2次元数値解析に基づく層流域の攪拌所要動力相関式の誘導[†]

亀井 登*・平岡節郎・加藤禎人・多田 豊
桑原正治郎・李 泳世**・山口隆生***・高 承台****

名古屋工業大学工学部 応用化学科^{††}

攪拌槽内での層流域におけるパドル翼の2次元数値流動解析結果に基づいて、基礎式と境界条件から理論的に導出されるパラメータを用いる層流域の攪拌所要動力の相関式を求めた。さらに、3次元場の幾何変数を考慮してこの結果を修正し、パドル翼、アンカー翼、ヘリカルリボン翼に適用可能な層流域の動力相関式を提出した。また、本相関式を用いて非ニュートン流体の攪拌に対するMetzner-Otto定数 k_0 の簡便な推算式を提示した。推算式で求めたMetzner-Otto定数は実験値とよい一致を示した。

緒 言

化学工業において高粘度流体の攪拌操作は、多種多様な高分子樹脂製品の開発等に伴って、近年特に重要性を増してきており、その研究も活発に行われている。高粘度攪拌は、一般には攪拌レイノルズ数が10以下の層流域で運転される場合を想定しており、攪拌槽内のフローパターンや攪拌所要動力が非常に重要となる。これらの研究は、古くは実験的な観察や測定によって行われていたが^{21,29)}、近年コンピュータの発達に伴い、数値解析による研究が盛んに行われるようになってきた^{9,10,12,14)}。

工業的に取り扱われる高粘度流体の多くは非ニュートン性を示すものであるが、応力-ひずみ関係が正しく評価されればニュートン流体とほぼ同様の取扱いをすることが可能となる。この意味からも、ニュートン流体に対する研究が数多く行われてきた。しかしながら、層流攪拌の場合の攪拌翼は、一般的に大型で、かつ形状が複雑であり、スケールアップ等で特に重要な攪拌所要動力においても、その推算は容易ではない。従来から幾つかの動力相関式が報告されてはいるものの、各種形状の攪拌翼に対し十分な推算結果を与える迄には至っていない。

永田ら^{18,21)}によって、数多くの実験データから、パドル、ヘリカルリボン翼等に対する層流域での攪拌所要動力の次元解析に基づく相関式が提出されて以来、理論的あるいは数値解析から幾つかの動力相関式が報告されて

いる。公表されている実験値を比較的良好に相関していると思われる相関式を発表年順にTable 1に示した。ここで、Chavan-Ulbrecht⁶⁾はドラフト付ヘリカルスクリーンの二重円筒モデルに基づく解析から、高橋ら²⁶⁾はアンカー翼およびヘリカルリボン翼に働く抗力の理論的考察から、平岡¹¹⁾はパドル翼の輸送現象論に基づくモデル解析と永田ら¹⁸⁾の実験データの比較から、それぞれ相関式を得ているが、いずれも大型翼、即ち翼先端と槽壁間のクリアランスが小さい場合、誤差が大きくなる欠点があった。一方、広瀬-村上¹³⁾の相関式は、攪拌翼と槽壁の間隔の狭い大型翼にその適用が限定される。

本研究では、従来の相関式の欠点を考慮し、大型の翼から小型の翼にわたって有効な相関式を導出して、実装置設計に有用な方法を提出することを目的とする。さらに、得られた相関式を、パドル、アンカー、ヘリカルリボン各翼に適用する場合の形状補正方法を提案する。そして最後に、本相関式の非ニュートン流体攪拌への適用についても検討する。

1. 支配方程式と数値解析

攪拌槽を、Fig. 1(a)に示すように、 r, θ 座標で2次元的に見る。このとき、翼に固定された動座標系の支配方程式および境界条件は、Table 2に示すようになる。

2次元の数値流動解析は、前報⁹⁾と同様に支配方程式を有限差分法を用いて実行した。本研究では翼先端と槽壁のクリアランスを小さくした場合の影響を考察することを目的としているため、クリアランスが小さい場合には翼先端部を細かく差分化するマルチグリッド法を用いた。数値解析のアルゴリズムは前報⁹⁾と同様なので、詳細な説明はここでは省略する。

[†] 1993年12月6日受理；化学工学会富山大会（富山，1993年7月）にて発表

^{††} 〒466 名古屋市昭和区御器所町

* ダイセル化学工業(株)

** 韓国啓明大学校 化学工学科

*** 中部大学工学部 機械工学科

**** 東洋エンジニアリング(株)

Table 1 Typical power input correlation in laminar region

Correlations	Investigators
$N_p \cdot Re_d = 14 + (b/D) \{670 (d/D - 0.6)^2 + 185\}$	Nagata et. al. ¹⁸⁾ (1957)
$N_p \cdot Re_d = 2.5 n_p A \pi \left(\frac{d_e}{d}\right) \left(\frac{D}{d_e}\right)^2 \frac{4\pi}{(D/d_e)^2 - 1}$ $\frac{d_e}{d} = \frac{D}{d} - 2 \left(\frac{w}{d}\right) / \ln \left\{ \frac{(D/d) - 1 + 2(w/d)}{(D/d) - 1} \right\}$ $A = \frac{(h/d)(s/d)}{3\pi} \left[\left(\frac{\pi d}{s \sin \alpha}\right) + \ln \left\{ \left(\frac{\pi d}{s}\right) + \frac{1}{\sin \alpha} \right\} \right]$ $\times [1 - \{1 - 2(w/d)\}^2]$	Chavan - Ulbrecht ⁶⁾ (*) (1973)
$N_p \cdot Re_d = \frac{16\pi^3}{2 \ln(4 + 8c/w) - 1} \cdot \frac{h}{d \sin \alpha} \left\{ 1 + 0.00539 \left(\frac{c}{D}\right)^{-0.876} \right\}$ $\times (\sin \alpha)^{0.555} \left(\frac{n_p}{2}\right)$	Takahashi et. al. ²⁶⁾ (*) (1982)
$N_p \cdot Re_d = 150 \left(\frac{h}{d}\right) \left\{ \frac{n_p}{(s/d)(c/w)^{0.67}} \right\}^{0.5}$	Shamlou - Edwards ²⁴⁾ (1985)
$N_p \cdot Re_d = \frac{2.8\pi^3}{\pi^2 - 4} \cdot \frac{1 + \sin^2 \alpha}{d \sin \alpha / (h n_p)} \ln \frac{\pi d \sin \alpha}{n_p c}$	Hirose - Murakami ¹³⁾ (*) (1986)
$N_p \cdot Re_d = \left\{ 13 + \frac{34}{\eta} \left(\frac{2b}{D}\right) \frac{(D/d)}{1 - (d/D)^2} \right\} \left(\frac{n_p}{2}\right)^{1/3}$ $\eta = 1 + \exp[-10\{(D/d) - 1\}]$	Hiraoka ¹¹⁾ (1988)

(*) note that $\sin \alpha$ is defined by Eq. (21)

Table 2 Governing equations and boundary conditions

I. Governing equations

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(r, \theta)} = \nu \nabla^2 \omega \quad (\text{T-1})$$

$$\nabla^2 \psi = \omega \quad (\text{T-2})$$

$$v_\theta = \partial \psi / \partial r, v_r = -\partial \psi / r \partial \theta \quad (\text{T-3})$$

II. Boundary conditions

$$(i) \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{T-4})$$

at surface of impeller and shaft

$$(ii) \psi = \text{const.}, \frac{\partial \psi}{\partial r} = v_0 \left(\frac{D}{d}\right), \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{T-5})$$

at vessel wall

$$(iii) \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi n_p} \omega d\theta + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi n_p} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) \omega d\theta = 0 \quad (\text{T-6})$$

between impeller tip and vessel wall

Fig. 1 Coordinate systems, (a) $r - \theta$ coordinates, (b) $\xi' - \theta'$ coordinates

2. 支配方程式の座標変換と無次元化

動座標系に変換された支配方程式を、Fig. 1 (b)に示す座標系に変換し、さらに翼先端速度 v_0 、翼先端半径 r_0 を代表量として無次元化すると Table 2の支配方程式は次式となる。(Appendix I参照)

$$\left(\frac{2\pi r_0 v_0}{n_p \nu}\right) \left\{ \frac{\partial(\psi^*, f^*)}{\partial(\xi', \theta')} + 2\left(\frac{2\pi}{n_p}\right) f^* \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta'} \right\} \\ = \nabla^{*2} f^* - 4\left(\frac{2\pi}{n_p}\right) \frac{\partial f^*}{\partial \xi'} + 4\left(\frac{2\pi}{n_p}\right)^2 f^* \quad (1)$$

$$\nabla^{*2} \psi^* = f^* \quad (2)$$

ここで

$$\nabla^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta'^2}$$

$$f^* = \frac{r^2 \omega}{(n_p v_0 r_0 / 2\pi)}, \quad \psi^* = \frac{\psi}{(2\pi r_0 v_0 / n_p)} \quad (3)$$

$$\xi' = \left(\frac{n_p}{2\pi}\right) \ln \frac{r}{r_0}, \quad \theta' = \frac{n_p \theta}{2\pi}, \quad r^* = \frac{r}{r_0}$$

$$v^* = \frac{v}{v_0}$$

また,

$$r^* v_{\theta'}^* = \partial \psi^* / \partial \xi', \quad r^* v_r^* = -\partial \psi^* / \partial \theta' \quad (4)$$

となる。

Fig. 1(b)に示すように、ここで用いた ξ' , θ' 座標系では、 θ' 方向の翼間隔は1であり、翼先端と槽壁のクリアランスは $\ln(D/d)/(2\pi/n_p)$ となる。

ここで、高粘度流体の攪拌を考えると、 Re 数は小さくなり支配方程式Eq.(1)の左辺は無視できる。すなわち

$$\nabla^{*2} f^* - 4\left(\frac{2\pi}{n_p}\right) \frac{\partial f^*}{\partial \xi'} + 4\left(\frac{2\pi}{n_p}\right)^2 f^* = 0 \quad (5)$$

これより、高粘度域における攪拌槽内の2次元流れ場はFig. 1(b)に示すように、パドル翼の翼板間隔を θ' 方向に1とした場合、幾何形状を表わす無次元クリアランス $\ln(D/d)/(2\pi/n_p)$ とEq.(5)に含まれる変数 $(2\pi/n_p)$ の2つのパラメータに支配されることになる。

3. 攪拌所要動力の相関変数の誘導

攪拌所要動力 P は、槽高さを翼高さ b と等しくおくと、槽壁面での平均剪断応力 $\overline{\tau_w}$ との間に次式のように関係づけられる。

$$P = 2\pi N \cdot (D/2) \cdot \pi D b \cdot \overline{\tau_w} \quad (6)$$

ここで、 $\overline{\tau_w}$ は槽壁面での平均渦度 $\overline{\omega_w}$ と次式の間を持つ。

$$\overline{\tau_w} = \mu \overline{\omega_w} \quad (7)$$

従って、Eq.(3)の変数 f^* の槽壁面での平均値 $\overline{f_w^*}$ は、 $\overline{\tau_w}$ と次のように関係づけられる。

$$\overline{f_w^*} = \int_0^1 f_w^* d\theta' = \frac{(D/2)^2 \overline{\omega_w}}{(n_p v_0 r_0 / 2\pi)} \\ = \frac{(D/2)^2 (\overline{\tau_w} / \mu)}{(n_p v_0 r_0 / 2\pi)} \quad (8)$$

いま、代表速度 v_0 を翼先端速度 $\pi N d$ 、代表半径 r_0 を翼半径 $d/2$ として上式を整理すると次式となる。

$$\overline{f_w^*} = \overline{\tau_w} (D/d)^2 / \mu N n_p \quad (9)$$

Eq.(9)をEq.(6)に代入し、動力数 N_p と攪拌レイノルズ数 Re_d を用いて無次元化すると、次式を得る。

$$N_p \cdot Re_d = \frac{P}{\mu N^2 d^3} = \pi^2 n_p \left(\frac{b}{d}\right) \overline{f_w^*} \quad (10)$$

一方、Fig. 1(b)に示す流れ場での変数 f^* の槽壁面上での平均値 $\overline{f_w^*}$ は、前章での考察より、次式のような関数表現が成立する。

$$\overline{f_w^*} = f_n \left\{ \frac{\ln(D/d)}{(2\pi/n_p)}, \frac{2\pi}{n_p} \right\} \quad (11)$$

従って、Eq.(10)とEq.(11)を関係づけ、槽径 D を導入し、さらに定数 2π を省略すると、攪拌所要動力は次の関数関係となることが示される。

$$\frac{1}{n_p} \left(\frac{d}{D}\right) N_p \cdot Re_d = \left(\frac{b}{D}\right) f_n \left\{ n_p \ln \left(\frac{D}{d}\right), n_p \right\} \quad (12)$$

4. 数値解析結果と考察

4.1 数値解析結果によるパラメータ相関

数値解析は、Eq.(T-1)を $(\ln r, \theta)$ 座標系に変換したのち有限差分化し、前報⁹⁾と同様にSOR法を用いて実行した。メッシュ数は翼先端と槽壁間が10メッシュ以上になるようマルチグリッド法を採用した。計算範囲は、 $0.5 \leq d/D \leq 0.95$ の翼径-槽径比、羽根枚数 $n_p = 1 \sim 8$ 、また、レイノルズ数は $N_p \cdot Re_d$ 値に影響を与えない $ND^2/\nu \leq 0.1$ の範囲で行った。

得られた $N_p \cdot Re_d$ 値をEq.(12)に従って $n_p \ln(D/d)$ に対してプロットしたものをFig. 2に示す。ここで、縦軸は、もう1つのパラメータ n_p を用いて1本の相関線が得られるよう、 $n_p^{0.15}$ 倍だけ修正してある。図中の実線は、最小二乗法で求めた次の相関式を表わしている。

$$\left\{ \frac{1}{n_p} \left(\frac{d}{D}\right) N_p \cdot Re_d \right\} n_p^{0.15} \\ = \frac{68.4}{0.157 + \{n_p \ln(D/d)\}^{0.611}} \quad (13)$$

2次元モデルによる所要動力の数値解析結果は、前節で得られた2つのパラメータを用いて、翼先端と槽壁間のクリアランスが大きな場合から非常に小さな場合まで、幅広い領域にわたって良好に相関出来たことになる。

次に種々の攪拌翼における実験データに対して、本相関式の有効性について検討する。

4.2 パドル翼への適用

前項の相関式は2次元モデルによる計算結果に基づくものであり、これを3次元に拡張する。この場合、3次元場では翼高さ b の影響も考慮する必要があり、Eq.(12)に従って、Eq.(13)を次のように書き換える。

Fig. 2 Power correlation for paddle impeller in laminar region derived from a numerical analysis of 2-D flow

$$\frac{1}{n_p} \left(\frac{d}{D} \right) N_p \cdot Re_d = \left(\frac{b}{D} \right) \frac{68.4 n_p^{-0.15}}{0.157 + \{n_p \ln(D/d)\}^{0.611}} \quad (14)$$

次に、高粘度液に対して得られたパドル翼の実験データ^{18,25)}と、Eq. (14) で得られた2次元モデルによる計算値との差異を、相対誤差の形で羽根枚数に対して評価を試みた。その結果をFig. 3に示す。ここで、この差異は羽根枚数の増加と共に増加することを示している。そこで、この差異を羽根枚数に対して線形近似すると次式を得る。

$$\frac{N_p \cdot Re_d(\text{obs}) - N_p \cdot Re_d(\text{Eq. (14)})}{N_p \cdot Re_d(\text{Eq. (14)})} = 0.11 + 8 \left(\frac{n_p}{N_p \cdot Re_d(\text{Eq. (14)})} \right) \quad (15)$$

上式の $N_p \cdot Re_d(\text{Eq. (14)})$ に Eq. (14) の関数形を代入して整理すると Eq. (15) は次式に変形される。

$$N_p \cdot Re_d = 8n_p + \frac{75.9n_p^{0.85} (b/d)}{0.157 + \{n_p \ln(D/d)\}^{0.611}} \quad (16)$$

ここで、 $8n_p$ は2枚翼のとき16となり、Table 1の永田の実験式の定数14とよい一致を示す。

Fig. 4に、本相関式を用いて得られる $N_p \cdot Re_d(\text{cal})$ と実測値^{18,25)}との比較を示した。本相関式は誤差8.0%で良好に相関されることを示している。

4.3 アンカー翼への適用

アンカー翼形状とその形状変数については、Fig. 5(b)に示した通りで、翼高さ h 、翼幅 w 、腕の部分の幅 b' が幾何変数として新たに導入される。パドル翼に対する相関式 Eq. (16) は、元々壁面での剪断応力と所要動力との

Fig. 3 Difference between observed power consumption and calculated one from 2-D flow analysis

Fig. 4 Comparison of observed power consumption for paddle impeller with calculated one by Eq. (16)

関係からパラメータを導出しているの、アンカー翼へ適用する場合、Eq. (16)の b に翼高さ h を用いることとなり、単純に翼高さ h のパドル翼と見做すと次式が得られる。

$$N_p \cdot Re_d = 8n_p + \frac{75.9n_p^{0.85} (h/d)}{0.157 + \{n_p \ln(D/d)\}^{0.611}} \quad (17)$$

Fig. 6(a)に、Eq. (17)による計算値と実測値^{21,22,23,27)}の比較を示した。この図より、計算値の方がかなり高い値をとることが判る。これは、この式が翼高さ h の大型パドル翼の値を示しているためで、パドル翼の翼板の欠

Fig. 5 Symbols used to represent impeller dimensions

損部に関するアンカーの翼幅 w 、腕の部分の幅 b' を考慮に入れた補正が必要である。まず Eq. (17) の第 2 項への補正係数 z_1 を考慮する。

$$z_1 = \frac{N_p \cdot Re_d (\text{obs}) - 8n_p}{N_p \cdot Re_d (\text{cal}) - 8n_p} \quad (18)$$

ここで、アンカー翼を翼高さ b' のパドル翼部分と翼幅 w のゲート翼部分に分解して考察し、重回帰分析を行った結果、 z_1 に対して次式が得られた。

$$z_1 = \left(\frac{b'}{h}\right) + 0.684 \left\{ n_p \ln \left(\frac{d}{d-2w} \right) \right\}^{0.139} \quad (19)$$

ここで、第 1 項がパドル翼部分、第 2 項がゲート翼部分に対する係数となる。なお、第 2 項の w に対する無次元数は Fig. 1(b) 上での無次元翼幅として求められる変数である。これより、アンカー翼に対する最終の相関式として次式を得る。

$$N_p \cdot Re_d = 8n_p + \frac{75.9 z_1 n_p^{0.85} (h/d)}{0.157 + \{n_p \ln (D/d)\}^{0.611}} \quad (20)$$

上式と多くの研究者の実測値との比較を Fig. 6(b) に示したが、実験値との一致は良好である。

4.4 ヘリカルリボン翼への適用

ヘリカルリボン翼の形状とその形状変数については、Fig. 5(c) に示した通りで、翼が 1 周したときの高さ、すなわち、ピッチ s が新しくパラメータとして導入される。リボン翼を槽壁に投影して槽壁を円周方向に展開した図

Fig. 6 Comparison of observed power consumption for anchor impeller with calculated one (a) by Eq. (17) and (b) by Eq. (20) with Eq. (19)

から、槽壁面での翼板と水平面とのなす角度 α とピッチ s との関係は次式で求められる。

$$\sin \alpha = \{1 + (\pi d/s)^2\}^{-0.5} \quad (21)$$

元来、ヘリカルリボン翼の場合の流れは 3 次元的であり、本解析の適用範囲を越えるものであるが、Fig. 7 に示すように槽壁面上から見た翼の動きを 2 次元的に観察してみると、翼板は斜め下方に $v_0 \sin \alpha$ で動いており、翼板間隔は $2\pi/(n_p/\sin \alpha)$ と見ることができる。このような観点から大胆な仮定をすると、Fig. 5(c) に示すヘリカルリボン槽は、“槽径 D の槽に、翼径 d 、翼高さ $h/\sin \alpha$ で羽根枚数が $n_p/\sin \alpha$ のアンカー翼を押し、翼先端速度 $v_0 \sin \alpha$ で回転する場合”と相似と見做すことができる。このとき、Eq. (11) の $\bar{f}_w^*$ は

$$\bar{f}_w^* = f_n \left\{ \frac{\ln (D/d)}{(2\pi \sin \alpha / n_p)}, \frac{2\pi \sin \alpha}{n_p} \right\} \quad (22)$$

また、Eq. (8) に対応する $\bar{f}_w^*$ と $\bar{\tau}_w$ の関係式は

$$\begin{aligned} \bar{f}_w^* &= \frac{(D/2)^2 \bar{\omega}_w}{\{(n_p/\sin \alpha) (v_0 \sin \alpha) r_0 / 2\pi\}} \\ &= \frac{(D/2)^2 \bar{\tau}_w}{(n_p v_0 r_0 / 2\pi)} \end{aligned} \quad (23)$$

一方、Eq. (6) に対応する撹拌所要動力は

$$P = (2\pi N \sin \alpha) (D/2) (\pi Dh/\sin \alpha) \bar{\tau}_w \quad (24)$$

結局、ヘリカルリボン翼に対しては、Eq. (12) に対応して次式が導かれる。

Impeller blade

Fig. 7 Two dimensional schema of helical ribbon impeller

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_p} \left(\frac{d}{D} \right) N_p \cdot Re_d \\ = \left(\frac{h/\sin \alpha}{D} \right) f_n \left\{ \frac{n_p}{\sin \alpha} \ln (D/d), n_p/\sin \alpha \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

これより、アンカー翼に対する相関式 Eq. (20) を次のように修正すればよいことになる。即ち

$$\begin{aligned} N_p \cdot Re_d = 8n_p \\ + \frac{75.9z_2 (n_p/\sin \alpha)^{0.85} (h/d)}{0.157 + \{(n_p/\sin \alpha) \ln (D/d)\}^{0.611}} \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、補正項 $8n_p$ はそのままとし、 z_2 には Eq. (19) 中の n_p を $n_p/\sin \alpha$ と置換えて、そのまま $z_2 = z_1$ として用いることとする。

上述のような大胆な仮定に基づく相関式 Eq. (26) と、特に実験条件の巾が広い多くの研究者の実験データ^{3,15,19,24,26)}との比較を Fig. 8(a) に示す。ここで、Eq. (26) の $N_p \cdot Re_d$ の計算値は実験値より少し高い値を示すが、ほぼまとまった相関を示しており、相関式の骨格となる Eq. (26) 第2項の関数形は基本的に有効であることが判る。

そこで、Eq. (26) の関数形を保存し、補正係数 z_2 を変数の最適化法で求めたところ次式を得た。ここで、翼幅 w に関する第1項の指数はアンカー翼の場合と同一の値を採用した。

$$\begin{aligned} z_2 = 0.759 \left\{ \frac{n_p}{\sin \alpha} \ln \left(\frac{d}{d-2w} \right) \right\}^{0.139} \left\{ n_p \ln \left(\frac{D}{d} \right) \right\}^{0.182} \\ \cdot n_p^{0.170} \end{aligned} \quad (27)$$

このように、 z_2 に対し $\sin \alpha$ の追加補正の必要がないことが判る。

Fig. 8(b) は、Eq. (26) の z_2 に Eq. (27) を用いた場合の計算値と実験データを相関したものであるが、平均誤差 8.0% と良好な一致を示した。ちなみに、ここに示された実験データと Table 1 で示された相関式の比較を行ったところ、平均誤差が Table 3 に示すように広瀬・村上の式で 17.5%、Shamlou-Edwards の式で 17.1%、高橋らの式で 11.2% であり、Eq. (27) を用いた Eq. (26) の相関式

Table 3 Standard deviation of correlations [%]

Investigators	Anchor	Helical ribbon
Chavan - Ulbrecht	—	27.8
Takahashi et. al.	18.3	11.2
Shamlou - Edwards	19.5	17.1
Hirose - Murakami	17.3	17.5
This work	6.4	8.0

Fig. 8 Comparison of observed power consumption for helical ribbon impeller with calculated one (a) by Eq. (26) with Eq. (19) and (b) by Eq. (26) with Eq. (27)

がヘリカルリボン翼に対し有効であることが認められた。なお、アンカー翼の誤差についても Table 3 に示した。

5. 非ニュートン液体搅拌での平均剪断速度の推算

非ニュートン流体の搅拌所要動力の推算には、Metzner-Otto の平均剪断速度 $\dot{\gamma}_{av}$ から求めた見掛け粘度 μ_a を用いることにより、ニュートン流体の相関式をそのまま使用できるという考え方が広く用いられている。ここで、平均剪断速度は $\dot{\gamma}_{av} = k_s N$ なる関係があり、その比例定数である Metzner-Otto 定数 k_s は翼の寸法や使用流体の非ニュートン特性に依存する。

平岡ら¹⁰⁾は、搅拌槽内の非ニュートン流体の2次元流動数値解析と搅拌所要動力の測定結果の比較から、“槽内の平均剪断速度を示す代表剪断応力は翼先端半径位置での平均剪断応力 $\bar{\tau}_d$ で代表される”とした。このとき、 $\bar{\tau}_d = \bar{\tau}_w (D/d)^2$ の力学バランスを考慮して、Eq. (9) と Eq. (10) より Metzner-Otto 定数 k_s は次のように表現され

る。

$$k_s = \frac{\bar{\tau}_d}{\mu N} = \frac{1}{n_p} \bar{f}_w^* = \frac{1}{\pi^2} (N_p \cdot Re_d) \left(\frac{d}{b} \right) \quad (28)$$

ここで、 $N_p \cdot Re_d$ の実測値と2次元解析より求めた計算値との差異を考慮したEq.(16)を用いてEq.(28)を書替えると次式となる。

$$k_s = \frac{1}{\pi^2} (N_p \cdot Re_d(\text{obs}) - 8n_p) \left(\frac{d}{b} \right) \\ = \frac{7.59z(n_p/\sin \alpha)^{0.85}}{0.157 + \{(n_p/\sin \alpha) \ln(D/d)\}^{0.611}} \quad (29)$$

ここで、 z は、パドルおよびタービン翼に対して1、アンカー翼にはEq.(19)より、そしてヘリカルリボン翼についてはEq.(27)より求められる。

多くの文献^{1,4,5,7,8,16,17,20,22,24,27,28)}によるMetzner-Otto定数 k_s の実測値 $k_s(\text{obs})$ とEq.(29)による $k_s(\text{cal})$ の比較をFig. 9に示す。ヘリカルリボン翼やアンカー翼の結果についてはよい相関がみられ、全体的にも良好に相関されており、Eq.(29)の有効性が幅広い範囲で確認されたことになる。

結 言

攪拌槽内での層流域におけるパドル翼の2次元数値流動解析結果に基づいて、基礎式と境界条件から理論的に導出されるパラメータを用いる層流域の攪拌所要動力の相関式を求めた。そして、この相関式を実験データと比較し、攪拌翼-槽壁間クリアランスの小さな大型翼からクリアランスの大きな小型の翼にわたって広範囲に適用可能な層流域での攪拌所要動力の相関式を得た。

次に、本相関式に翼形状を考慮に入れた補正パラメータを導入することにより、アンカー翼、ヘリカルリボン翼に適用可能な修正された動力相関式を得た。

これらを総括すると次式を得る。

$$N_p \cdot Re_d = 8n_p \\ + \frac{75.9z(n_p/\sin \alpha)^{0.85} (h/d)}{0.157 + \{(n_p/\sin \alpha) \ln(D/d)\}^{0.611}}$$

ここで、

- ・パドル翼： $z = 1$, $\sin \alpha = 1$, $h = b$
- ・アンカー翼：

$$z = \left(\frac{b'}{h} \right) + 0.684 \left\{ n_p \ln \left(\frac{d}{d-2w} \right) \right\}^{0.139}$$

$$\sin \alpha = 1$$

- ・ヘリカルリボン翼：

$$z = 0.759 \left\{ \frac{n_p}{\sin \alpha} \ln \left(\frac{d}{d-2w} \right) \right\}^{0.139} \left\{ n_p \ln \left(\frac{D}{d} \right) \right\}^{0.182}$$

$$\cdot n_p^{0.170}$$

$$\sin \alpha = \{1 + (\pi d/s)^2\}^{-0.5}$$

Investigators	H	A	P, T
Takahashi et al.	●		
Rieger-Novak	▲	▲	
Hall-Godfrey	◀		
Kuriyama et al.	■		
Shamloo-Edwards	▶		
Taniyama-Sato			○
Godleski-Smith			⊙
Metzner et al.			◇
Calderbank-Mooyoung			△
Nagata et al.	▼	▼	▽
Bechner-Smith		◆	
Carreau et al.	◆		

H : Helical ribbon A : Anchor
P : Paddle T : Turbine

Fig. 9 Comparison of observed Metzner-Otto constants with calculated ones by Eq. (29)

また、本相関式を用いて非ニュートン流体攪拌におけるMetzner-Otto定数の簡便な推算式を提出した。

$$k_s = \frac{7.59z(n_p/\sin \alpha)^{0.85}}{0.157 + \{(n_p/\sin \alpha) \ln(D/d)\}^{0.611}}$$

推算されたMetzner-Otto定数は実験値とよい一致を示した。

Appendix I Eq. (1)およびEq. (2)の誘導

Eq. (T-1)は、 $\xi = \ln(r/r_0)$, $\theta = \theta$ のもとで座標変換すると、次式のように変形される。

$$\frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(\xi, \theta)} = \nu \nabla_\xi^2 \omega \quad (A-1)$$

ここで

$$\nabla_\xi^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = r^2 \nabla^2 \quad (A-2)$$

次に、 $f = r^2 \omega = r_0^2 e^{2\xi} \omega$ より、次の関係式を得る。

$$r_0^2 e^{2\xi} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi} - 2f \quad (A-3)$$

$$r_0^2 e^{2\xi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 4 \frac{\partial f}{\partial \xi} + 4f \quad (A-4)$$

$$r_0^2 e^{2\xi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (A-5)$$

Eqs. (A-3)~(A-5)をEq. (A-1)に代入して再整理すると、次式を得る。

$$\frac{\partial(\psi, f)}{\partial(\xi, \theta)} + 2f \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ = \nu \left(\nabla_\xi^2 f - 4 \frac{\partial f}{\partial \xi} + 4f \right) \quad (A-6)$$

Fig. A Comparison of minor data of power consumption for helical ribbon impeller with calculated one by Eq. (26) with Eq. (27)

また, Eqs. (A-2), (T-2) を用いて次式を得る.

$$\mathcal{P}_z^2 \psi = f \quad (\text{A-7})$$

Eqs. (A-6), (A-7) に Eqs. (3), (4) の無次元化に関する定義式を代入して整理すると, 最終的に Eq. (1) および Eq. (2) を得る.

Appendix II ヘリカルリボン翼の所要動力の単発データに対する相関

単発的に報告されているヘリカルリボン翼の撹拌所要動力のデータは Shamlou-Edwards²⁴⁾ の文献に報告されている. また, 最近では Carreau⁵⁾ の文献がある. これらのデータを本研究で求めた相関式 Eq. (26) の推算値と比較したのが Fig. A である. 一部のデータをのぞいては良好に相関されることがわかる.

Nomenclature

b	= height of paddle impeller	[m]
b'	= arm width of anchor impeller	[m]
c	= clearance between impeller tip and vessel wall	[m]
D	= vessel diameter	[m]
d	= impeller diameter	[m]
f	= modified vorticity defined as $f = r^2 \omega$	[m ² /s]
h	= height of anchor or helical ribbon impeller	[m]
k_s	= Metzner-Otto constant	[-]
N	= rotational speed	[s ⁻¹]
N_p	= power number (= $P/\rho N^3 d^5$)	[-]
n_p	= number of impeller blade	[-]
P	= power consumption	[W]
Re_d	= Reynolds number (= $Nd^2 \rho/\mu$)	[-]
r	= radius in cylindrical coordinates	[m]

s	= pitch of helical ribbon blade	[m]
u	= velocity	[m/s]
w	= blade width of anchor or helical ribbon impeller	[m]
z	= correction factor	[-]
z_1	= correction factor defined by Eq. (19)	[-]
z_2	= correction factor defined by Eq. (27)	[-]
α	= pitch angle defined by Eq. (21)	[rad]
$\dot{\gamma}_{av}$	= average shear rate	[s ⁻¹]
θ	= angle in cylindrical coordinates	[rad]
μ	= viscosity	[Pa·s]
ν	= kinematic viscosity	[m ² /s]
ξ	= variable defined as $\xi = \ln(r/r_0)$	[-]
ρ	= density	[kg/m ³]
$\overline{\tau}_d$	= average shear stress at impeller tip radius	[N/m ²]
$\overline{\tau}_w$	= average shear stress at vessel wall	[N/m ²]
ψ	= stream function	[m ² /s]
ω	= vorticity	[s ⁻¹]

<Subscripts>

0	= impeller tip
w	= vessel wall

Literature cited

- 1) Beckner, J.L. and J.M. Smith: *Trans. Instn Chem. Engrs*, **44**, T224-236 (1966)
- 2) Bertrand, J. and J.P. Couderc: *Can. J. Chem. Eng.*, **60**, 738-747 (1982)
- 3) Bourne, J.R., W. Knoepfli and R. Riesen: *Proceedings of 3rd European Conf. on Mixing*, pp 1-14 (1979)
- 4) Calderbank, P.H. and M.B. MooYoung: *Trans. Instn Chem. Engrs*, **39**, 337-347 (1961)
- 5) Carreau, P.J., R.P. Chhabra and J. Cheng: *AIChE J.* **39**, 1421-1430 (1993)
- 6) Chavan, V.V. and J.J. Ulbrecht: *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.*, **12**, 472-476 (1973)
- 7) Godleski, E.S. and J.C. Smith: *AIChE J.*, **8**, 617-620 (1962)
- 8) Hall, K.R. and J.C. Godfrey: *Trans. Instn Chem. Engrs*, **48**, T201-208 (1970)
- 9) Hiraoka, S., I. Yamada and K. Mizoguchi: *J. Chem. Eng. Japan*, **11**, 487-493 (1978)
- 10) idem: *ibid.*, **12**, 56-62 (1979)
- 11) Hiraoka, S.: "Kagaku Kogaku no Shinpo No.22" Chapter 8, p133 (1988)
- 12) Hiraoka, S., I. Yamada, T. Aragaki, H. Nishiki, A. Sato and T. Takagi: *J. Chem. Eng. Japan*, **21**, 79-86 (1988)
- 13) Hirose, T. and Y. Murakami: *ibid.*, **19**, 568-574 (1986)

- 14) Kaminoyama, M., F. Saito and M. Kamiwano: *Kagaku Kogaku Ronbunshu*, **14**, 786-793 (1988)
- 15) Kappel, M.: *Int. Chem. Eng.*, **19**, 571-590 (1979)
- 16) Kuriyama, M., K. Arai and S. Saito: *J. Chem. Eng. Japan*, **16**, 489-494 (1983)
- 17) Metzner, A.B., R.H. Feehs, H.L. Ramos and R.E. Otto: *AIChE J*, **7**, 3-9 (1961)
- 18) Nagata, S., K. Yamamoto and T. Yokoyama: *Memoirs Fac. Eng. Kyoto Univ.*, **19**, 274-290 (1957)
- 19) Nagata, S., M. Nishikawa, S. Goshima and M. Nakajima: *Kagaku Kōgaku*, **34**, 1115-1116 (1970)
- 20) Nagata, S., M. Nishikawa, H. Tada and S. Goto: *J. Chem. Eng. Japan*, **4**, 72-76 (1971)
- 21) Nagata, S.: "Mixing, Principles and Applications" Kodansha-A Halsted Press Book (1975)
- 22) Rieger, F. and V. Novak: *Trans. Instn Chem. Engrs*, **51**, 105-111 (1973)
- 23) Schilo, D.: *Chem. Ing. Techn.*, **41**, 253-259 (1969)
- 24) Shamlou, P.A. and M.F. Edwards: *Chem. Eng. Sci.*, **40**, 1773-1781 (1985)
- 25) Shida, H.: M. Sc. Thesis, Nagoya Inst. of Tech. (1993)
- 26) Takahashi, K., K. Arai and S. Saito: *J. Chem. Eng. Japan*, **15**, 77-79 (1982)
- 27) Takahashi, K., T. Yokota and H. Konno: *ibid.*, **17**, 657-659 (1984)
- 28) Taniyama, I. and T. Sato: *Kagaku Kogaku*, **29**, 709-714 (1965)
- 29) Yamamoto, K.: Ph. D. Thesis, Kyoto Univ. (1961)

Development of Power Correlations for Various Impellers in an Agitated Vessel in Laminar Region Based on a Numerical Analysis of 2-D Flow

Noboru Kamei*, Setsuro Hiraoka, Yoshihito Kato,
Yutaka Tada, Shoujiro Kuwabara, Young Sei Lee**,
Takao Yamaguchi*** and Seung-Tae Koh****

Department of Applied Chemistry, Nagoya Institute of
Technology, Nagoya 466

Key Words : Agitated Vessel, Power Consumption, Power Correlation, Paddle, Anchor, Helical Ribbon, Numerical Analysis.

Based on the numerical analysis of 2-D flow in an agitated vessel with paddle impeller, a correlation for power consumption in a laminar region was developed by using geometrical parameters derived theoretically from the governing equations and boundary conditions. Then the correlation was modified for paddle, anchor and helical-ribbon impellers using correction factors with impeller geometries. A simple method of estimating the Metzner-Otto constant k_s for non-Newtonian fluids was also proposed, based on the power correlations obtained. The estimated Metzner-Otto constant agrees well with experimental values.

* Daicel Chemical Industries, Ltd.

** Keimyung Univ. (Korea)

*** Chubu Univ.

**** Toyo Engineering Co.