加熱円柱群間隙を軸方向に流れる流体についてのグレッツ・ヌセルト問題†

宮 武 修・岩 下 寛 之*

九州大学 生産科学研究所††

本報では、一様温度の三角形配列加熱円柱群間隙を軸方向に流れる流体への層流熱伝達を取り扱った。差分化したエネルギー方程式を反復を伴う前進・陰解法を用いて解き、温度分布の軸方向の変化を求め、局所グレッツ数 Gz_{100} またはグレッツ数 Gz が 10^3 までの範囲、円柱間隔と直径の比 σ が $1.0 \sim 4.0$ の範囲に対して、局所ヌセルト数 Nu_{100} および対数平均ヌセルト数 Nu_{1m} を図示した。

さらに、 Nu_{100} 、 Nu_{1m} を表す次の近似式を数値解より導出した。

$\sigma = 1.0 \sim 1.1$ の場合：

$$Nu_{100} = 9.26(1 + 0.0022 Gz_{100}^{1.46})^{1/4}, \quad Nu_{1m} = 9.26(1 + 0.0179 Gz^{1.46})^{1/4}$$

$\sigma = 1.1 \sim 4.0$ の場合：

$$Nu_{100} = \{f^2(\sigma) + g^2(\sigma)Gz_{100}^{2/3}\}^{1/2}, \quad Nu_{1m} = \{f^2(\sigma) + (3/2)^2 g^2(\sigma)Gz^{2/3}\}^{1/2}$$

ここで、

$$f(\sigma) = 8.92 \frac{1 + 2.82(\sigma - 1)}{1 + 6.86(\sigma - 1)^{5/3}}, \quad g(\sigma) = 2.34 \frac{1 + 24(\sigma - 1)}{\{1 + 36.5(\sigma - 1)^{5/4}\}(2\sqrt{3}\sigma^2 - \pi)^{1/3}}$$

緒 言

加熱円柱群から軸方向に流動する流体への熱伝達に関する研究は、詳細な総説^{1,7)} に記述されているように、原子炉燃料棒の冷却等に関連して主に乱流熱伝達を対象に行われており、層流熱伝達については軸方向に円柱壁面一様熱流束の場合のみについて、しかも円柱が十分長い領域で適用できる漸近局所ヌセルト数の解析解⁹⁾ および数値解²⁾ が提出されているだけで、軸方向に変化する熱伝達特性についてはまだ解明されていないようである。

軸方向に変化する層流熱伝達特性に関する知見は、高粘性液等を取り扱う多管型熱交換器の設計、類似幾何形状系内での熱伝達の解析、例えば円柱群蓄熱体を用いる蓄熱装置の解析⁴⁾ に対して必要である。そこで本報では、周方向、軸方向共に円柱壁面一様温度の場合について、その熱伝達特性を数値解析した結果を記述する。

1. 基礎方程式

解析系および座標系を Fig. 1 に示した。三角形配列(間隔 $2s$) の加熱円柱(直径 d_o 、半径 r_o 、長さ l) 群からそれらの間隙を軸方向に層流で流れる流体への熱伝達を数値解析するために、半径方向、周方向、軸方向のそれぞれに対応する円柱座標系 (r, θ, z) を用いる。流路断面の対称性から、直角三角柱(底辺 s 、角度 $\pi/6$ 、長さ l) 内が解析する領域の要素となる。

ここで次の仮定を置く。1) 各円柱壁面は、加熱区間 $z \geq 0$ において、周方向、軸方向共に一様温度 t_w に保たれている。2) 流体は一様温度 t_0 で、十分に発達した層流速度分布をもって加熱区間に流入する。3) 流体の物性定数は一定であり、粘性消散は無視できる。4) 流体内の軸方向の熱伝導による熱移動は、対流による熱移動に比べて無視できる。

これらの仮定のもとで、エネルギー方程式および温度境界条件 (Fig. 1 参照) は次式で与えられる。

$$v \frac{\partial t}{\partial z} = \alpha \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} \right) \quad (1)$$

$$z = 0; \quad t = t_0 \quad (2)$$

$$r = r_o; \quad t = t_w \quad (3)$$

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi/6; \quad \partial t / \partial \theta = 0 \quad (4)$$

$$r = \frac{s}{\cos \theta}; \quad \frac{\partial t}{\partial n} = \frac{\partial t}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial t}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{r} = 0 \quad (5)$$

無次元量、

$$\left. \begin{aligned} V &= v/v_m, \quad T = (t - t_0)/(t_w - t_0), \quad R = r/r_o \\ Z &= z\alpha/r_o^2 v_m, \quad \sigma = s/r_o, \quad L = l\alpha/r_o^2 v_m \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を導入し、Eqs. (1)~(5) を無次元化すると、

$$V \frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (7)$$

$$Z = 0; \quad T = 0 \quad (8)$$

$$R = 1; \quad T = 1 \quad (9)$$

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi/6; \quad \partial T / \partial \theta = 0 \quad (10)$$

$$R = \frac{\sigma}{\cos \theta}; \quad \frac{\partial T}{\partial R} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{R} = 0 \quad (11)$$

無次元速度 V に関しては、次式の解析解³⁾ を用いる。

$$V = \frac{\sigma^2}{12F(\sigma)} (2\sqrt{3}\sigma^2 - \pi) \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln R - \frac{R^2 - 1}{4\sigma^2} \right\}$$

† 1986 年 1 月 8 日受理; 化学工学協会第 19 回秋季大会 (名古屋, 1985 年 10 月) にて発表

†† 〒816 春日市春日公園 6-1

* 九州大学大学院 熱エネルギーシステム工学専攻

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j \cos 6j\theta}{6j\sigma^{6j}} \left(R^{6j} - \frac{1}{R^{6j}} \right) \} \quad (12)$$

ここで、 $F(\sigma)$ は円柱間隔比 σ の関数、 A_j は定数群である (Appendix 1 参照)。

2. ヌセルト数に対する関係式

円柱単位長さ当りの伝熱速度の関係から、円柱壁面温度と混合平均温度の差 ($t_w - t_b$) を伝熱推進温度差とした局所熱伝達係数 h_{10c} は次式で表される。

$$h_{10c} \pi d_o (t_w - t_b)_{z=z} = 12 \int_0^{\pi/6} \left\{ -k \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_w \right\} r_o d\theta \quad (13)$$

また、 $z=0 \sim l$ の間における熱収支をとることにより、対数平均熱伝達係数 h_{1m} は次式で表される。

$$h_{1m} \pi d_o l \Delta t_{1m} = w c_p (t_b - t_o)_{z=l} \quad (14)$$

ここで、 w は円柱1本当り (Fig. 1(a) に示した直角三角形 12 個分の領域) の質量流量、 Δt_{1m} は対数平均伝熱推進温度差であり、それぞれ、

$$w = r_o^2 v_m \rho (2\sqrt{3}\sigma^2 - \pi) \quad (15)$$

$$\Delta t_{1m} = \frac{(t_w - t_o) - (t_w - t_b)_{z=l}}{\ln \{(t_w - t_o)/(t_w - t_b)_{z=l}\}} \quad (16)$$

Eqs. (13)~(16) を無次元化すると、局所ヌセルト数 Nu_{10c} 、対数平均ヌセルト数 Nu_{1m} は次式で表される。

$$Nu_{10c} = \frac{h_{10c} d_o}{k} = -\frac{12}{\pi} \int_0^{\pi/6} \left(\frac{\partial T}{\partial R} \right)_w d\theta / (1 - T_b)_{z=z} \quad (17)$$

$$Nu_{1m} = \frac{h_{1m} d_o}{k} = -\frac{2\sqrt{3}\sigma^2 - \pi}{\pi L} \ln(1 - T_b)_{z=L} \quad (18)$$

ここで、 T_b は無次元混合平均温度で、

$$T_b = \frac{t_b - t_o}{t_w - t_o} = \frac{\int_0^{\pi/6} \int_1^{\sigma/\cos\theta} TVRdRd\theta}{\int_0^{\pi/6} \int_1^{\sigma/\cos\theta} VRdRd\theta} \quad (19)$$

さらに、局所グレンツ数 Gz_{10c} 、長さ l の円柱を対象としたグレンツ数 Gz を、

$$Gz_{10c} = w c_p / k z = (2\sqrt{3}\sigma^2 - \pi) / Z \quad (20)$$

$$Gz = w c_p / k l = (2\sqrt{3}\sigma^2 - \pi) / L \quad (21)$$

のように定義すると、 Nu_{10c} は σ と Gz_{10c} の関数、 Nu_{1m} は σ と Gz の関数となる。

3. 漸近ヌセルト数に関する検討

流体が加熱区間に流入した直後の加熱円柱壁と流体の接触時間が短い場合、すなわちグレンツ数が大きい領域では、薄い温度境界層内の速度分布を、壁面での速度勾配を勾配にもつ直線とみなして得られる Leveque の漸近解⁵⁾を拡張することにより、円柱壁面における周方向平均熱流束 $\bar{q}_w$ は次式で与えられる。

$$\bar{q}_w = \frac{k(t_w - t_o)}{\Gamma(4/3)} \cdot \frac{(\partial v / \partial r)_w^{1/3}}{(9\alpha z)^{1/3}} \quad (22)$$

ここで、

Fig. 1 Analytical system and coordinates
(a): Cross-sectional view (b): Side view

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_w^{1/3} = \int_0^{\pi/6} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_w^{1/3} r_o d\theta / \int_0^{\pi/6} r_o d\theta \quad (23)$$

この領域では $t_b \approx t_o$ なので、漸近局所熱伝達係数 $h_{10c,0}$ 、漸近対数平均熱伝達係数 $h_{1m,0}$ と Eq. (22) の $\bar{q}_w$ には次の関係がある。

$$h_{10c,0}(t_w - t_o) = \bar{q}_w \quad (24)$$

$$h_{1m,0}(t_w - t_o) = \frac{1}{l} \int_0^l \bar{q}_w dz \quad (25)$$

Eqs. (22) と (24) を等置した結果および Eq. (22) を Eq. (25) に代入して積分した結果をそれぞれ無次元化すると、この領域の漸近局所ヌセルト数 $Nu_{10c,0}$ 、漸近対数平均ヌセルト数 $Nu_{1m,0}$ は次式で与えられる。

$$Nu_{10c,0} = \frac{2}{\Gamma(4/3)} \cdot \frac{(\partial V / \partial R)_w^{1/3}}{\{9(2\sqrt{3}\sigma^2 - \pi)\}^{1/3}} Gz_{10c}^{1/3} \quad (26)$$

$$Nu_{1m,0} = (3/2)(Nu_{10c,0})_{z=L} \quad (27)$$

ここで、

$$\left(\frac{\partial V}{\partial R} \right)_w^{1/3} = \frac{6}{\pi} \int_0^{\pi/6} \left(\frac{\partial V}{\partial R} \right)_w^{1/3} d\theta \quad (28)$$

一方、流体が加熱区間をかなり通過して加熱円柱壁と流体の接触時間が十分長くなった場合、すなわちグレンツ数が小さい領域では、 h_{10c} は一定値の漸近局所熱伝達係数 $h_{10c,\infty}$ に漸近することが説明づけられる³⁾。

$h_{10c} \approx h_{10c,\infty}$ となる z の領域が、 z の全域を占めるとみなせるほどに十分長くなった場合には、局所的熱収支式、

$$h_{10c} \pi d_o (t_w - t_b) = w c_p (dt_b / dz) \quad (29)$$

において $h_{10c} = h_{10c,\infty}$ とし、 $z=0 \sim z$ 、 $t_b = t_o \sim t_b$ の範囲で積分すると次式が得られる。

$$h_{10c,\infty} = (w c_p / \pi d_o z) \ln \{(t_w - t_o) / (t_w - t_b)_{z=z}\} \quad (30)$$

また、Eq. (14) を書きかえると、

$$h_{1m} = (w c_p / \pi d_o l) \ln \{(t_w - t_o) / (t_w - t_b)_{z=l}\} \quad (31)$$

Eqs. (30), (31) より、この領域の漸近局所ヌセルト数 $Nu_{10c,\infty}$ と漸近対数平均ヌセルト数 $Nu_{1m,\infty}$ は共に一定値となり、次式の関係が成立することがわかる。

Fig. 2 Variation of local Nusselt number with local Graetz number

Fig. 3 Variation of logarithmic mean Nusselt number with Graetz number

Fig. 4 Normalized local Nusselt number for small values of spacing ratio

$$Nu_{1,0c,\infty} = Nu_{1m,\infty} \quad (32)$$

4. 数値解析法

本数値解析では、 Z の各レベルにおいて差分化した基礎方程式の収束解を陰解法による反復計算で求めながら、 Z を少しずつ増加させていく方法、すなわち反復を伴う前進・陰解法を適用した。その詳細は別報⁶⁾に記述したので、ここでは概要について記述する。

差分格子数は、 θ 方向には $\theta=0\sim\pi/6$ の範囲を等間隔で K 個、 R 方向には $R=1\sim 2\sigma/\sqrt{3}$ の範囲を不等間隔で約 $K(1+3.7\cos^{-1}\sqrt{1/\sigma})$ 個、 Z 方向には不等間隔で Z の値が10倍になるごとに50個をとった。格子数 K は $\sigma=1.0\sim 1.1$ で $K=41, 61$ 、 $\sigma=1.2\sim 2.0$ で $K=21, 31$ 、 $\sigma=4.0$ で $K=11, 21$ としたが、これらの K

Fig. 5 Normalized logarithmic mean Nusselt number for small values of spacing ratio

の値を用いると数値解は十分な精度で算出できる (Appendix 2 参照)。

基礎方程式の差分化では、 R, θ 方向には中心差分近似を、 Z 方向には Z の当該レベルと上流側最寄りの2レベル、都合3レベルの値を用いて正確度を向上させた後退差分近似を行った。また、境界における温度勾配の差分化では、2次曲線当てはめによる差分近似を行った。

まず σ の値を与えて各格子点における V を算出した後、 $Z=0$ での境界条件を設定し、グレッツ数が 5×10^6 以上に対応する Z の十分小さいレベルから計算を開始した。 Z の各レベルにおいて、反復前後における R, θ 方向の全格子点での T の値の差の絶対値が 10^{-8} 以下になると反復計算を終え、 Z のより大きいレベルへと前進させた。

5. 数値解析結果

Figs. 2, 3に $Nu_{1,0c}$ と $Gz_{1,0c}$ の関係、 Nu_{1m} と Gz の関係を、それぞれ σ を媒介変数として示した。またFigs. 4, 5には、 $\sigma=1.0\sim 1.2$ の範囲 (Figs. 2, 3上では判別の困難な範囲) について、両ヌセルト数を $\sigma=1.0$ の場合のそれらで規格化した $Nu/Nu_{\sigma=1.0}$ と $Gz_{1,0c}$ 、 Gz の関係を示した。これらの図からわかるように、 σ が小さくなるにつれて、 $Nu_{1,0c}$ 、 Nu_{1m} は増大した後に減少する傾向が現れる。この理由は、 σ が小さくなるにつれて、流路断面積が減少するために壁面における速度勾配が増大するが、 σ がある程度小さくなってくると、 $\theta\approx 0$ の所の壁面における速度勾配が減少するからである (Appendix 1 参照)。

Fig. 6に $Nu_{1,0c,\infty}$ と $\sigma-1$ の関係を実線で示した。円柱壁面の境界条件として、 T が周方向、軸方向共に一様温度の場合の本数値解 (後掲 Table A 参照)、 H_1 が周方向に一様温度、軸方向に一様熱流束、 H_2 が周方向、軸方向共に一様熱流束の場合の $\sigma=1.001\sim 2.0$ に対する解²⁾である。いずれの場合も、 σ が小さくなるにつれて、 $Nu_{1,0c,\infty}$ は増大した後に減少するという同一の傾向

Fig. 6 Variation of asymptotic Nusselt number and mean value of the third root of wall velocity gradient with spacing ratio

T: Uniform wall temperature peripherally and axially (present numerical solutions), H₁: Uniform wall temperature peripherally and uniform wall heat flux axially, H₂: Uniform wall heat flux peripherally and axially

Fig. 7 Comparison of analytically derived asymptotes (26) and (27) with numerical solutions

Fig. 8 Comparison of approximate expressions (37) and (38) with numerical solutions for large values of spacing ratio

をもっており、 σ が大きくなると、各場合の $Nu_{loc,\infty}$ の差が小さくなることわかる。なお、Fig. 6 には、Eq. (28) に示した $(\partial V/\partial R)_w^{1/3}$ も破線で併示した。

6. ヌセルト数の定式化

ヌセルト数の数値解を定式化するために、3. で検討した漸近ヌセルト数に関する知見の援用を考える。

Fig. 7 は、 $\sigma=1.0, 1.2$ の場合について、漸近ヌセルト数 (破線) と数値解析から得たヌセルト数 (実線) の比較を示したものである。 Gz_{loc} , Gz が小さくなると、Eq. (32) の関係が成立している。 Gz_{loc} , Gz が大き

くなると、 Nu_{loc} , Nu_{lm} はそれぞれ Eqs. (26), (27) に漸近する傾向は、 $\sigma=1.2$ の場合に明確に現れているが、 $\sigma=1.0$ の場合には現れていない*。そこで、ヌセルト数の数値解の定式化には、 $\sigma \approx 1.0$ については別途考慮する必要がある。

まず、Fig. 6 に示した本数値解は次式で定式化される。

$$\left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)_w^{1/3} = 2.17 \frac{1+24(\sigma-1)}{1+36.5(\sigma-1)^{5/4}} \quad (33)$$

$$Nu_{loc,\infty} = Nu_{lm,\infty} = 8.92 \frac{1+2.82(\sigma-1)}{1+6.86(\sigma-1)^{5/3}} = f(\sigma) \quad (34)$$

Eq. (33) を Eq. (26) に代入すると ($\Gamma(4/3)=0.8930$),

$$Nu_{loc,0} = \frac{2.34\{1+24(\sigma-1)\}}{\{1+36.5(\sigma-1)^{5/4}\}(2\sqrt{3}\sigma^2-\pi)^{1/3}} Gz_{loc}^{1/3} = g(\sigma) Gz_{loc}^{1/3} \quad (35)$$

* 実際には、 $\sigma=1.0$ の場合においても、図示した範囲よりも大きなグレイズ数の領域で、ヌセルト数の数値解は Eqs. (26), (27) に漸近する傾向をもつ。

Fig. 9 Comparison of approximate expressions (39) and (40) with numerical solutions for small values of spacing ratio

したがって、Eq. (27) の関係から、

$$Nu_{1m,0} = (3/2)g(\sigma)Gz^{1/3} \quad (36)$$

グレッツ数の増大につれて、ヌセルト数が Eq. (34) から Eqs. (35), (36) の関係へと移行していく関数の一つとして次式が考えられる。

$$\frac{Nu_{loc}}{f(\sigma)} = \left[1 + \left\{ \frac{g(\sigma)}{f(\sigma)} \right\}^2 Gz_{loc}^{2/3} \right]^{1/2} \quad (37)$$

$$\frac{Nu_{lm}}{f(\sigma)} = \left[1 + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left\{ \frac{g(\sigma)}{f(\sigma)} \right\}^2 Gz^{2/3} \right]^{1/2} \quad (38)$$

Fig. 8 は実線で示した Eqs. (37), (38) と記号で示した数値解を比較したものである。図示した $\sigma = 1.1 \sim 4.0$ の範囲では、両者は極めてよく一致しており、ヌセルト数の数値解は Eqs. (37), (38) で定式化できる。

前述したように $\sigma \approx 1.0$ では漸近式の適用性は悪くなるので、Eqs. (37), (38) の適用性も悪くなる。 $\sigma = 1.0 \sim 1.1$ の範囲では、 σ がヌセルト数に及ぼす影響は比較的小さいので、ヌセルト数を、

$$Nu_{loc} = 9.26(1 + 0.0022Gz_{loc}^{1.46})^{1/4} \quad (39)$$

$$Nu_{lm} = 9.26(1 + 0.0179Gz^{1.46})^{1/4} \quad (40)$$

で表すと、Fig. 9 に示したように、実線で示したこれらの式と記号で示した数値解はかなりよく一致し、ヌセルト数の数値解は Eqs. (39), (40) で定式化できる。

結 言

種々の円柱間隔比 σ をもつ三角形配列の一樣温度加熱円柱群から軸方向に流動する流体への層流熱伝達に関して、有限差分法による数値解析を行い、局所ヌセルト数 Nu_{loc} と局所グレッツ数 Gz_{loc} の関係および対数平均ヌセルト数 Nu_{lm} とグレッツ数 Gz の関係を求め、さらに、それらの関係を定式化した。

Appendix 1 円柱の壁面における速度勾配

Eq. (12) において、 $F(\sigma)$, A_j は⁸⁾,

$$F(\sigma) = \sigma^4 \left\{ \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{2\sigma}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \right) + \frac{13\sqrt{3}}{216} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j}{6j} \left(\frac{\Omega_j}{6j+2} + \frac{\chi_j}{\sigma^{12j}(6j-2)} \right) \right\} + \frac{\sqrt{3}\sigma^2}{12} - \frac{\pi}{96} \quad (A-1)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j (\cos \theta)^{1-6j} \{ \cos(6j-1)\theta + (\cos \theta/\sigma)^{12j} \times \cos(6j+1)\theta \} + (\sqrt{3}/\pi)(\cos \theta)^2 - 1/2 = 0 \quad (A-2)$$

ここで、

$$\Omega_j = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 6j\theta}{(\cos \theta)^{6j+2}} d\theta \quad (A-3)$$

$$\chi_j = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 6j\theta}{(\cos \theta)^{2-6j}} d\theta \quad (A-4)$$

A_j については、 $j=1 \sim 5$ の範囲に対する値が得られている^{2,9)} が、本数値解析においては、 j のより大きい範囲まで算出した A_j を用いた¹⁾。

Eq. (12) から、円柱壁における無次元速度勾配は、

$$\left(\frac{\partial V}{\partial R} \right)_w = \frac{\sigma^2(2\sqrt{3}\sigma^2 - \pi)}{12F(\sigma)} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{2\sigma^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2A_j \cos 6j\theta}{\sigma^{6j}} \right) \quad (A-5)$$

Fig. A に $(\partial V/\partial R)_w$ と θ の関係を示した。

Appendix 2 格子数の数値解に及ぼす影響

θ 方向の格子数 K (R 方向の格子数は K , σ によって定まる) が数値解に及ぼす影響の代表例を示すために、Table A に K が $Nu_{loc,\infty}$ に及ぼす影響を示した。表中の $K=\infty$ に対する数値解は、 K の 2 個の値に対する数値解の外挿値である。 σ のそれぞれに対し、本数値解析で採用した K によって、 $Nu_{loc,\infty}$ の数値解が十分な精度で求まることがわかる。

Fig. A Peripheral variation of wall velocity gradient

Nomenclature

c_p	= fluid heat capacity at constant pressure	[J/(kg·K)]
d_o	= cylinder diameter	[m]
$F, f, g(\sigma)$	= functions of σ defined by Eqs. (A-1), (34) and (35), respectively	[—]
Gz	= Graetz number defined by Eq. (21)	[—]
Gz_{loc}	= local Graetz number defined by Eq. (20)	[—]
h_{lm}	= logarithmic mean heat transfer coefficient defined by Eq. (14)	[W/(m ² ·K)]
h_{loc}	= local heat transfer coefficient defined by Eq. (13)	[W/(m ² ·K)]
K	= number of nodal points in angular direction	[—]
k	= fluid thermal conductivity	[W/(m·K)]
L	= dimensionless cylinder length defined by Eq. (6)	[—]
l	= cylinder length	[m]
Nu_{lm}	= logarithmic mean Nusselt number defined by Eq. (18)	[—]
Nu_{loc}	= local Nusselt number defined by Eq. (17)	[—]
n	= normal coordinate	[m]
$\bar{q}_w$	= peripherally averaged wall heat flux	[W/m ²]
R	= dimensionless radial coordinate defined by Eq. (6)	[—]
r	= radial coordinate	[m]
r_o	= cylinder radius	[m]
s	= half spacing between cylinders	[m]
T	= dimensionless temperature defined by Eq. (6)	[—]
t	= temperature	[K]
V	= dimensionless axial velocity defined by Eq. (6)	[—]
v	= fluid axial velocity	[m/s]

Table A Effect of the number of nodal points on asymptotic Nusselt number

σ	$Nu_{loc,\infty}$ ($K=41$)	$Nu_{loc,\infty}$ ($K=61$)	$Nu_{loc,\infty}$ ($K=\infty$)
1.0	8.941	8.930	8.92
1.001	8.949	8.939	8.93
1.01	9.036	9.027	9.02
1.02	9.149	9.141	9.13
1.05	9.525	9.520	9.52
1.1	9.976	9.973	9.97
σ	$Nu_{loc,\infty}$ ($K=21$)	$Nu_{loc,\infty}$ ($K=31$)	$Nu_{loc,\infty}$ ($K=\infty$)
1.2	9.908	9.899	9.89
1.5	6.862	6.861	6.86
2.0	4.173	4.173	4.17
4.0	1.958	—	1.96

v_m	= mean axial velocity	[m/s]
w	= fluid mass flow rate per cylinder	[kg/s]
Z	= dimensionless axial coordinate defined by Eq. (6)	[—]
z	= axial coordinate	[m]
α	= fluid thermal diffusivity	[m ² /s]
J_j	= constants evaluated from Eq. (A-2)	[—]
θ	= angular coordinate	[rad]
ρ	= fluid density	[kg/m ³]
σ	= cylinder spacing ratio defined by Eq. (6)	[—]
<Subscripts>		
b	= fluid bulk mean	
w	= cylinder wall	
0	= inlet, asymptote for small z or l	
∞	= asymptote for large z or l	

Literature cited

- 1) Am. Soc. Mech. Eng. (ed.): "Heat Transfer in Rod Bundles", ASME (1968)
- 2) Dwyer, O. E. and H. C. Berry: *Nuc. Sci. Eng.*, **42**, 81 (1970)
- 3) Giedt, W. H.: "Principles of Engineering Heat Transfer", p. 157, D. Van Nostrand Co., Inc. (1957)
- 4) Kamimoto, M., Y. Abe, Y. Takahashi, R. Sakamoto, S. Sawata, K. Kanari, T. Tani and T. Ozawa: *Res. of Electrotech. Lab.*, No. 850, 1 (1984)
- 5) Knudsen, J. G. and D. L. Katz: "Fluid Dynamics and Heat Transfer", p. 363, McGraw-Hill (1958)
- 6) Miyatake, O. and H. Iwashita: *Rep. Res. Inst. of Ind. Sci., Kyushu Univ.*, No. 80, 51 (1986)
- 7) Shah, R. K. and A. L. London: "Laminar Flow Forced Convection in Ducts", Academic Press (1978)
- 8) Sparrow, E. M. and A. L. Loeffler, Jr.: *AIChE J.*, **5**, 325 (1959)
- 9) Sparrow, E. M., A. L. Loeffler, Jr. and H. A. Hubbard: *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, **83**, 415 (1961)

The Graetz-Nusselt Problem for a Fluid Flowing Axially between Heated Cylinders

Osamu Miyatake and Hiroyuki Iwashita*

Res. Inst. of Ind. Sci., Kyushu Univ., Kasuga 816

Key Words: Heat Transfer, Graetz Nusselt Problem, Numerical Analysis, Nusselt Number, Cylinder, Rod Bundle, Triangular Array, Forced Convection, Axial Laminar Flow

This paper deals with the laminar-flow heat transfer to a fluid flowing axially between a triangular arrangement of heated cylinders with a uniform wall temperature.

The finite-difference form of the energy equation is solved to obtain the axial variation of temperature distribution by means of a forward-marching, implicit method with iteration, and typical results for the local Nusselt number Nu_{loc} and the logarithmic mean Nusselt number Nu_{lm} are presented graphically for the local Graetz number Gz_{loc} or the Graetz number Gz up to 10^3 and spacing-to-diameter ratios σ of 1.0 to 4.0.

From the numerical solutions, approximate expressions of Nu_{loc} and Nu_{lm} are derived as

$$Nu_{loc} = 9.26(1 + 0.0022 Gz_{loc}^{1.46})^{1/4}, \quad Nu_{lm} = 9.26(1 + 0.0179 Gz^{1.46})^{1/4} \text{ for } 1.0 \leq \sigma < 1.1$$

$$Nu_{loc} = \{f^2(\sigma) + g^2(\sigma) Gz_{loc}^{2/3}\}^{1/2}, \quad Nu_{lm} = \{f^2(\sigma) + (3/2)^2 g^2(\sigma) Gz^{2/3}\}^{1/2} \text{ for } 1.1 \leq \sigma \leq 4.0$$

where

$$f(\sigma) = 8.92 \frac{1 + 2.82(\sigma - 1)}{1 + 6.86(\sigma - 1)^{5/3}}, \quad g(\sigma) = 2.34 \frac{1 + 24(\sigma - 1)}{\{1 + 36.5(\sigma - 1)^{5/4}\}(2\sqrt{3}\sigma^2 - \pi)^{1/3}}$$

* Thermal Energy System, Graduate School, Kyushu Univ.