水平ダクト内層流共存対流場での縦渦列†

福井 啓 介

姫路工業大学 産業機械工学科††

下板が加熱され上板が冷却されている水平平行平板を有するアスペクト比20のダクト内の層流共存対流場で発生する縦渦列に関し、実験および数値解析により考察した。Gr数を増加させると縦渦の発生個数は2個ずつ段階的に増加するが、渦の幅の分布状態はGr数に依存している。渦の発生個数は、段階的に増加するが、個々の渦に対する無次元循環流量Qと無次元渦幅Wとの比は、次式のごとくGr数の連続関数で与えられる。

$$Q/W = 5.5 (Gr/Gr_c - 1)^{0.58}$$

ただし、 Gr_c は臨界Gr数である。

緒 言

水平平行平板間で下板が加熱され上板が冷却されている時、その温度差すなわちRa数が大きくなるとベナード対流が生じることは古くから知られており、理論的および実験的に数多くの研究がなされてきた^{1,4)}。ベナード対流に起因した熱対流は、太陽エネルギー集熱器の設計や臨海地域の海陸風のメカニズムの解明などで重要な研究課題である。渦の大きさ(または波数)とRa数との関係については、ベナード対流に関して、Busse¹⁾が詳細な研究を行っている。また、ある特定の方向に主流が重畳したとき、その方向に軸を有する縦渦列が発生することは、よく知られている^{5,6,7)}。著者ら²⁾は、Ra数が臨界値に比してかなり大きくなると、運動方程式の非線形項の影響が無視できなくなり、線形近似理論が適用できなくなることを速度分布の実測値と数値計算結果により明らかにした。しかし、主流が存在する場での縦渦列の渦の幅に関しては、まだ不明な点が多い。本研究では、アスペクト比20の水平ダクト内に発生する縦渦列について、その発生個数、渦の大きさ、渦内の循環流量等について、実測結果と数値計算結果に基づき考察する。

1. 数値計算方法

2次元的に完全発達した流れ場および温度場に対する無次元基礎方程式は、以下の連続の式、運動の式およびエネルギー収支式で与えられる。代表量として、長さH、速度 ν/H 、温度 $(T_H - T_C)$ を用いて、各変数は無次元化されている。

$$v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla^2 v - Gr \cdot T$$

$$v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla^2 w$$

$$v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T$$

ただし、 $Gr = g\beta H^3(T_H - T_C)/\nu^2$

$$Pr = \nu/\alpha$$

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$$

境界条件は、

$$v=w=0 \quad (y=0, y=1, 0 \leq z \leq 20)$$

$$(z=0, z=20, 0 < y < 1)$$

$$T=1 \quad (y=0, 0 \leq z \leq 20)$$

$$T=0 \quad (y=1, 0 \leq z \leq 20)$$

$$T=1-y \quad (z=0, z=20, 0 < y < 1)$$

また初期条件は、 $v=w=T=0$ とした。流れ関数 ψ ($v = -\partial\psi/\partial z, w = \partial\psi/\partial y$)、渦度 ω ($\omega = \partial\psi/\partial y - \partial\psi/\partial z$)を導入し、Gosmanら³⁾の方法に基づき、格子点近傍の積分より方程式を離散化した。格子点の数は、y方向に21、z方向に401とした。解の収束性を考慮し、対流項には風上法を採用し、反復計算に際し不足緩和を行った。収束判定は、各量につき反復計算の誤差が0.1%以下とした。なお使用流体が空気であるため $Pr=0.7$ 一定とした。臨界グラスホッフ数 Gr_c は2440である。

2. 実験方法

Fig. 1に実験装置の概略を示す。実験装置本体は、長さ2m、断面 $0.25\text{m} \times 0.0125\text{m}$ 、アスペクト比20の矩形断面を有する黄銅製ダクトで水平に設置されている。側壁

† 1988年8月16日受理

†† 〒671-22 姫路市書写2167

Fig. 1 Experimental apparatus

- 1. Test section 2. Mixing box 3. Camera
- 4. Flow meter 5. Pump 6. Blower
- 7. Tank

には厚さ 5 mm の銅板を用い温度分布が線形になるようにした。使用流体は、空気である。上部ジャケットには一定温度 T_c の冷水を、下部ジャケットには一定温度 T_H に加熱された温水を流し、上下伝熱面の温度を一定かつ一様になるようにした。また、蚊取り線香の煙を本体入口部に注入し、本体下流約 1.8 m の側壁に設けたスリットより白色光を照射し流れを可視化し、210 mm の望遠レンズを用いたカメラで撮影して縦渦の発生個数並びにその大きさを測定した。なお Re 数は、最も渦が安定する $Re=64$ 一定とした。

3. 結果および考察

計算結果の一例として、 $Gr/Gr_c=3$ に対する流れ関数の等値線図を Fig. 2 に示す。側壁 ($z=0$) からダクト中央 ($z=10$) の間に 12 個の縦渦が発生しているが、各々の渦の幅は均一でない。側壁近傍を除けば $z \leq 6$ ではほぼ正方形の断面をしているが、ダクト中央付近の縦渦は縦長である。縦渦の発生個数および断面の形状に対する Gr の影響を以下に考察する。

縦渦の発生個数と Gr 数の関係を Fig. 3 に示す。○印の大小は実測された頻度を表し、実線は計算結果を示している。計算結果に関して、発生個数が段階的に増加している破線で示した部分は、計算されていない。しかし、発生個数 N は $Gr/Gr_c=1.7, 2.9$ および 4.8 付近で 2 個ずつ増加していることがわかる。数値計算結果では、ダクト中心に対し左右対称になるため発生個数は常に偶数である。実験結果によれば、奇数個発生する場合が多く見られ、左右対称の実験の精度や初期条件に起因しているものと考えられる。しかし、 $Gr/Gr_c=1.7$ および 2.9 付近で段階的に個数が増加していることは計算結果と一致している。渦の発生個数の測定は、 $Re=64$ 一定下で Gr 数

Fig. 2 Predicted streamlines at $Gr/Gr_c=3$

Fig. 3 Number of vortices generated in a duct
○; experiment, —; prediction

を変化させた場合と純自然対流状態 ($Re=0$) で所定の Gr 数に設定した後強制対流 ($Re=64$) を重畳した場合について行った。前者の場合、 Gr 数の増加に伴う発生個数は、発生個数が偶数または奇数にかかわらず 2 個ずつ段階的に増加する確率が高いが 1 個ずつ増加する場合もある。 Gr 数を増加させた場合と減少させた場合の発生個数の Gr 数依存性、すなわち発生個数の Gr 数に対する履歴現象が見られたが定量的な結果は得られなかった。後者の方法では、当然 Gr 数に対する履歴がなく測定結果の相互の関連性は無かった。一方、 Gr/Gr_c が 5 以上では、発生個数が減少している。 Gr/Gr_c が 5 以上では発生した縦渦はかなり不安定であり、乱流への遷移過程であると考え。

Fig. 4 には、発生した縦渦の水平方向の幅の z 方向の分布を示す。渦の位置は渦の中心の位置とした。測定精度には少し問題があるが、その分布状態は計算結果 (黒印) と一致している。 $Gr/Gr_c=2$ では、ほぼ一定の幅の渦が発生しているが、 $Gr/Gr_c=3$ ではダクト中心付近で渦幅が局所的に小さくなっていることが実測結果および計算結果とも示している。計算結果に基づき渦の発生個数と渦幅の分布に対する Gr 数の影響を Fig. 5 に示した。渦の発生個数 N が同じでも Gr 数が増加すると渦の幅の分布が変化していることがわかる。すなわち、 Gr 数が増加するとダクトの中央付近の渦の幅が徐々に増加し、それにもなつてダクト中央付近を除く左右の領域で渦の幅がほぼ一様に減少している。次に渦の発生個数がステップ的に増加するとダクト中心付近の渦の幅が急減し、さらに、

Fig. 4 Distribution of vortex width; open symbol: experiment, solid symbol: prediction

Gr数が増加するとダクト中央付近の渦の幅が増加している。これを繰り返しながら渦の発生個数がステップ的に増加していることがわかる。

数値計算において、壁面での流れ関数を0と与えているので、各々の縦渦中心での流れ関数の絶対値は、各渦内での循環流量 Q を示している。各渦に対して Q 対渦幅 W の関係を Gr/Gr_c をパラメーターにして点綴した結果をFig. 6に示す。各Gr数に対する結果は、原点を通る直線ではば近似できることが明かである、Fig. 6の直線の勾配は、個々の渦に対する循環流量を渦の幅 W で割った量 Q/W を表している。個々の渦に対する Q/W と Gr/Gr_c との関係をFig. 7に示す。図中の直線は、次式で与えられる。

$$Q/W = 5.5 (Gr/Gr_c - 1)^{0.58}$$

一方、個々の渦中心を通り上下板に平行な平面上での鉛直方向の平均流速($=2Q/W$)とダクト高さ H に基づくレイノルズ数 $Re_v (=2Q*H/(W*\nu))$ を定義すると、

$$Re_v = 2Q/W \\ = 11 (Gr/Gr_c - 1)^{0.58}$$

となる。

以上の結果より、渦の発生個数は、先に示したように

Fig. 5 Dependency of vortex width distribution on Grashof number (prediction)

Fig. 6 Relation between flow rate in each vortex and vortex width (prediction)

Gr数が増すと2個づつ段階的に増加して行くが、個々の渦に対する Q/W または Re_v は、上式のごとく連続的に増加することになる。渦の発生個数はダクトのアスペクト比に依存しているが、左右対称な流れであることより発生個数は偶数でありGr数とともに段階的に増加することが安定な縦渦列を形成するための1つの条件であるが、個々の渦に対する循環流量と渦幅の無次元比 Q/W は、与えられた浮力の程度(Gr数)でもって決定されることになる。

Fig. 7 Relation between ratio of flow rate and width and Grashof number (prediction)

結 言

水平平行平板を有するアスペクト比20のダクト内に発生する縦渦列に関し、実験および数値計算結果に基づき以下の結果を得た。

1) 縦渦の発生個数は $Gr/Gr_c = 1.7, 2.9$ および 4.8 付近で2個ずつ段階的に増加する。しかし、ダクト内で発生する縦渦の幅は、一様でない。 Gr 数を増加させても発生個数が増加しない過程では、 Gr 数が増加するとダクト中央付近の渦の幅が徐々に増加し、それにともなってダクト中央付近を除く左右の領域で渦の幅がほぼ一様に減少する。渦の発生個数がステップ的に増加するとダクト中心付近の渦の幅が急減する。これを繰り返しながら渦の発生個数は増加する。

2) 個々の渦に対する無次元循環流量と無次元渦幅との比は、次式で与えられる。

$$Q/W = 5.5 (Gr/Gr_c - 1)^{0.58}$$

従って、渦の発生個数は、 Gr 数が増すと2個ずつ段階的に増加して行くが、個々の渦に対する Q/W は、上式のごとく Gr/Gr_c の関数として連続的に増加する。

Nomenclature

Gr = Grashof number	[-]
Gr_c = critical Grashof number	[-]

g = gravitational acceleration	$[m \cdot s^{-2}]$
H = height of duct	$[m]$
N = number of vortex	[-]
p = static pressure	[-]
Pr = Prandtl number	[-]
Q = Q^*/ν	[-]
Q^* = circulating flow rate	$[m^2 \cdot s^{-1}]$
Ra = $Gr \cdot Pr$	[-]
Re = Reynolds number	[-]
$Re_v = 2Q^*H/(W^*\nu)$, Reynolds number based on circulating flow rate for each vortex	[-]
T = dimensionless temperature	[-]
T_c = temperature at the cooled wall	$[K]$
T_h = temperature at the heated wall	$[K]$
v = velocity component in the y-direction	[-]
W = W^*/H	[-]
W^* = width of vortex	$[m]$
w = velocity component in the z-direction	[-]
y = distance from the heated wall	[-]
z = distance from the side wall	[-]
α = thermal diffusivity	$[m^2 \cdot s^{-1}]$
β = thermal expansion coefficient	$[K^{-1}]$
ν = kinematic viscosity	$[m^2 \cdot s^{-1}]$

Literature cited

- 1) Busse, F.H.: "Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence", Springer-Verlag, Berlin (1981)
- 2) Fukui, K., M.Nakajima and H.Ueda: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **26**, 109 (1983)
- 3) Gosman, W.M.Pun, A.K.Rumchal, D.B.Spalding and M.Wolfshtein: "Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows", Academic Press, New York (1969)
- 4) Inoue, Y. and R.Ito: *Kagaku Kogaku Ronbunshu*, **9**, 116 (1983)
- 5) Mori, Y. and Y.Uchida: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **9**, 803 (1966)
- 6) Stuart, J.T.: *J. Fluid Mech.*, **4**, 1 (1956)
- 7) idem.: *J. Aero. Sci.*, **23**, 86 (1956)

Longitudinal Vortices in Mixed Convection in a Horizontal Duct

Keisuke Fukui

Dept. of Chem. Eng., Himeji Institute of Technology, Himeji 671-22

Key Words: Fluid Mechanics, Natural Convection, Mixed Convection, Bénard Convection, Vortex, Heat Transfer

The longitudinal vortices generated in mixed free and forced laminar convection in a duct with aspect ratio 20, consisting of horizontal parallel plates heated from below, were studied experimentally and by numerical prediction.

Increasing the Grashof number caused a stepwise increase in the number of vortices generated in the duct. However, the width distribution of each vortex was dependent on the Grashof number. Although the vortex number increased in steps with increasing Grashof number, the ratio of dimensionless circulating flow rate and width of each vortex increased according to the following continuous equation:

$$Q/W = 5.5 (Gr/Gr_c - 1)^{0.58}$$

where Gr_c is the critical Grashof number.