理的意味は明らかでないが、現在でもよく用いられる。

$$\begin{cases} \frac{dn}{N d \ln x} \\ = B x^3 e^{-\delta x^a} \\ = \frac{3(\alpha_n/e)^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)} \exp \alpha_n \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\bar{x}'} \right)^{3/\alpha_n} + \frac{3}{\alpha_n} \ln \frac{x}{\bar{x}'} \right\} \\ \doteq \frac{3}{\sqrt{2\pi\alpha_n}} \exp \alpha_n \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\bar{x}'} \right)^{3/\alpha_n} + \frac{3}{\alpha_n} \ln \frac{x}{\bar{x}'} \right\} \\ \frac{dv}{V d \ln x} \doteq \frac{6}{\sqrt{2\pi\alpha_v}} \exp \alpha_v \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\bar{x}'} \right)^{3/\alpha_v} + \frac{3}{\alpha_v} \ln \frac{x}{\bar{x}'} \right\} \\ \alpha_v = 2\alpha_n, \quad \bar{x}' = 2^{\alpha_n/3} \cdot \bar{x} \end{cases}$$

(iii) Rosin-Rammler の式^{15,30)} これも確率過程の意味がはっきりしないが、粉体の場合と同様に、液滴の分布にも用いられる。

$$\begin{cases} \frac{dn}{N d \ln x} \\ = \frac{3}{1-\delta_n} \frac{(\delta_n/e)^{\delta_n}}{\Gamma(1+\delta_n)} \exp \left\{ 1 + \delta \ln \frac{x}{\bar{x}''} - \left(\frac{x}{\bar{x}''} \right)^{\delta} \right\} \\ \frac{dv}{V d \ln x} = \frac{\delta}{e} \exp \left\{ 1 + \delta \ln \frac{x}{\bar{x}''} - \left(\frac{x}{\bar{x}''} \right)^{\delta} \right\} \\ \delta_n = \frac{\delta-3}{\delta}, \quad \bar{x}'' = \left(\frac{\delta}{\delta-3} \right)^{1/\delta} \bar{x} \end{cases}$$

以上の三つの表示式で、 N は液滴全個数、 dn は滴の大きさが x と $x+dx$ の間にある個数、 V は滴の全容積、 dv は x と $x+dx$ の間にある大きさの滴がしめる容積、 $\bar{x}$, $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ はそれぞれの $dn/d \ln x (= xdn/dx)$ が最大の時の x の値であり、 $\bar{x}$, $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ はそれぞれの $dv/d \ln x$ が最大となる x の値である。

3者を比較するため、 $(dn/d \ln x)_{\max}$ が相等しく、 $\bar{x} = \bar{x}' = \bar{x}''$ とおくと、おのおのの分散に関係ある因子 σ_1 , α_n , δ_n は次のようになる。

$$\sigma_1 = \frac{\Gamma(\alpha_n+1)}{3\sqrt{2\pi}(\alpha_n/e)^{\alpha_n}} = \frac{(1-\delta_n)\Gamma(1+\delta_n)}{3\sqrt{2\pi}(\delta_n/e)^{\delta_n}}$$

また、 $(dv/d \ln x)_{\max}$ が相等しく、 $\bar{x} = \bar{x}' = \bar{x}''$ とおくと

$$\sigma_1 = \frac{\Gamma(\alpha_1+1)}{6\sqrt{2\pi}(\alpha_1/e)^{\alpha_1}} = \frac{e}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\delta}$$

これらの関係は Fig. 10 のようになる。なお、上の2式は、同時に成立しないことに注意を要する。 α_1 , α_n ; δ , δ_n の相互関係は (ii), (iii) にしめす通りである。

このように σ_1 , α , δ の関係から実測値と比較して、どの関数形が最も適合するかを調べることができる。次に分布式の健全性にふれてみよう。

Rosin-Rammler の式では $\delta > 3$ でなければならない。すなわち $\sigma_1 < 0.36$ にほぼ相当する分布でなければならないことを意味し、かなり均一な液滴の分布の場合に限られる。このような均一な分布の場合は、分布関数がどれ

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\Gamma(\alpha_n+1)}{3\sqrt{2\pi}(\alpha_n/e)^{\alpha_n}} \doteq \frac{\sqrt{\alpha_n}}{3} \\ &= \frac{(1-\delta_n)\Gamma(1+\delta_n)}{3\sqrt{2\pi}(\delta_n/e)^{\delta_n}} \\ \text{for } \bar{x} = \bar{x}', \text{ the same value of } (dn/d \ln x)_{\max} \\ \sigma_1 &= \frac{\Gamma(\alpha_v+1)}{6\sqrt{2\pi}(\alpha_v/e)^{\alpha_v}} \doteq \frac{\sqrt{\alpha_v}}{6} \\ &= \frac{e}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\delta} \\ \text{for } \bar{x} = \bar{x}' = \bar{x}'', \text{ the same value of } (dv/d \ln x)_{\max} \end{aligned}$$

Fig. 10 The relation between σ_1 , α_n , δ_n or σ_1 , α_v , δ

- ① N.T. distribution of $dn/N d \ln x$ to $x/\bar{x}'$
- ② log normal distribution of either $dn/N d \ln x$ to $x/\bar{x}$ or $dv/V d \ln x$ to $x/\bar{x}$
- ③ N.T. distribution of $dv/V d \ln x$ to $x/\bar{x}'$, $\bar{x} = 20\bar{x}$, $\bar{x}' = 9\bar{x}$, $\bar{x}'' = \bar{x}'$

Fig. 11 Comparison between log normal distribution and Nukiyama-Tanazawa's equation

であっても、種々の平均値を求める場合にあまり差は生じない。したがって、使用価値はあまりないと思われる。

(i), (ii)の諸式を $\bar{x} = \bar{x}'$, $(dn/d \ln x)_{\max} = 0.4N$ とし、したがって $\sigma_1 = 1.0$, $\alpha_n \doteq 9$ の場合を比較すると、Fig. 11 のような関係が得られる。個数分布を小さい粒径で比較

すると, (ii) の式では相対的に個数が多くなり, このことは小さい液片がむしろ破れ易いという確率過程が含まれることを意味する。その意味では (ii) の式も多少の矛盾を含んでいるが, その差は容積で考えると無視できる。一般に液滴群には最大, 最小径が存在するので, 実際の分布も, (i), (ii) の諸式に比べ, 両端で激減するのが当然である。そのため, 大きい方の分布は図から明らかなように, (ii) 式がよりよい近似をしめすことが多い。

しかし, 以上にあげた三つの分布式はいずれも最大径, 最小径の存在を考慮していないので, 別に補正することを考える必要がある。Hollow-cone nozzle の実験で, 特に最大粒径に近い所の分布を調べた例¹⁴⁾では, Hinze がしめしたように $W_{crit} \approx 10$ として求めた x_M がほぼ最大径となっており, x_M は $\bar{x}$ の約 30 倍である。 $x \leq 20\bar{x}$ ではほとんど, 対数正規分布となっており, $x \geq 20\bar{x}$ で

分布は激減し正規分布からはずれることが認められる。もし, x_M あるいは最小粒径 x_m を予知できるとすると, 最も簡単な補正として

$$X = \frac{x - x_m}{x_M - x_m} x_M^n$$

とおき, x の代わりに X を用いると, 対数正規分布は多くの場合よく適合する²⁶⁾。一般に $x_m \ll \bar{x} \ll x_M$ であるので広い範囲で $X \approx x$ となる。多くの場合, x_m は無視できるが, wax のスプレーなどでは微粒化の進行不十分の内に冷却固化が起こるので x_m の補正が必要となる。この補正による対数正規分布式が最も妥当と提唱したのは Evans & Mugele であり, 筆者もその意見に同意する。

なお, 紙面の都合で省略したが, ノズルによる微粒化^{4, 19, 20, 37)}, 空気吹き込みによるもの^{2, 6, 23, 27, 39)}などは文献を参照されたい。

Nomenclature

a : half width of fluid sheet, d : drop diameter, e : growth rate of perforation, f_c : lowest stable frequency, h : disturbance on surface, n : wave number of disturbing wave, or number of drops, p : pressure, r : radius of liquid filament, x : distance in the direction of the liquid flow or drop size, y : distance perpendicular to sheet from center line, t : time, D : diameter of a spinning disc, E : growth of disturbance, H : initial amplitude of disturbing wave, Q : flow rate, V : mean velocity of liquid sheet, V' : mean velocity of surrounding gas, W : Weber's number, Z : Number of liquid ligaments from a rotating disc, β : growth rate of disturbance, λ : wave length, ρ : density, σ : surface tension, ω : circular frequency of disturbing wave, ϕ : phase angle between disturbances on upper and lower surfaces, Φ : velocity potential, μ : viscosity, ξ : distance in the direction of liquid flow in a cup

References

- 1) Binark, H. & Ranz, W.E.: *I. E. C.*, **51**, 701 (1959)
- 2) Bitron, M.D.: *I. E. C.*, **47**, 23 (1955)
- 3) Dombrowski, N., Hasson, D. & Ward, D.E.: *Chem. Eng. Sci.*, **12**, 35 (1960)
- 4) Dombrowski, N. & Hooper, P.C.: *Chem. Eng. Sci.*, **17**, 291 (1962)
- 5) Dombrowski, N. & Johns, W.R.: *Chem. Eng. Sci.*, **18**, 203 (1963)
- 6) Dorman, R.G.: *Brit. J. Appl. Phys.*, **3**, 189 (1952)
- 7) Epstein, B.: *I. E. C.*, **40**, 2289 (1948)
- 8) Fogler, B.B. & Kleinschmidt, R.V.: *I. E. C.*, **30**, 1372 (1938)
- 9) Fraser, R.P., Eisenklam, P. & Dombrowski, N.: *Brit. Chem. Eng.*, Aug. 415, Sept. 497, Oct. 536, Nov. 611 (1957)
- 10) Fraser, R.P., et al.: *A. I. Ch. E. J.*, **8**, 672 (1962)
- 11) Fraser, R.P., Dombrowski, N. & Routley, J.H.: *Chem. Eng. Sci.*, **18**, 339 (1963)
- 12) Friedman, S.J., et al.: *Chem. Eng. Prog.*, **40**, 181 (1952)
- 13) Hagerty, W.W. & Shea, J.F.: *J. Appl. Mech.*, **22**, 509 (1955)
- 14) Hanson, A.R., Domich, E.G. & Adams, H.S.: *Physics of Fluids*, **6**, 1070 (1963)
- 15) Hasson, D. & Mizrahi, J.: *Trans. Inst. Chem. Eng.*, **39**, 415 (1961)
- 16) Hasson, D. & Peck, R.E.: *A. I. Ch. E. J.*, **10**, 752 (1964)
- 17) Hinze, J.O.: *Appl. Sci. Res.*, **A1**, 263, 273 (1949)
- 18) Hinze, J.O. & Milborn, H.: *J. Appl. Mech.*, **17**, 145 (1950)
- 19) Houghton, H.G.: *J. H. Perry's Chem. Eng. Handbook*, Fourth Ed., 18-61 (1963)
- 20) Kobayashi, K.: *J. Japan Soc. Mech. Eng.*, **17**, 107, 112, 114 (1951)
- 21) Kolmogoroff, A.N.: *Compt. rend. acad. Sci., URSS*, **31**, 99 (1941)
- 22) Lee, D.W.: N.A.C.A. report No. 425 (1932)
- 23) Lewis, H.C., et al.: *I. E. C.*, **40**, 67 (1948)
- 24) Merrington, A.C. & Richardson, E.G.: *Proc. Phys. Soc. (London)*, **59**, 1 (1947)
- 25) Meyer, W.E. & Ranz, W.E.: *Encyclopedia of Chemical Technology*, **12**, 703 (1954)
- 26) Mugele, R.A. & Evans, H.D.: *I. E. C.*, **43**, 1317 (1951)
- 27) Nukiyama, S. & Tanazawa, Y.: *Trans. Japan Soc. Mech. Eng.*, **4**, 86, 138 (1938); **5**, 63, 68 (1939); **6**, 2-7 (1940)
- 28) Ranz, W.E.: *J. Appl. Phys.*, **30**, 1950 (1959)
- 29) Rayleigh, Lord: *Proc. Roy. Soc.*, **29**, 71 (1879)
- 30) Rosin, P. & Rammler, E.: *J. Inst. Fuel*, **1**, 29 (1933)
- 31) Rossum, J.J.: *Chem. Eng. Sci.*, **11**, 35 (1959)
- 32) Sagai, T. & Sugiyama, Y.: *Chem. Eng. Japan*, **29**, 14 (1965)
- 33) Squire, H.B.: *Brit. J. Appl. Phys.*, **4**, 167 (1953)
- 34) Takashima, Y.: Preprints of the 4th Symposium by Soc. Chem. Eng. Japan, 88 (1965)
- 35) Tanazawa, Y.: *Trans. Japan Soc. Mech. Eng.*, **6**, 2-18 (1940)
- 36) Tanazawa, Y., et al.: *Trans. Japan Soc. Mech. Eng.*, **1**, 2-5 (1941)
- 37) Tate, R.W. & Marshall, W.R. Jr.: *Chem. Eng. Prog.*, **49**, 226 (1953)
- 38) Taylor, G.: *Proc. Roy. Soc., A* **259**, 1 (1960)
- 39) Ullrich, J.: *Glastechn. Ber.*, **32** Jahrg., Heft 8, 121 (1959)
- 40) Weber, C.: *Z. angew. Math. & Mech.*, **Bd 11**, Heft 2, 136 (1931)