〔付 記〕 本研究は文部省科学研究費によったことを記して、感謝の意を表します。また本研究の数値計算は東京工業大学化学工学科の電子計算機 (FACOM 230-25) によった。

Nomeclature

D	= outside diameter of condensing tube	[m]
D_e	= equivalent diameter of annular space	[m]
D_g	= molar diffusivity	[kg-mol/m ² ·hr]
G	= mass velocity of gas phase	[kg/m ² ·hr]
g	= acceleration due to gravity	[m/hr ²]
h_g	= heat transfer coefficient of gas phase	[kcal/m ² ·hr·°C]
h_l	= local heat transfer coefficient of condensate layer	[kcal/m ² ·hr·°C]
h_{lm}	= mean heat transfer coefficient of condensate layer	[kcal/m ² ·hr·°C]
K	= constant in Eq. (4)'	[-]
k_g	= local mass transfer coefficient of gas phase	[kg-mol/m ² ·hr]
L	= length from bottom	[m]
M	= molecular weight of vapor	[kg/kg-mol]
N	= mass transfer flux	[kg-mol/m ² ·hr]
n	= exponent in Eq. (12)	[-]
Pr_g	= Prandtl number of gas phase	[-]
Sc_g	= Schmidt number of gas phase	[-]
t_s	= temperature of condensate surface	[°C]
t_w	= temperature of wall surface	[°C]
V	= molar mass flow rate of gas phase	[kg-mol/hr]

Y_h	= $h_g D_e / \kappa_g \cdot Pr_g^{-0.5}$	[-]
Y_m	= $k_g D_e / D_g \cdot Sc_g^{-0.5}$	[-]
y_g	= mole fraction of vapor in gas phase	[-]
y_s	= mole fraction of vapor at condensate surface	[-]
Δt_s	= $t_s - t_w$	[°C]
Γ	= mass flow rate of condensate per unit periphery	[kg/m·hr]
δ	= thickness of condensate layer	[m]
κ	= thermal conductivity	[kcal/m·hr·°C]
λ	= latent heat of condensation	[kcal/kg]
μ	= viscosity	[kg/m·hr]
ρ	= density	[kg/m ³]
<Subscripts>		
b	= bottom of condenser	
g	= gas phase	
s	= condensate surface	
l	= liquid phase	
w	= wall surface	
t	= top of condenser	

Literature cited

- 1) Baker, E. M., E. W. Kazmark and G. W. Stroebe: *Ind. Eng. Chem.*, **31**, 214 (1939)
- 2) Hayakawa, T. and J. Kawasaki: *Kagaku Kōgaku*, **31**, 421 (1973)
- 3) McAdams, W. H.: "Heat Transmission", 2nd ed., McGraw-Hill (1954)
- 4) Nusselt, W.: *Z. Ver. deut. Ing.*, **60**, 531 (1916)
- 5) Shea, F. L., Jr. and N. W. Krase: *Trans. Am. Inst. Chem. Engrs.*, **38**, 463 (1940)

粘弾性流体系における流体球の運動および物質移動*

城 塚 正**・川 瀬 義 矩**

早稲田大学理工学部 化学工学科

緒 言

非ニュートン流体系における流体球に関する研究は、数多くの高分子物質の出現に伴い、最近活発に行われている。しかし、その重要性が指摘されているにもかかわらず、非ニュートン特性における弾性効果を論議したものは非常に少ない。粘弾性効果を考察した報告には、Maxwell 流体などの粘弾性流体中における気泡の運

動^{1,2)}、Rivlin-Ericksen 流体系における液滴の運動³⁾、そして Oldroyd 流体中の気泡の物質移動⁵⁾、などがあるが、適用範囲をより一般化した粘弾性流体系 (分散相 [ニュートン流体]-連続相 [ニュートン流体], [ニュートン流体]-[粘弾性流体], [粘弾性流体]-[ニュートン流体], [粘弾性流体]-[粘弾性流体]) における運動および物質移動について考察した報告はまだなされていない。

本研究では、上述した粘弾性流体系における流体球に関して、Leslie⁴⁾ が固体球の運動問題に用いたのと同様の摂動法により流体球内外の流関数を求めた。その流関数を用いて抗力および物質移動係数を計算し、今までほとんど論議されていない流体球の運動および物質移動に

* <Motion and Mass Transfer of Fluid Spheres in Viscoelastic Fluid Systems>

Received on August 21, 1973

化学工学協会第 37 年会 (名古屋, 1972 年 4 月) にて発表

** Tadashi Shirotuka (正会員) and Yoshinori Kawase (学生会員) Chem. Eng. Course, Dept. of Applied Chemistry, Waseda Univ., Tokyo, Japan

対する弾性効果の影響に関する考察を行った。また、レオロジー的には問題はあるが、3次元の流れの考察においては捨てがたい、Reiner-Rivlin モデルを用いた考察もあわせて行った。

1. 粘弾性流体系における解析

1.1 基礎式

粘弾性流体は次式に示す Oldroyd モデルで表されたとする。

$$S_{ik} = P_{ik} - P g_{ik} \quad (1)$$

$$P^{ik} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} P^{ik} + \mu_0 E^{ik} P_{j,j} + \nu_1 E^{j1} P_{j1} g^{ik} \\ = 2\eta_0 \left(E^{ik} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} E^{ik} + \nu_2 E^{j1} E_{j1} g^{ik} \right) \quad (2)$$

ここで $E_{ik} = (U_{k,1} + U_{1,k})/2$
 η_0 は粘度の次元を持つ定数であり、 λ_1 は緩和時間、そして λ_2 は遅延時間、 μ_0, ν_1, ν_2 は時間の次元を持つ定数である。 $\partial/\partial t$ は対流微分であり、今任意のテンソル B_{ik} を考えると、

$$\frac{\partial}{\partial t} B^{ik} = \frac{\partial}{\partial t} B^{ik} + U^j B^{jk}_{,j} + W^j_m B^{mk} + W^k_m B^{im} \\ - E^i_m B^{mk} - E^k_m B^{im} \quad (3)$$

ここで $W_{ik} = (U_{k,1} - U_{1,k})/2$ と表される。Eq. (2) の定数間には次の制約条件がある⁶⁾。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \mu_0 + \left(\lambda_1 - \frac{3}{2} \mu_0 \right) \nu_1 &> \lambda_2 \mu_0 + \left(\lambda_1 - \frac{3}{2} \mu_0 \right) \nu_2 \\ &\geq \frac{1}{9} \left\{ \lambda_1 \mu_0 + \left(\lambda_1 - \frac{3}{2} \mu_0 \right) \nu_1 \right\} \\ \left(\lambda_1 - \frac{3}{2} \mu_0 \right) (\lambda_1 \nu_2 - \lambda_2 \nu_1) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

このモデルは、非ニュートン粘性と法線応力効果を表すために、線形粘弾性モデルを非線形化することにより得られたものである。つまり、変形し動きつつある物体とともに変形し動くところの対流座標系を導入し、さらに固定座標系に変換することにより、時間微分は Eq. (3) に示されるような反変対流微分に代わる。また、非ニュートン粘性と法線応力効果を共に表すために、応力テンソルと変形速度テンソルから作られる非線形項を加えると、8個の物質定数を含む流動方程式が得られるが、実際問題では6個の物質定数で近似できる⁷⁾ ために、結局流動方程式は、定数間に Eq. (4) の制約条件を持つ Eq. (2) となる。

非圧縮性流体の定常における運動方程式および連続式は

$$S^{ik}_{,k} = \rho U^k U^{i,k} \quad (5)$$

$$E^i_{,i} = 0 \quad (6)$$

半径 a の流体球が速度 U_i の一様流中に存在するとし、流体球の中心に原点を持つ球座標を考える。その場

合の Eq. (5) の境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} R=a : P_{R\theta} &= P_{R\theta}', U_\theta = U_\theta', U_R = U_R' = 0 \\ R \rightarrow \infty : U_R' &= -U_i \cos \theta, U_\theta' = U_i \sin \theta \\ R \rightarrow 0 : U_R, U_\theta &\text{は有限} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

以下の解析のために、次に示す無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} R &= ar, U_R = U u_r, U_\theta = U u_\theta, W_{R\theta} = (U/a) w_{r\theta} \\ P_{RR} &= \eta_0 (U/a) p_{rr}, \dots \text{etc.}, E_{RR} = (U/a) e_{rr}, \dots \text{etc.} \\ P &= \eta_0 (U/a) p, \lambda_2 = \varepsilon \lambda_1, \mu_0 = \zeta \lambda_1, \nu_1 = \xi \lambda_1, \nu_2 = \eta \lambda_1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

低レイノルズ数域においては、慣性項は粘性項に比較すると省略できるので、Eq. (5) は簡単化される。

流関数を無次元パラメータ $\tau = U \lambda_1 / a$ の級数の形

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} \tau + \phi^{(2)} \tau^2 + \dots \quad (9)$$

で展開し、 τ は小さく τ^2 より高次の項は省略できるとする。

1.2 流関数

Eq. (9) を Eq. (5) に代入すると、0次近似 $\phi^{(0)}$ と $\phi^{(1)}$ に関する式が得られる。

$$D^2 \phi^{(0)} = 0, \quad D^2 \phi^{(1)} = 0 \quad (10)$$

ここで、

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

0次近似における境界条件は Eq. (7) より、

$$\left. \begin{aligned} r=1 : p_{r\theta}^{(0)} &= p_{r\theta}'^{(0)}, u_\theta^{(0)} = u_\theta'^{(0)}, \\ u_r^{(0)} &= u_r'^{(0)} = 0 \\ r \rightarrow \infty : u_r'^{(0)} &= -\cos \theta, u_\theta'^{(0)} = \sin \theta \\ r \rightarrow 0 : u_r^{(0)}, u_\theta^{(0)} &\text{は有限} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで、

$\kappa = \eta_0 / \eta_0'$

Eq. (10) の解は、

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(0)} &= -\frac{(1 - \cos^2 \theta)(r^2 - r'^4)}{4(\kappa + 1)} \\ \phi^{(1)} &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{4} \left(2r^2 - \frac{3\kappa + 2}{\kappa + 1} r + \frac{\kappa}{\kappa + 1} \frac{1}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

1次近似に関しては、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} D^2 \phi^{(1)} &= 0, D^2 \phi^{(1)} = (1 - \varepsilon) \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r^5} \\ &\times \left\{ 3 \left(\frac{3\kappa + 2}{\kappa + 1} \right)^2 - \frac{18}{r^2} \frac{\kappa(3\kappa + 2)}{(\kappa + 1)^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

1次近似に関する Eq. (13) の境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} r=1 : \kappa \gamma p_{r\theta}^{(1)} &= p_{r\theta}'^{(1)}, \gamma u_\theta^{(1)} = u_\theta'^{(1)}, \\ u_r^{(1)} &= u_r'^{(1)} = 0 \\ r \rightarrow \infty : u_r'^{(1)} &= 0, u_\theta'^{(1)} = 0 \\ r \rightarrow 0 : u_r^{(1)}, u_\theta^{(1)} &\text{は有限} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここで、

$$\gamma = \lambda_1 / \lambda_1'$$

Eq. (13) の解は、

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(1)} &= \sin^2 \theta \cos \theta (a_2 r^5 + a_3 r^3) (1 - \varepsilon) \\ \phi^{(1)} &= \sin^2 \theta \cos \theta \left\{ a_0 + \frac{a_1}{r^3} - \frac{A^2}{8} \frac{1}{r} - \frac{1}{8} AB \frac{1}{r^3} \right\} \\ &\quad \times (1 - \varepsilon') \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここで、 a_0, a_1, a_2, a_3, A, B は Table 1 (A) に示されている。

流関数に関する 2 次近似の式として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} D^2\psi^{(2)} &= \sin^2\theta \{ (1-\varepsilon)^2 P(r) + \varepsilon(1-\varepsilon) Q(r) \\ &\quad + (1-\varepsilon) R(r) + \beta S(r) \} \\ D^2\psi'^{(2)} &= (1-\varepsilon')^2 \{ H(r) \sin^4\theta + I(r) \sin^2\theta \} \\ &\quad + \varepsilon'(1-\varepsilon') \{ J(r) \sin^4\theta + K(r) \sin^2\theta \} \\ &\quad + (1-\varepsilon') \{ L(r) \sin^4\theta + M(r) \sin^2\theta \} \\ &\quad + \beta' \{ N(r) \sin^4\theta + O(r) \sin^2\theta \} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \beta &= (\eta - \xi)(1 - 3\zeta/2) - \zeta(1 - \varepsilon), \quad \beta' = (\eta' - \xi') \\ &\quad \times (1 - 3\zeta'/2) - \zeta'(1 - \varepsilon') \end{aligned}$$

そして、 $H(r) \sim O(r)$ と $P(r) \sim S(r)$ は Table 2 (A) に示されている。

Eq. (16) の境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} r=1: \quad &\kappa r^2 p_{r\theta}^{(2)} = p_{r\theta}^{(2)}, \quad r^2 u_{\theta}^{(2)} = u_{\theta}^{(2)}, \\ &u_r^{(2)} = u_r'^{(2)} = 0 \\ r \rightarrow \infty: \quad &u_r'^{(2)} = 0, \quad u_{\theta}'^{(2)} = 0 \\ r \rightarrow 0: \quad &u_r^{(2)}, u_{\theta}^{(2)} \text{ は有限} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Eq. (16) の解は、

$$\psi^{(2)} = V(r) \sin^2\theta + W(r) \sin^4\theta, \quad \psi'^{(2)} = T(r) \sin^4\theta + U(r) \sin^2\theta \quad (18)$$

ここで、 $V(r), W(r), T(r), U(r)$ は Table 2 (B) に示されている。

Eqs. (12), (15) および (18) より、2 次近似までの流関数が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -\frac{(1-\cos^2\theta)}{4(1+\kappa)} (r^2 - r') + \tau \{ \sin^2\theta \cos\theta \\ &\quad \times (a_2 r^5 + a_3 r^3) \} (1-\varepsilon) \\ &\quad + \tau^2 \{ V(r) \sin^2\theta + W(r) \sin^4\theta \} \\ \psi' &= \frac{1-\cos^2\theta}{4} \left(2r^2 - \frac{3\kappa+2}{\kappa+1} r + \frac{\kappa}{\kappa+1} \frac{1}{r} \right) \\ &\quad + \tau \left[\sin^2\theta \cos\theta \left\{ a_0' + \frac{a_1'}{r^2} - \frac{A^2}{8} \frac{1}{r} - \frac{1}{8} AB \frac{1}{r^3} \right\} \right] \\ &\quad \times (1-\varepsilon') + \tau^2 \{ T(r) \sin^4\theta + U(r) \sin^2\theta \} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

1.3 流体球抗力

流体球抗力は、次式

$$\frac{F}{2\pi\eta_0' U_{ia}} = \int_0^\pi (p_{r\theta})_{r=1} \sin^2\theta d\theta + \int_0^\pi (p - p_{rr})_{r=1} \times \sin\theta \cos\theta d\theta \quad (20)$$

により求められ、

$$\begin{aligned} \frac{F}{2\pi\eta_0' U_{ia}} &= \frac{3\kappa+2}{\kappa+1} + \tau'^2 \{ A_1 + (1-\varepsilon') A_2 + (1-\varepsilon')^2 A_3 \\ &\quad + \varepsilon'(1-\varepsilon') A_4 + \zeta'(\eta' - \xi') A_5 + \zeta'(1-\varepsilon') A_6 \\ &\quad + (\eta' - \xi') A_7 \} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $A_1 \sim A_7$ は Table 1 (C) に示されている。

1.4 流体球の物質移動

高ペクレ数、低レイノルズ数の条件下での粘弾性流体

系における流体球の物質移動を考える。

濃度方程式は、

$$u_r' \frac{\partial c'}{\partial r} + \frac{u_{\theta}'}{r} \frac{\partial c'}{\partial \theta} = \frac{2}{N_{Pe}'} \frac{\partial^2 c'}{\partial r^2} \quad (22)$$

Eq. (22) の境界条件は ($c' = C'/C_{\infty}'$),

$$\left. \begin{aligned} r=1: \quad &c' = C'/C_{\infty}' \\ r \rightarrow \infty: \quad &c' = 1 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

半径方向座標 r を、流体球表面に原点を持つ y で置換する。

$$y = r - 1 \quad (y \ll 1) \quad (24)$$

Eq. (22) に Eq. (24) と流関数を代入することにより次式が得られる。

$$\frac{\partial c'}{\partial \theta} = \frac{2}{N_{Pe}'} (u_{\theta}')_{y=0} \sin^2\theta \frac{\partial^2 c'}{\partial \psi'^2} \quad (25)$$

薄い境界層内における流関数は、

$$\begin{aligned} \psi' &= -y \{ \pi_1 \sin^2\theta + \tau' \pi_2 \sin^2\theta \cos\theta + \tau'^2 \\ &\quad \times (\pi_3 \sin^4\theta + \pi_4 \sin^2\theta) \} \end{aligned} \quad (26)$$

と近似される。ここで、 $\pi_1 \sim \pi_4$ は Table 1 (D) に示されている。

新たに、変数

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2}{N_{Pe}'} \int \{ \pi_1 \sin^2\theta + \tau' \pi_2 \sin^2\theta \cos\theta + \tau'^2 \\ &\quad \times (\pi_3 \sin^4\theta + \pi_4 \sin^2\theta) \} d\theta \end{aligned} \quad (27)$$

と、Eq. (26) より得られる表面速度を Eq. (25) に代入することにより、

$$\frac{\partial c'}{\partial Z} = \frac{\partial^2 c'}{\partial \psi'^2} \quad (28)$$

が得られ、この式の境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \psi' = 0: \quad &c' = C'/C_{\infty}' \\ \psi' \rightarrow -\infty: \quad &c' = 1 \\ Z = Z_0 &= \frac{2}{N_{Pe}'} \left\{ -\frac{2}{3} \pi_1 - \tau'^2 \left(\frac{8}{15} \pi_3 + \frac{2}{3} \pi_4 \right) \right\}: c' = 1 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Eq. (22) の解は、

$$N_{Sh}' = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left\{ \frac{4}{3} \pi_1 + \tau'^2 \left(\frac{16}{15} \pi_3 + \frac{4}{3} \pi_4 \right) \right\}^{1/2} N_{Pe}'^{1/2} \quad (30)$$

となる。

2. 粘弾性流体系に関する解析結果および考察

抗力においては、Eq. (21) よりわかるように、パラメータ τ' の 1 次項は消え弾性効果は 2 次の項に現れる。

Fig. 1 には、無次元化した 4 個の物質定数をパラメータとして抗力と内部流体の τ の関係を示した。抗力は、 τ が 0.02~0.03 で最小値を持ち τ が 0.05 位以上から急激に増大する。Fig. 1 と同じパラメータ変化における抗力と外部流体の τ' との関係を求めると、抗力は τ' が 0.01 以下ではすべてのパラメータの値において同じ

Table 1 Coefficients of Eqs. (15)~(30)

(A)

$$\alpha = \frac{3\kappa+2}{\kappa+1} B - \frac{\kappa}{\kappa+1} \alpha = \frac{\kappa}{\kappa+1} \alpha_0 = \frac{5A^2B - AB(5\kappa-28) - 12A + 96B - 6B^2 - 36\kappa\alpha^2}{80(1+\kappa)} \quad \alpha_1 = \frac{A^2(5\kappa+10) + AB(15\kappa-18) - 12A + 96B - 6B^2 - 36\kappa\alpha^2}{80(1+\kappa)}$$

$$\pi_1 = \frac{-5A^2 + 33AB - 12A + 96B - 6B^2 - 36\kappa\alpha^2}{80\tau(1+\kappa)} \quad \alpha_2 = \frac{5A^2 - 33AB + 12A - 96B + 6B^2 + 36\kappa\alpha^2}{80\tau(1+\kappa)}$$

(B)

$$A^* = 66(1-\epsilon)^2 a_0 A + \epsilon'(1-\epsilon')(24A^2 - 30a_0 A) + (1-\epsilon')(30a_0 A + 7.5A^2) \quad B^* = -27\{(1-\epsilon')^2 A^2 - \epsilon'(1-\epsilon')A^2 + 3(1-\epsilon')A^2 - 4\beta'A^2\}/8$$

$$C^* = -(1-\epsilon')^2(225a_0 B + 135a_1 A) + \epsilon'(1-\epsilon')(-180AB - 285a_1 A + 45a_0 B) + (1-\epsilon')(-45a_0 B + 285a_1 A - 225AB)$$

$$D^* = 88.5(1-\epsilon')^2 A^2 B + 159\epsilon'(1-\epsilon')A^2 B - 15(1-\epsilon')A^2 B - 495\beta'A^2 B/4$$

$$E^* = 225(1-\epsilon')^2 a_1 B + 225\epsilon'(1-\epsilon')a_1 B + (1-\epsilon')(-225a_1 B + 675B^2/4)$$

$$F^* = -166.5(1-\epsilon')^2 A^2 B - 621\epsilon'(1-\epsilon')A^2 B/4 + 63(1-\epsilon')A^2 B/4 + 189\beta'A^2 B/2$$

$$G^* = 67.5(1-\epsilon')B^2 + 202.5\beta'B^2 \quad H^* = -60(1-\epsilon')^2 a_0 A + (24a_0 A - 21A^2)\epsilon'(1-\epsilon') + (-24a_0 A - 6A^2)(1-\epsilon')$$

$$I^* = 2.5A^2(1-\epsilon')^2 - 2.5A^2\epsilon'(1-\epsilon') + 8.5A^2(1-\epsilon') - 13.5A^2\beta'$$

$$J^* = (180a_0 B + 144a_1 A)(1-\epsilon')^2 + (162AB + 264a_1 A - 108a_0 B)\epsilon'(1-\epsilon') + (108a_0 B - 264a_1 A + 225AB)(1-\epsilon')$$

$$K^* = -69A^2 B(1-\epsilon')^2 - 129A^2 B\epsilon'(1-\epsilon') - 10.5A^2 B(1-\epsilon') + 126\beta'A^2 B$$

$$L^* = -600a_1 B(1-\epsilon')^2 - 600a_1 B\epsilon'(1-\epsilon') + (600a_1 B - 450B^2)(1-\epsilon')$$

$$M^* = 252A^2 B(1-\epsilon')^2 + 243A^2 B\epsilon'(1-\epsilon') + 9A^2 B(1-\epsilon') - 135\beta'A^2 B \quad N^* = -130.5B^2(1-\epsilon') - 459\beta'B^2$$

$$\bar{A} = -12a_0 - 3A + 4.5a_0 A + 19A^2/4 - 30a_1 + 45B/4 - 21A^2/16 + 4.5a_0 B + 11a_1 A - 81AB/8 - A^2 B/16 + 9a_1 B - 81B^2/8 + 9A^2 B/4 - 9B^2/4$$

$$\bar{B} = -4.5a_0 B + 9A^2 B/16 - 4.5a_1 B + 9AB^2/16$$

$$\bar{C} = -12a_0 + 2.5A^2 + 4.5a_0 A - 30a_1 - 15A^2/16 + 21AB/4 + 11a_1 A + 4.5a_0 B - 43A^2 B/16 + 9a_1 B - 1.5B^2$$

$$\bar{D} = 48a_0 + 12A - 19.5a_0 A - 21.5A^2 + 150a_1 - 112.5B + 109A^2/16 - 63a_1 A - 7.5a_0 B + 489AB/8 - 109A^2 B/16 + 3a_1 B + 45B^2/8 + 9AB^2/4 - 9B^2/8$$

$$\bar{E} = -3a_0 A - A^2/8 + 7a_1 A + 22.5a_0 B - 45A^2 B/16 - 13.5a_1 B + 81AB^2/16$$

$$\bar{F} = 48a_0 - 11A^2 - 19.5a_0 A + 150a_1 + 73A^2/16 - 30AB - 63a_1 A - 7.5a_0 B + 215A^2 B/16 + 3a_1 B - 21AB^2/8$$

$$\bar{G} = 27A^2 B/16 - 81AB^2/8 + 81B^2/8 \quad \bar{H} = -9A^2 B/8 + 27AB^2/4 - 27B^2/4$$

$$\bar{I} = (1-\epsilon')^2 140a_2 A + \epsilon(1-\epsilon')112a_2 A + (1-\epsilon)(-112a_2 A + 12a^2) - 31.5\beta a^2$$

$$\bar{A} = H^*/6 + A^*/24 + I^*/14 - 3B^*/70 + J^*/24 + C^*/15 + K^*/36 + 7D^*/198 + L^*/50 + 7E^*/300 + M^*/66 - 15F^*/572 + N^*/104 + 8G^*/585$$

$$-(1-\epsilon')\bar{A} - (1-\epsilon')^2 \bar{B} + \epsilon'(1-\epsilon')\bar{C} - \zeta'(\eta' - \xi')81B^2/16 + (\eta' - \xi')27B^2/8 - \zeta'(1-\epsilon')27B^2/8$$

$$\bar{B} = 11A^2/24 - B^2/14 - C^*/6 - 13D^*/198 - 11E^*/300 - 41F^*/1,716 - 5G^*/390 - (1-\epsilon')\bar{D} - (1-\epsilon')\bar{E} + \epsilon'(1-\epsilon')\bar{F} - \zeta'(\eta' - \xi')\bar{G}$$

$$-(\eta' - \xi')\bar{H} + \zeta'(1-\epsilon')\bar{H}$$

$$\bar{G} = \bar{I}/14 - (1-\epsilon')(3a_2 A + 3a_2 A) + \epsilon(1-\epsilon)(-17a_2 A - 6a_2 A) - (1-\epsilon)(-17a_2 A + 15a^2/4 - 6a_2 A) + \zeta(\eta' - \xi')81A^2/16 + (\eta' - \xi')27A^2/8 - \zeta(1-\epsilon)27A^2/8$$

$$\bar{D} = -(1-\epsilon)(-6a_2 A + 20a_2 A) + \epsilon(1-\epsilon)(51a_2 A + 18a_2 A) - (1-\epsilon)(51a_2 A - 57A^2/4 + 18a_2 A) - \zeta(\eta' - \xi')27A^2/16 + (\eta' - \xi')7A^2/8 - \zeta(1-\epsilon)9A^2/8$$

$$\bar{E} = -\bar{I}/140 \quad \bar{F} = -(H^* + 2A^*)/36 - (I^* - 4E^*/5)/140 - (J^* - 8C^*/5)/360 - (K^* - 8D^*/11)/756 - (L^* - 4E^*/9)/1,400 - (M^* - 4F^*/13)/4,752 - (N^* - 8G^*/5)/5,720$$

$$\bar{G} = A^*/12 - C^*/60 - D^*/198 - E^*/450 - F^*/858 - G^*/2,340$$

$$\bar{H} = -(H^* + 2A^*)/36 - (3I^* - 12B^*/5)/280 - (J^* - 8C^*/5)/180 - (5K^* - 40D^*/11)/1,512 - (3L^* - 4E^*/3)/1,400 - (7M^* - 28F^*/13)/4,752 - (9N^* - 8G^*/5)/11,440 + 2B^2/315$$

$$\bar{I} = A^*/24 - B^*/126 - C^*/60 - 5D^*/792 - E^*/300 - 7F^*/3,432 - G^*/1,040 \quad \bar{J} = 3\bar{I}/140$$

$$c^* = -(9\bar{G}/4 + 7\bar{I} - \bar{B} + \kappa^2 \bar{D} + (1+\kappa)(7\bar{G}/4 - 7\bar{I}))/[14(1+\kappa)]$$

$$a^* = (9\bar{G}/4 + 7\bar{I} - \bar{B} + \kappa^2 \bar{D} + (1+\kappa)(7\bar{G}/4 - 7\bar{I}) + 7\bar{C}(1+\kappa)/2)/[14(1+\kappa)]$$

$$b = -(9\bar{G}/4 + 7\bar{I} - \bar{B} + \kappa^2 \bar{D})/[14\tau^2(1+\kappa)] \quad d = (9\bar{G}/4 + 7\bar{I} - \bar{B} + \kappa^2 \bar{D})/[14\tau^2(1+\kappa)]$$

$$c_1 = [-12c^*/5 - 3.5\bar{F} + \bar{H} - \bar{A} - \tau^2 d(-6\kappa - 347/70) - 8b\kappa + \bar{E} + \bar{J} - \kappa\bar{C}]/[\tau^2(2-6\kappa)]$$

$$d_1 = -c_1 - 11d/140 + \bar{I}/280 \quad \bar{b}_1 = 6c^*/5 + \bar{F}/4 + \bar{H}/2 - \tau^2(c_1 - 347d/140 + \bar{E}/2 + \bar{J}/2)$$

$$\bar{a}_1 = -\bar{b}_1 + 4c^*/5 + \bar{F}/2$$

(C)

$$A_1 = \frac{4}{45}H^* + \frac{7}{126}I^* + \frac{J^*}{27} + \frac{K^*}{36} + \frac{52}{2,583}L^* + \frac{M^*}{60} + \frac{N^*}{90} - \frac{a^*}{5} - \frac{102}{5}c^* + \frac{103}{109}A^* + \frac{19}{525}C^* + \frac{171}{175}D^* + \frac{131}{1,575}E^* + \frac{83}{6,435}F^* + \frac{65,929}{1,544,400}G^* - 4a_1 - \frac{149}{4,725}B^2$$

$$A_1 = \frac{25}{2}B - \frac{A^3}{45} - \frac{96}{35}a_0 B + \frac{158}{105}a_1 A - \frac{12}{7}AB - \frac{481}{120}A^2 B - \frac{80}{9}a_1 B - \frac{20}{3}B^2 - \frac{9}{25}AB^2 - \frac{17}{80}B^3$$

$$A_2 = -\frac{92}{75}a_0 A + \frac{76}{45}a_1 B - \frac{99}{50}AB^2 + \frac{2}{5}a_0 A - \frac{11}{360}A^2 + \frac{976}{105}a_1 A + \frac{102}{5}a_0 B - \frac{1}{20}A^2 B$$

$$A_4 = \frac{8}{75}A^2 - \frac{85}{18}A^3 - \frac{33}{70}AB - \frac{158}{105}a_1 A - \frac{48}{35}a_0 B + \frac{112}{45}a_1 B - \frac{69}{50}AB^2 + \frac{29}{60}A^2 B$$

$$A_5 = -\frac{9}{40}A^3 - \frac{99}{20}B^2 + \frac{31}{10}A^2 B - \frac{297}{200}AB^2 \quad A_6 = -\frac{3}{20}A^3 - \frac{33}{10}B^2 + \frac{19}{20}A^2 B - \frac{99}{100}AB^2$$

$$A_7 = -\frac{57}{10}B^2 - \frac{3}{4}A^2 B + \frac{99}{100}AB^2 + \frac{3}{20}A^3 - \frac{108}{35}AB$$

(D)

$$\pi_1 = 1 - \frac{1}{4} \frac{3\kappa+2}{\kappa+1} - \frac{1}{4} \frac{\kappa}{\kappa+1} \quad \pi_2 = -2a_1 + \frac{A^2}{8} + \frac{3}{8}AB$$

$$\pi_3 = -a^* - 3c^* + \frac{A^*}{24} - \frac{B^*}{126} - \frac{C^*}{60} - \frac{5}{792}D^* - \frac{E^*}{300} - \frac{7F^*}{3,432} - \frac{G^*}{1,040}$$

$$\pi_4 = \bar{a}_1 - \bar{b}_1 - \frac{H^* + 2A^*}{36} - \frac{3I^* - 672c^* - 2.4B^*}{280} - \frac{J^* - 1.6C^*}{180} - \frac{5K^* - 40D^*/11}{1,512} - \frac{6L^* - 8E^*/3}{2,800} - \frac{7M^* - 28F^*/13}{4,752} - \frac{9N^* - 8G^*/5}{11,440} + \frac{2B^*}{315}$$

Table 2 Functions of Eqs. (16) and (19)

(A)

$$\begin{aligned}
 P(r) &= 140 a_3 a r^3 & Q(r) &= 112 a_3 a r^3 & R(r) &= (-112 a_3 a + 12 a^3) r^3 & S(r) &= -31.5 a^3 r^3 \\
 H(r) &= \frac{66 a_0 A}{r^6} + \frac{27 A^3}{8 r^7} - \frac{225 a_0 B + 135 a_1 A}{r^8} + \frac{177 A^2 B}{2 r^9} + \frac{225 a_1 B}{r^{10}} + \frac{333 A B^2}{2 r^{11}} \\
 I(r) &= \frac{60 a_0 A}{r^6} + \frac{5 A^3}{2 r^7} + \frac{180 a_0 B + 144 a_1 A}{r^8} - \frac{69 A^2 B}{r^9} - \frac{600 a_1 B}{r^{10}} + \frac{252 A B^2}{r^{11}} \\
 J(r) &= \frac{24 A^3 - 30 a_0 A}{r^6} + \frac{27 A^3}{8 r^7} - \frac{180 A B + 285 a_1 A - 45 a_0 B}{r^8} + \frac{159 A^2 B}{r^9} + \frac{225 a_1 B}{r^{10}} - \frac{621 A B^2}{4 r^{11}} \\
 K(r) &= \frac{24 a_0 A - 21 A^3}{r^6} - \frac{5 A^3}{2 r^7} + \frac{162 A B + 264 a_1 A - 108 a_0 B}{r^8} - \frac{129 A^2 B}{r^9} - \frac{600 a_1 B}{r^{10}} + \frac{243 A B^2}{r^{11}} \\
 L(r) &= \frac{30 a_0 A + 7.5 A^3}{r^6} - \frac{81 A^3}{8 r^7} - \frac{45 a_0 B - 285 a_1 A + 225 A B}{r^8} - \frac{15 A^2 B}{r^9} - \frac{225 a_1 B}{r^{10}} - \frac{168.75 B^2}{r^{11}} + \frac{63 A B^2}{4 r^{11}} + \frac{135 B^3}{2 r^{13}} \\
 M(r) &= \frac{-24 a_0 A - 6 A^3}{r^6} + \frac{17 A^3}{2 r^7} + \frac{108 a_0 B - 264 a_1 A + 225 A B}{r^8} - \frac{21 A^2 B}{r^9} + \frac{600 a_1 B}{r^{10}} - \frac{456 B^2}{r^{11}} + \frac{9 A B^2}{r^{11}} + \frac{261 B^3}{r^{13}} \\
 N(r) &= \frac{27 A^3}{2 r^7} - \frac{495 A^2 B}{4 r^8} + \frac{189 A B^2}{2 r^{11}} + \frac{405 B^3}{2 r^{13}} & O(r) &= -\frac{27 A^3}{2 r^7} + \frac{126 A^2 B}{r^8} - \frac{135 A B^2}{r^{11}} - \frac{456 B^3}{r^{13}}
 \end{aligned}$$

(B)

$$\begin{aligned}
 V(r) &= c_1 r^4 + d_1 r^2 + \frac{j - 22 a d}{280} r^6 & W(r) &= b r^4 + d r^6 \\
 T(r) &= \frac{a^*}{r} + \frac{c^*}{r^3} - \frac{A^* \cdot 1}{48 r^3} - \frac{B^*}{126 r^3} \log r + \frac{C^*}{240} \frac{1}{r^3} + \frac{D^*}{792} \frac{1}{r^3} + \frac{E^*}{1,800} \frac{1}{r^3} + \frac{F^*}{3,432} \frac{1}{r^3} + \frac{G^*}{9,360} \frac{1}{r^3} \\
 U(r) &= \bar{a} r + \bar{b} \frac{1}{r} + \frac{H^* + 2 A^*}{72} \frac{1}{r^2} + \frac{I^* - 22 a^* - 0.8 B^*}{280} \frac{1}{r^2} + \frac{J^* - 1.6 C^*}{720} \frac{1}{r^4} + \frac{K^* - 8 D^* / 11}{1,512} \frac{1}{r^4} + \frac{L^* - 4 E^* / 9}{2,800} \frac{1}{r^6} + \frac{M^* - 4 F^* / 13}{4,752} \frac{1}{r^8} \\
 &\quad + \frac{N^* - 8 G^* / 45}{11,440} \frac{1}{r^8} + \frac{2 B^* \log r}{315 r^3}
 \end{aligned}$$

一定値（ニュートン流体系の値）をだいたい取り、 τ' が0.05以上では急激に減少することがわかった。

Fig. 2は粘性をパラメータとした抗力と τ' の関係である。 $\eta_0=0.1$, $\eta'_0=10.0$ の場合は τ' の増加に従って抗力は増大するが、他の場合は逆に減少する。このことは、粘性と弾性効果は互いに複雑に影響し合いながら抗力に影響をすることを示している。

Eq. (30) からわかるように、物質移動においても、パラメータ τ' の1次の項は消え、粘弾性効果は2次の項に現れる。Fig. 3には、4個の物質定数をパラメータとした物質移動係数と外部流体の τ' の関係を示した。 $\varepsilon, \varepsilon'$ あるいは η, η' を変化させた場合は、 τ' が0.05位から急激に物質移動係数は大きくなるが、 ζ, ζ' が0.01あるいは ξ, ξ' が0.01の場合は、 τ' が変化してもあまり物質移動係数は変化せず、 ζ, ζ' が0.01になった場合は逆に減少する傾向さえある。 ζ, ζ' および ξ, ξ' が0.1の場合との比較から、 ζ, ζ' と ξ, ξ' の減少は物質移動係数の急激な増大を抑える訳で、その変化の物質移動係数に対する影響は大きいことがわかる。

Fig. 4には、物質移動係数と内部流体の τ との関係を示した。 τ の値が0.04~0.06で最大値を取り、最大値を取った後は急激に減少する。変化の様相はだいたい皆同じであるが、 ζ, ζ' が0.01の場合と η, η' が0.05の場合の理論線は途中で交差する。

Fig. 3に示した物質移動係数と外部流体の τ' との関係は前述した抗力の場合と同様、 $\tau=0.02$ としているにもかかわらず τ' が非常に小さくなるとニュートン流体系の場合の値に漸近するのであるが、Fig. 4に示した結

Fig. 1 Effect of τ' and constants in Eq. (2) on drag force ($\tau=0.02$, $\eta_0=0.1$, $\eta'_0=0.1$)

Fig. 2 Effect of τ' and zero shear viscosities on drag force ($\tau=0.02$, $\varepsilon=0.1$, $\zeta=0.1$, $\xi=0.1$, $\eta=0.1$, $\eta'_0=0.1$, $\zeta'_0=0.1$, $\xi'_0=0.1$, $\eta'_0=0.1$)

Fig. 3 Effect of τ' and constants in Eq. (2) on mass transfer ($\tau=0.02$, $\eta_0=0.1$, $\eta_0'=0.1$)

Fig. 4 Effect of τ and constants in Eq. (2) on mass transfer ($\tau'=0.02$, $\eta_0=0.1$, $\eta_0'=0.1$)

果は、抗力に関する Fig. 1 と同様 $\tau'=0.02$ としているために τ が非常に小さくともニュートン流体系の値には漸近しない。以上のことから、外部流体の弾性効果のほうが内部流体のそれより抗力および物質移動係数に与える影響が大きいことがわかる。事実、抗力に最も影響する因子である ϵ および ϵ' を例にして考察すると、 ϵ' を 1/100 にすると抗力は明らかに大きくなるが、 ϵ を 1/100 にしても抗力のごくわずかの減少しか示さないことがわかる。

Fig. 5 には、粘性をパラメータとした物質移動係数と外部流体の τ' との関係を示した。 $\eta_0=10.0$, $\eta_0'=0.1$ の場合と $\eta_0=0.1$, $\eta_0'=10.0$ の場合は、他の二つの場合と異なり τ' が増加するに従って物質移動係数は減少する。このことは、抗力の場合と同様、粘性と弾性は互いに複雑に影響し合いながら物質移動係数に影響することを示している。

Fig. 5 Effect of τ' and zero shear viscosities on mass transfer ($\tau=0.02$, $\epsilon=0.1$, $\zeta=0.1$, $\xi=0.1$, $\eta=0.1$, $\eta'=0.1$, $\epsilon'=0.1$, $\zeta'=0.1$, $\xi'=0.1$, $\eta'=0.1$)

3. Reiner-Rivlin 流体系に関する解析および考察

Oldroyd モデルは、Wagner ら⁹⁾ が液滴の運動問題に適用した Rivlin-Ericksen モデル

$$P^{ik} = \phi_1 A^{(1)} + \phi_2 A^{(2)} + \phi_3 [A^{(1)}]^2 + \phi_4 A^{(3)} + \phi_5 \times [A^{(1)} \cdot A^{(2)} + A^{(2)} \cdot A^{(1)}] + \phi_6 [\text{tr} A^{(2)}] A^{(1)} \quad (31)$$

ただし、

$$A_{ik}^{(1)} = (U_{k,i} + U_{i,k})/2 \quad (n=1) \\ A_{ik}^{(n)} = \frac{\partial A_{ik}^{(n-1)}}{\partial t} + U^j A_{ik,j}^{(n-1)} + A_{ij}^{(n-1)} U^j_{,k} + A_{ik}^{(n-1)} U^j_{,i} \quad (n>1)$$

と、次の係数関係で関連づけられる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \eta_0, & \phi_2 &= \eta_0(\lambda_2 - \lambda_1), \\ \phi_3 &= \eta_0(\lambda_1 - \lambda_2), & \phi_4 &= \eta_0\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \phi_5 &= -3\eta_0\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)/2 \\ \phi_6 &= -\frac{\eta_0}{2} \left\{ 2\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) - \frac{3}{2}\mu_0(\nu_2 - \nu_1) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

古典的なモデルであり、レオロジー的には問題はあるが、現状では 3 次元の流れの取り扱いにおいては捨て難く、最近でも円柱あるいは固体球の運動問題の解析^{2, 8)}に用いられている Reiner-Rivlin モデルは、上述した Rivlin-Ericksen モデルの特殊な場合であり、Rivlin-Ericksen テンソルの $n=2$ 以上を零とした場合に相当し、構成式は、

$$P^{ik} = \phi_1 A^{(1)} + \phi_5 [A^{(1)}]^2 \quad (33)$$

となる。この Reiner-Rivlin 流体系における流体球の運動および物質移動について、Oldroyd 流体系の場合と同様の摂動法を用いて Eqs. (5) および (6) の運動方程式と連続式を境界条件 Eq. (7) の下に解くと、流体球内外の流関数は、

Table 3 Coefficients and functions of Eqs. (34)~(36)

(a)

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\phi_1}{\phi_1'} & \lambda &= \frac{\phi_2}{\phi_2'} & A_1 &= \frac{1}{8} \left(\frac{3\kappa+2}{\kappa+1} \right)^2 & A_2 &= \frac{1}{8} \frac{\kappa(3\kappa+2)}{(\kappa+1)^2} & B_1 &= \frac{3\kappa+2}{\kappa+1} & B_2 &= \frac{3\kappa}{\kappa+1} \\ \bar{a}_0 &= \frac{A_1(6+5\kappa) - A_2(5\kappa+8)}{10(1+\kappa)} & \bar{a}_2 &= \frac{A_1(5\kappa+4) + A_2(15\kappa+18)}{10(1+\kappa)} & b_1 &= \frac{\kappa(A_1-3A_2)}{10(1+\kappa)\lambda} & b_2 &= \frac{\kappa(3A_2-A_1)}{10(1+\kappa)\lambda} \\ X(r) &= \frac{c_0}{r} + \frac{c_2}{r^3} + \frac{c_3}{r^4} + \frac{c_4}{r^5} + \frac{c_5}{r^6} + \frac{c_6 \log r}{r^7} & Y(r) &= d_0 r + \frac{d_1}{r} + \frac{d_2}{r^3} + \frac{d_3}{r^4} + \frac{d_4}{r^5} + \frac{d_5}{r^6} + \frac{d_6 \log r}{r^7} \\ \bar{c}_1 &= -2\bar{a}_0 B_1 & c_2 &= \frac{5\bar{a}_2 B_1 - 3\bar{a}_0 B_2}{8} & c_4 &= \frac{4A_1 B_1 - 3A_2 B_1}{36} & c_5 &= -\frac{3}{44} A_2 B_2 & c_6 &= \frac{8}{7} A_1 B_1 & d_2 &= \frac{3}{2} \bar{a}_0 B_1 & d_3 &= \frac{101}{98} A_1 B_1 \\ d_4 &= \frac{-3\bar{a}_2 B_1 + 2\bar{a}_0 B_2}{6} & d_5 &= \frac{-13A_1 B_1 + 6A_2 B_1}{126} & d_6 &= \frac{13}{198} A_2 B_2 & d_7 &= -\frac{32}{35} A_1 B_1 & g_1 &= c_1 + c_3 + c_4 + c_5 \\ g_2 &= d_3 + d_4 + d_5 + d_6 & g_3 &= -2\bar{c}_1 - 4c_2 - 5c_4 - 7c_5 + c_6 & g_5 &= 22\bar{c}_1 + 40c_2 + 52c_4 + 82c_5 - 9c_6 \\ g_4 &= -8\bar{c}_1 - 8c_2 - 8c_4 - 8c_5 + 12d_2 + 30d_4 + 42d_5 + 72d_6 - 9d_7 & g_7 &= -2d_3 - 3d_4 - 4d_5 - 7d_6 + d_7 & g_8 &= 3\bar{a}_0 B_1 + 5\bar{a}_2 B_1 - 4A_1 B_1 - 6A_2 B_1 \\ g_6 &= \frac{16}{3} \bar{a}_2 B_2 + 2b_2 B_2 & g_{10} &= \frac{3}{2} \bar{a}_0 B_1 + 4\bar{a}_2 B_1 - \frac{3}{2} \bar{a}_0 B_2 - \frac{5}{2} A_1 B_1 + \frac{5}{2} A_2 B_1 - 6A_2 B_2 - 4A_1 B_2 + 6A_2 B_2 & g_{11} &= \frac{16}{3} \bar{a}_2 B_2 + 2b_2 B_2 & g_{12} &= \frac{3}{2} \bar{a}_2 B_2 \\ g_{13} &= 2b_2 B_2 & g_{14} &= b_2 B_1 + b_2 B_2 & c_0 &= \frac{-\kappa(21\kappa+30)g_3 - 7\kappa^2 g_5 + \kappa g_8 - \kappa g_9 + 2\kappa g_{10} - \lambda^2(g_6 + g_{11})}{14\kappa(\kappa+1)} \\ c_1 &= \frac{\kappa(7\kappa+16)g_1 + 7\kappa^2 g_3 - \kappa g_5 + \kappa g_8 - 2\kappa g_{10} + \lambda^2(g_6 + g_{11})}{14\kappa(\kappa+1)} & c_2 &= \frac{\kappa(-9\kappa g_1 + 7\kappa g_3 + \kappa g_5 - \kappa g_8 + 2\kappa g_{10} - \lambda^2(g_6 + g_{11}))}{14\kappa^2(\kappa+1)} \\ \bar{d}_1 &= \frac{c_0(48\kappa^2/5 + 24\kappa) + 8\kappa c_2 + 3\kappa^2 g_1 - \kappa g_5 + \kappa g_8 + 2\kappa g_{10} - \lambda^2(72c_1/5 - 2g_{12}/5 + 8c_0 + g_{13} + g_{14} + g_{11})}{6\kappa(1+\kappa)} \\ e_0 &= \frac{-\kappa(-9\kappa g_1 + 7\kappa g_3 + \kappa g_5 - \kappa g_8 + 2\kappa g_{10} - \lambda^2(g_6 + g_{11}))}{14\kappa^2(\kappa+1)} & d_0 &= \frac{4}{5} c_2 - g_2 - \bar{d}_1 & f_0 &= -\frac{\kappa^2}{2\lambda^2} \left(\frac{16}{5} c_2 - g_2 - 2\bar{d}_1 + g_1 \right) - \frac{4}{5} c_1 + \frac{g_{12}}{20} \\ f_1 &= \frac{4}{5} c_1 - f_0 - \frac{g_{12}}{20} & f_2 &= \frac{g_{12}}{20} - 8c_1 \end{aligned}$$

(b)

$$\bar{c}_1 = 1/2(1+\kappa) \quad \bar{a}_2 = -c_0 - 2\bar{c}_1 - 3c_2 - 4c_3 - 5c_4 - 7c_5 + c_6 \quad \bar{c}_2 = d_0 - \bar{d}_1 - 2d_2 - 3d_3 - 4d_4 - 5d_5 - 7d_6 + d_7$$

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{(1-\cos^2\theta)(r^2-r^4)}{4(1+\kappa)} + S\{\sin^2\theta \cos\theta(b_2 r^5 + b_1 r^3)\} \\ &\quad + S^2\{\sin^4\theta(e_0 r^4 + e_1 r^6) + \sin^2\theta(f_0 r^3 + f_1 r^4 + f_2 r^6)\} \\ \phi' &= \frac{1-\cos^2\theta}{4} \left(2r^2 + \frac{3\kappa+2}{\kappa+1} r + \frac{\kappa}{\kappa+1} \frac{1}{r} \right) \\ &\quad + S' \left\{ \sin^2\theta \cos\theta \left(\bar{a}_0 + \frac{\bar{a}_2}{r^2} - \frac{A_1}{r} - \frac{A_2}{r^3} \right) \right\} \\ &\quad + S^2 \{ X(r) \sin^4\theta + Y(r) \sin^2\theta \} \end{aligned} \quad (34)$$

となり、抗力は、

$$\begin{aligned} \frac{F}{2\pi a U_0 \phi_1'} &= \frac{3\kappa+2}{\kappa+1} + S'^2 \left(\frac{16}{25} \bar{a}_0 B_1 + \frac{416}{35} \bar{a}_0 B_2 \right. \\ &\quad - \frac{334}{15} A_1 B_1 + \frac{3}{5} A_1 B_2 - \frac{262}{75} A_2 B_1 - \frac{20}{3} \bar{a}_2 B_1 - \frac{22}{25} A_2 B_2 \\ &\quad + \frac{32}{3} c_0 + \frac{112}{9} c_2 + \frac{1,584}{25} c_3 + \frac{464}{15} c_4 + \frac{768}{35} c_5 + \frac{128}{25} \bar{c}_1 \\ &\quad + \frac{11,824}{135} c_6 - \frac{44}{3} d_0 - \frac{32}{5} d_2 + \frac{140}{9} d_3 + \frac{192}{7} d_4 + 56 d_5 \\ &\quad \left. - \frac{287}{27} d_7 - \frac{154}{5} d_8 \right) \end{aligned} \quad (35)$$

そして、物質移動係数は、

$$N_{Sh}' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{4}{3} \bar{c}_1 + S'^2 \left(\frac{16}{15} \bar{c}_3 + \frac{4}{3} \bar{c}_4 \right) \right\}^{1/2} N_{Pe}^{1/2} \quad (36)$$

となる。なお、Eqs. (34)~(36) の係数および関数は Table 3 に示されている。S は摂動パラメータである。

Eq. (35) からわかるように、抗力においてパラメータ S' の 1 次項は消え、2 次項に交差粘度の影響が出てくる。Eq. (35) において、 $S=S'=0$ とすると、当然ながらニュートン流体系における Hadamard の解となる。

Fig. 6 Effect of zero shear viscosity and cross-viscosity on drag force (Reiner-Rivlin fluid system)

Fig. 6 に、抗力と外部流体のパラメータ S' との計算結果を示した。 $\lambda=10$ の場合以外では、 S' が 0.03~0.05 位で抗力は急激に増加する。 λ が 1 から 1/10 になっても抗力と外部流体のパラメータ S' との関係はほとんど変化しないが、10 倍になると S' が 0.005 位から抗力が急激に増加する。しかし、絶対値は違っても S' に対する抗力の変化の様相はすべて同じである。

物質移動においても、交差粘度に関する 1 次項は消え、その影響は 2 次項に現れる。Fig. 7 には、外部

Fig. 7 Effect of zero shear viscosity and cross-viscosity on mass transfer (Reiner-Rivlin fluid systems)

流体のパラメータ S' に対する物質移動係数の変化が示されている。 $\kappa=0.1, \lambda=1.0$ と $\kappa=1.0, \lambda=10.0$ の場合は、 S' の変化に対して、それぞれ S' が 0.04 と 0.01 位から急激に減少するが、他の場合はほとんど変化しない。 λ が 1.0 の場合、物質移動係数はほとんど変化せず、 λ が 0.1 の場合も同様であるが、10 の場合は S' が 0.01 位で急激に減少する。

以上、非ニュートン流体系における流体球の運動および物質移動に対する理論的考察を行った。特に、物質移動に対する弾性効果の影響は今までまったく解析されたことのない分野であり、また運動問題と同様定量的検討の可能な実験は行われておらず、今後本理論の適用範囲の決定の問題ともからんで実験研究の充実に課題である。

結 言

非ニュートン流体系における流体球の運動および物質移動に関しての粘弾性効果について、理論的考察を行った。

流体モデルとして Oldroyd モデルを用い、低レイノルズ数域における非ニュートン流体系の流体球に関して摂動法を適用することにより、外部および内部流体の流関数が得られた。

流体球抗力を求めたが、粘弾性効果の 1 次の項は消え、2 次の項に粘弾性効果が現れ、遅延時間に関する物質定数 λ_2 の変化が他の物質定数の変化より抗力に大きく影響することがわかった。

物質移動係数に関しても、やはり粘弾性効果の 1 次の項は消え、2 次の項に粘弾性効果が現れた。 ζ, ζ' および ξ, ξ' の変化が物質移動係数に対して特徴的な影響を示した。また、粘性と弾性は互いに影響し合いながら、抗力および物質移動係数に影響する。

抗力および物質移動係数に対して、最も影響の大きい遅延時間と緩和時間の比からなるパラメータ ϵ と ϵ' に関してであるが、内部流体より外部流体の粘弾性の影響

のほうが抗力および物質移動係数に対して大きいことがわかった。

さらに、Reiner-Rivlin 流体系における流体球の抗力および物質移動係数を Oldroyd 流体系の場合と同様な解析により求め、それらに対する非ニュートン特性の影響を明らかにした。

Nomenclature

$A_{ik}^{(n)}$	= Rivlin-Ericksen tensor of order n	[sec ⁻ⁿ]
a	= radius of the fluid sphere	[cm]
$C(c)$	= solute concentration	[g-mol/l]
$E_{ik}(e_{ik})$	= component of rate-of-deformation tensor	[sec ⁻¹]
F	= drag force	[g-cm/sec ²]
g_{ik}	= component of metric tensor	[—]
N_{Pe}	= Peclet number	[—]
N_{Sh}	= Sherwood number	[—]
$P(p)$	= pressure	[g/cm-sec ²]
$P_{ik}(p_{ik})$	= component of rate of strain tensor	[g/cm-sec ²]
$R(r)$	= spherical co-ordinate	[cm]
S	= $\phi_0 U_1 / \phi_{1a}$ perturbation parameter	[—]
S_{ik}	= component of stress tensor	[g/cm-sec ²]
t	= time	[sec]
$U_1(u_1)$	= component of velocity vector	[cm/sec]
U_1	= magnitude of the uniform stream velocity	[cm/sec]
$W_{ik}(w_{ik})$	= component of vorticity tensor	[sec ⁻¹]
y	= $r-1$ ($y \ll 1$)	[—]
Z	= defined by Eq. (27)	[—]
β	= $(\eta-\xi)(1-3\zeta/2)-\zeta(1-\epsilon)$	[—]
τ	= ratio of relaxation times	[—]
θ	= spherical co-ordinate	[deg]
κ	= ratio of zero shear viscosities	[—]
λ	= ratio of cross-viscosities	[—]
λ_1	= relaxation time	[sec]
$\lambda_2(\epsilon)$	= retardation time	[sec]
$\mu_0(\zeta), \nu_1(\xi), \nu_2(\eta)$	= coefficients in Oldroyd model	[sec]
η_0	= zero shear viscosity	[g/cm-sec]
ρ	= density	[g/cm ³]
τ	= perturbation parameter	[—]
$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_6$	= coefficients in the Rivlin-Ericksen model	[—]
ψ	= stream function	[—]

<Superscripts and subscripts>

'	= continuous phase
(0), (1), (2)	= 0th, 1st or 2nd order approximation in perturbation method
$\cdot$	= surface
∞	= bulk

Literature cited

- 1) Astarita, G.: *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, **5**, 548 (1966)
- 2) Kato, H., N. Tachibana and K. Oikawa: *Trans. JSME*, **38**, 809 (1972)

- 3) Leal, L. G., J. Skoog and A. Acrivos: *Can. J. Chem. Eng.*, **49**, 569 (1971)
- 4) Leslie, F. M.: *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **14**, 36 (1961)
- 5) Moo-Young, M. and T. Hirose: *Can. J. Chem. Eng.*, **50**, 128 (1972)
- 6) Oldroyd, J. G.: *Proc. Roy. Soc., London*, **A 245**, 278 (1958)
- 7) Roberts, J. E.: *Proc. II Int. Congr. Rheology, Oxford*, p.91 (1953)
- 8) Sigli, D.: *C. R. Acad. Sc.*, **272**, 1006 (1971)
- 9) Wagner, M. G. and J. C. Slattery: *AIChE J.*, **17**, 1198 (1971)

カナアミリングを充填した充填流動層における 層膨張および軸方向の有効熱伝導度について*

加藤 邦夫**・竹内 尚武***

平田 賢太郎****・伊藤 宇太郎**

群馬大学工学部 化学工学科**

緒 言

挿入した充填物の間で流動化粒子を流動化させる充填流動層においては、充填物によって層内での気泡の成長が著しく妨げられる。したがって充填流動層においては流動化粒子と流体との接触がよくなるので、同一操作条件での通常の流動層に比べて反応率が高くなり、粒子-流体間の移動速度が大きくなる。同時に挿入充填物が層内での粒子と流体の接触機構を規格化させる効果を持つので、装置のスケールアップを容易にすることができる。

充填物としては、球形の充填物、ラシヒリング、カナアミリング、種々の格子状挿入物などが考えられるが、流動化粒子が触媒となるような反応においては充填物の間での空間率を大きくすることのできるカナアミリングとか種々の格子状挿入物が有利である。

すでに著者らは主として球形の充填物を挿入した場合の充填流動層に関する研究³⁻⁵⁾を行ってきたので、今回はカナアミリングを充填した場合の層膨張および軸方向での有効熱伝導度について測定を行い、それらに対する実験式を得たのでここに報告する。層膨張の測定は流動化粒子を流動化した場合の層長を推定するうえで重要となるほか、充填流動層内での気泡の上昇速度を推定するなど流動化全体を示す指標ともなるが、最近の Capes らの報告¹⁾を除いてはほとんどこの方面の研究はなされていない。一方軸方向の有効熱伝導度の測定をすることにより、挿入充填物によって装置内での有効熱伝導度がど

の程度抑制され、かつ通常の流動層におけるそれと比べてどの程度小さくなるかを定量的に知ることは、本装置を工業的に利用する場合にきわめて重要である。また充填流動層での有効熱伝導度は主として層内での粒子混合に基因する²⁾ので、これを測定することによって層内での粒子混合の大きさをも推定することができる。以上のごとく層膨張と軸方向の有効熱伝導度を測定すれば充填流動層の流動化および粒子と流体の接触の様子の概略を知ることができる。

1. 実験方法

1-1 層膨張の測定

充填流動層では層内での気泡の成長は充填物によって妨げられ、気泡は大きくならないので層頂での粒子層の振動も小さく、視察によって容易に層頂を測定できる。本実験に使用した充填物を Table 1 に示す。また流動化粒子としてはガラス粒子 (+35-42 mesh, +48-60 mesh, +80-100 mesh, +100-115 mesh, +150-170 mesh), および F. C. C 粒子(+150-200 mesh) などを用いた。実験装置本体は主として内径 10 cm のアクリルの塔で気体分散板としては内径 20 μ 、厚さ 2 mm の多孔質板を用いた。実験に際しては偏流などの正常でない流動が起きていないことを確かめたのち実験に取りかかった。

1-2 有効熱伝導度の測定

本実験方法は前報⁴⁾と同じ方法を用いたのでここでは簡単に記述する。実験装置本体は内径 80 mm、高さ 600 mm の塩化ビニル製の円管で、層上部に平面熱源を、層底に冷却コイルを置き、熱源と冷却コイルとの間に適当な間隔で銅-コンスタンタン熱電対を埋め込んだ温度測定球を挿入する。層内粒子を流動化させ、層内が熱的に平衡に達したのち測定を開始する。層壁に発泡ポリスチレン製の保温材を厚さ 10 cm 取り付けることにより層壁

* <Bed Expansion and the Axial Effective Thermal Conductivity of Screen-Packed Fluidized Bed>
Received on September 1, 1973

化学工学協会第 35 年会(東京, 1971 年 4 月)にて発表

** Kunio Kato (正会員) and Utao Ito (正会員) Dept. of Chem. Eng., Gunma Univ., Gunma, Japan

*** Naotake Takeuchi (正会員) 出光石油化学(株) Idemitsu Petrochem. Co., Ltd.

**** Kentaro Hirata (正会員) 三菱油化(株) Mitsubishi Petrochem. Co., Ltd.