ダイナミックプログラミングによるオンライン多変数 非線形最適レギュレータ[†]

森本 潤^{††*}・山下善之・鈴木 睦

東北大学大学院工学研究科 化学工学専攻, 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 07

代表的な最適フィードバック制御として、最適レギュレータが広く知られているが、多変数の非線形システムについてオンライン・リアルタイムで解を求めることは容易ではなかった。本研究では、多変数の非線形最適レギュレータ問題の解法として、状態変数空間上の評価関数分布をダイナミックプログラミングで繰り返し計算させることによって収束させ最適操作変数値を求める方法を提案する。タンクのレベル制御および CSTR の温度制御のシミュレーションの結果、実時間での計算が可能であり、良好な制御性能を示す制御系を実現できることが示された。また、擬定常状態を仮定して最適レギュレータを逐次的に実施することによって、バッチプロセスの追従制御にも適用可能なことを示し、バッチ蒸留の還流比制御のシミュレーションを例として本手法によって良好な制御が実現できることを検証した。

緒 言

最適レギュレータの問題は古くから研究されているが、対象が非線形システムの場合は、その解法は確立されておらず、線形化により線形最適化問題として解く解法が一般的となっている (Kogou *et al.*, 1979)。非線形最適化問題の解法としては、変分法や最大原理を用いる方法とダイナミックプログラミング (DP) が知られている。しかし、前者はその算出において 2 点境界値問題となり膨大な繰り返し計算が必要であり、後者も終端から各状態に対して最適探索を行なうため、両手法とも実時間での算出は不可能であった。

筆者らは、最大原理と Hamilton 関数の性質を利用して Hamilton 随伴関数を消去する事により、1 変数と 2 変数の非線形最適レギュレータ問題を 1 次元探索問題とする解法を示した (Morimoto *et al.*, 2000)。この解法により、2 変数までの非線形最適レギュレータ問題は実時間で算出可能となったが、3 変数以上の問題には適応不可能であった。

Luus らは、最適運転計画問題において、適当な軌道を仮定し、DP を繰り返すことにより最適軌道に収束させる手法を提案している (Luus *et al.*, 1994, 1997)。この手法は、通常の DP より計算時間が短縮されるが、終端の評価関数分布が必要となる為、最適レギュレータ問題には適応できない。

本報では、状態変数空間上に適当な評価関数分布を作成し、DP を繰り返すことにより評価関数分布を収束させ、非線形最適レギュレータを求める手法を提案する。本手法をオンラインで使用する場合、1 時点前の評価関数分布を用いることにより収束時間を短縮でき、実時間での算出が可能となる。また、バッチプロセスに対しても擬定常状態を仮定して最適レギュレータを求め、オンラインで逐次レギュレータを更新することにより適用可能となる。本手法の実効性及び実用性を、連続プロセスとしてタンクのレベル制御と CSTR の温度制御を例に、バッチプロセスとしてバッチ

蒸留の還流比制御を例にシミュレーションにより検証した。

1. 理 論

1.1 問題の定式化

n 個の状態変数 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ の系を操作変数 u により制御することを考える。各状態変数の時間微分を

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, u) \quad (i=0, 1, \dots, n-1) \quad (1)$$

と表す。ただし制御変数には

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \quad (2)$$

の制約条件がある。ここで、Eq. (3) で定義される評価関数を最小とする制御を考える。

$$J = \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \{P_i(x_i - x_i^*)^2\} + Q(u - u^*)^2 \right] dt \quad (3)$$

x_i^*, u^* は定常点における各状態および操作変数値であり、 P, Q は、重みである。

1.2 DP による非線形最適レギュレータの算出

通常、DP により最適軌道を求める場合、終末の評価関数分布を利用して、逆時間的に算出して行くことになる。よって、レギュレータ問題の場合、終末状態は定常点のみであるため、その点を始点として、探索範囲を広げて行くことになる。しかし、多変数の問題では、各状態変数の探索範囲を決定することは難しく、また定常点からの算出となるため実時間での算出は事実上不可能であった。そこで、予め状態変数空間にある適当な評価関数分布を作成しておき、DP を行なうことを考える。DP を行なうことで、その一部の区間で最適化された評価関数値を得ることができる。よって、DP を繰り返すことで、最適な評価関数分布に収束することが期待できる。その算出手順を以下に示す (Fig. 1)。

1. 初期評価関数分布の作成

状態変数をグリッドに分割し、各グリッドにおける評価関数分布を仮定する。この初期評価関数分布の作成法としては、各グリッドから、線形化制御や u^* 一定で x^* まで運転し、Eq. (3) を見積もる方法が考えられる。

2. 操作時間間隔 ΔT での最適操作変数値 u_{opt} の探索と評価関数の更新

Eq. (2) の条件内の操作変数値一定で、操作時間間隔 ΔT

[†] 2000 年 3 月 27 日受理

化学工学会第 65 年会 (東京, 2000 年 3 月) にて発表

^{††} jun@pse.che.tohoku.ac.jp

* 三共 (株)

Fig. 1 Principle of the method

運転し、その間の評価関数値と到達した状態の評価関数の和が最小となる操作変数値 u_{opt} を探索する。そしてその評価関数値を、そのグリッドの新しい評価関数値とする。

3. 評価関数の変化 ΔJ がある基準値以下となるまで2. を繰り返す。

当然、初期評価関数分布が最適分布に近いほど、収束時間は短くなる。On-line での算出を考えたとき、急激なステップ外乱等がない限り、評価関数分布が大きく変化することはないと考え、前時点で得た評価関数分布を初期評価関数分布として利用することで、計算時間を短縮することができる。バッチプロセスに対しても、擬定常状態を仮定して最適レギュレータを求め、プロセスの進行に伴い評価関数分布を変化させて行くことで適応可能となる。また、算出原理よりわかるように、本手法によるレギュレータは、離散時間系の最適解となる。

グリッド数とサンプリング間隔 ΔT については、対象とするプロセスの特性を考慮して適切な値を選択する必要がある。すなわち、計算精度を上げるためにはグリッドをある程度細かく設定する必要があるが、そうすると計算時間が増大するために ΔT を大きく設定せざるを得なくなってしまう制御性能を低下させてしまう場合がある。例えば、ホールドアップの大きい蒸留塔では、時定数が大きいので ΔT を比較的大きくすることができ、グリッド数を増やして計算精度を上げることが可能である。

2. 適 応 例

本制御手法の有効性と実効性を検証するために、いくつかの対象についてシミュレーションを行なった。まず、評価関数や操作変数の分布が図示可能な1変数系の問題の例としてタンクのレベル制御を対象として最適レギュレータを構築し収束過程や基本的特徴を示す。次に、多変数プロセスの例としてCSTRの温度制御(3変数系)を対象としてシミュレーションを行ない、多変数の非線形系でも実時間計算が可能であることを示す。最後に、バッチプロセスの追従制御への適用例としてバッチ蒸留塔の還流比制御を取り上げ、計算時間を減らすための補助的な方法とともに良好な制御が行なえることを示す。なお、本シミュレーションの計算にはPentium III, 500 MHz をCPUとするパーソナルコンピュータを用いた。

2.1 タンクのレベル制御

断面積 A のタンクに、流速 q_{in} で流入し、タンク底のバルブで

Fig. 2 Objective function and number of iteration ($\Delta T=1$)

Fig. 3 Toward the optimal input ($\Delta T=1$)

流出するときのバルブ開度によるレベル制御を考える。液高を h 、バルブ定数を c とすると状態方程式は、

$$\dot{h} = \frac{1}{A} (q_{in} - cf(u)\sqrt{h}) \equiv f_1 \quad (4)$$

となる。ここで $f(u)$ はバルブ特性を表し、イコールパーセントバルブでは

$$f(u) = a_0 \exp\left(\ln\left(\frac{1}{a_0}\right)u\right) \quad (5)$$

と表される。ここで、 a_0 は漏洩定数である。このとき評価関数を次式で定義し、

$$J = \int_0^\infty \{P(h-h^*)^2 + Q(u-u^*)^2\} dt \quad (6)$$

グリッド数 1,000, $A=1.0$, $q_{in}=3.0$, $c=12.0$, $h^*=0.7$, $a_0=0.02$, $P=10.0$, $Q=1.0$ の条件における最適レギュレータを前節の方法で構成した。サンプリング時間 $\Delta T=1$ における評価関数の収束過程を Fig. 2 に、その時の操作変数の分布を Fig. 3 に示す。評価関数分布および操作変数分布は、DP 繰り返し回数 $N=1,000$ 程度ではほぼ収束していることがわかる。なお、 $N=0$ の評価関数分布は $u=u^*$ 一定で運転した場合の評価関数値を示している。次に、 $\Delta T=60$ における操作変数分布を Fig. 4 に示す。サンプリング間隔が長い条件では、DP 探索時の状態変化幅が広がるため、 $N=20$ 程度ではほぼ収束している。本手法では、このように離散時間系における最適軌道を算出することが可能である。Fig. 5 にサンプリング間隔 ΔT と最適操作変数分布との関係を示す。 $\Delta T=1$ の条件では、連続系での最適解である、最大原理により求めた分布と一致している。また、バルブ特性の非線形性が強い u が 0.7 以上では、 ΔT の変化に対して最適操作変数分布が大きく変化している。Fig. 6 に本手法による制御結果を線形化制御による制御結果とともに示した。ここで、グリッド数は 1,000 とし、 $\Delta T=10$ とした。目標定常点から離れた $h=0.8$ 付近でも、非線形最適レギュレータである本手法は線形化制御に比べ良好な制御結果を示し

Fig. 4 Objective function and number of iteration ($\Delta T = 60$)

Fig. 5 Optimal input and sampling period

Fig. 6 Level control of a tank

ていることがわかる。

2.2 CSTR の温度制御

3変数系の問題として、CSTRにおける反応液温度を、ジャケット入口温度 T_{2in} で制御する問題を考える (Fig. 7)。反応は $A \rightarrow B$ の1次反応とし、ジャケット内は完全混合とすると、反応液温度 T_1 、ジャケット温度 T_2 、A成分濃度 C_A の時間微分は、

$$\dot{T}_1 = \frac{w_1}{W_1} (T_{1in} - T_1) - \frac{AU}{W_1} (T_1 - T_2) + \frac{V_1}{W_1} R(T_1) \quad (7)$$

Table 1 Parameter values

parameter	value	parameter	value
A	5.0	A_1	3.6×10^{14}
V_1	5.0	V_2	1.0
u_1	5.0	u_2	1.8
C_{p1}	1.0	C_{p2}	1.0
ρ_1	1000	ρ_2	1000
H_1	83.72	E_1	87.9
P_1	100.0	P_2, P_3	1.0
Q	1.0	ΔT	10.0
T_{1in}	60.0	C_{Ain}	200.0
T_{2in}^{max}	100.0	T_{2in}^{min}	0.0

Fig. 7 Schematic of diagram of CSTR

$$\dot{T}_2 = \frac{w_2}{W_2} (T_{2in} - T_2) + \frac{AU}{W_2} (T_1 - T_2) \quad (8)$$

$$\dot{C}_A = \frac{u_1}{V_1} (C_{Ain} - C_A) - k_1 C_A \quad (9)$$

のように表される。ここで $W_1 = C_{p1} \rho_1 V_1$ 、 $W_2 = C_{p2} \rho_2 V_2$ 、 $w_1 = C_{p1} \rho_1 u_1$ 、 $w_2 = C_{p2} \rho_2 u_2$ である。 $R(T_1)$ は反応熱項であり、

$$R(T_1) = k_1 C_A H_A \quad (10)$$

$$k_1 = A_1 \exp\left(\frac{-E_1}{RT_1}\right)$$

で表される。また、評価関数は Eq. (11) と定義した。

$$J = \int_0^\infty \{P_1 (T_1 - T_1^*)^2 + P_2 (T_2 - T_2^*)^2 + P_3 (C_A - C_A^*)^2 + Q (T_{2in} - T_{2in}^*)^2\} dt \quad (11)$$

計算条件を Table. 1 に、シミュレーション結果を Fig. 8 に示す。ここで、被制御変数である T_1 の重み P_1 を 100 と大きく設定し、その他の重みは、制御安定性を考慮して 1.0 とした。本シミュレーションでは T_1 、 T_2 、 C_A の3変数について状態をグリッドに分割し、 $\Delta T = 10$ で DP により最適レギュレータを更新している。測定可能な状態量は T_1 、 T_2 とし、測定外乱として、平均 0、分散 0.1 の正規乱数を加え、 C_A とランブ的に変化する総括伝熱係数 U を、拡張カルマンフィルターによって推定した (Park *et al.*, 1983)。反応液温度 T_1 は、すみやかに目標値となり良好な制御結果が得られている。このような穏やかな外乱では、DP の繰り返し回数は一回で収束条件 $\Delta J < 10.0$ を満たしていた。また、DP 一回当たりに必要な計算時間は約 3 秒 (グリッド数 20) であることから、実際に $\Delta T = 10$ でのオンライン運転が可能であることが示された。

2.3 バッチ蒸留塔の還流比制御

多変数バッチプロセスの例として、2成分バッチ蒸留の還流比制御を考える。 $i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 段の液組成 x_i 、蒸気組成 y_i 、次

Fig. 8 Temperature control of a CSTR

き上げ量 G , 炊き上げ量に対する還流液量比 R ($0 \leq R \leq 1.0$), 各段のホールドアップ H とすると, 各段の液組成の微分方程式は, Eqs. (12), (13) で表される.

$$H\dot{x}_0 = G(y_1 - y_0) + GR(y_0 - x_1) \quad (12)$$

$$H\dot{x}_i = G(y_{i+1} - y_i) + GR(x_{i-1} - x_i) \quad (13)$$

for $i=1, \dots, n-1$

蒸留缶の液組成 x_n および液量 V の微分方程式はそれぞれ,

$$V\dot{x}_n = GRx_{n-1} - Gy_n + G(1-R)x_n \quad (14)$$

$$\dot{V} = -(1-R)G \quad (15)$$

となる. また, 段効率 E は

$$E = \frac{y_1 - y_{1+1}}{y_1^* - y_{1+1}} \quad (16)$$

と表される. ここで, y^* は理想的な気液平衡関係である. 製品となる塔頂組成 y_0 を製品規格(spec) に制御するとき, Eq. (17) を最小とする運転を考える.

$$J = \int_0^\infty \left[\sum_{i=0}^{n-1} \{P_i(x_i - x_i^*)^2\} + Q(R - R^*)^2 \right] dt \quad (17)$$

ここで, x_i^* , R^* は, 擬定常状態で塔頂が製品規格となる各段の組成と還流比である.

バッチ蒸留に対しても, 擬定常状態を仮定することで, DP により最適レギュレータを算出することができる. すなわち, 蒸留缶組成を一定で, 各段の組成を状態変数としてグリッドに分割し, DP を繰り返すことにより, 評価関数分布を収束させることができる. そして, 蒸留進行に伴い, 逐次その分布を更新するのである.

このように, 多変数系の最適レギュレータの算出は原理的に可能であるが, 実時間での評価関数更新を考えると, グリッド点が

Table 2 Parameter values

Parameter	value	Parameter	value
G	1.0	H	0.05
V_0	1.0	x_0	0.5
α	2.5	spec	0.95
P_0	10.0	P_{1-n-1}	1.0
Q	1.0	ΔT	10.0
$R_{\min}$	0.2	$R_{\max}$	1.0

Fig. 9 Reflux ratio control of a distillation column

状態変数の数に対して指数関数的に増加するため, 段数が増えてくると不可能になってしまう. そこで, DP で扱う状態変数の数を減らすことを考える. すなわち, DP で使用する状態変数を適当な段間隔で設置し, DP 探索時の積分のみ, Lagrange 補間により決定した値により全段数で計算することとする (Schröder *et al.*, 1999).

9 段の蒸留塔を 3 次元の状態変数（グリッド数 20）として運転したシミュレーション結果を Fig. 9 に、その計算条件を Table. 2 に示す。ここで、製品となる塔頂組成に対する重み P_0 を 10 とし、その他を 1.0 と設定した。塔頂から 1 段目、4 段目、7 段目の 3 箇所で温度を測定することとし、各段の組成とランブ的に変化する段効率はカルマンフィルターによって推定した。評価関数分布の収束に必要な DP の繰り返し回数 N は、炊き上げ組成変化の少ない蒸留初期では少なく、蒸留が進むにつれて 1.7 h 付近まで増加している。その後、還流比が大きく組成変化の少ない蒸留後期に収束回数は減少している。 V と E に若干のずれがあるものの、塔頂組成 y_0 はほぼ製品規格に制御されており、この例においても、本手法によって良好な制御が可能であることが確認された。

結 言

多変数非線形最適レギュレータを、DP により求める手法を提案し、タンクのレベル制御を例に本手法の特徴を示した。また、CSTR の温度制御を対象としたシミュレーションにより、本手法による算出が実時間で可能である事を示し、バッチ蒸留塔の還流比制御を例に、バッチプロセスの追従制御にも適用可能であることを示した。

Nomenclature

A	=area of heat transfer	[m ²]
A_1	=frequency factor	[-]
a_0	=leak constant	[-]
C	=concentration	[mol/m ³]
c	=valve constant	[m/h]
E_1	=activation energy	[KJ/mol]
G	=vapor flow rate	[kmol]
H	=hold up of a tray	[kmol]
H_1	=reaction heat	[KJ/mol]

h	=height of liquid level	[m]
J	=objective function	[-]
N	=number of iteration	[-]
P	=weight coefficient	[-]
Q	=weight coefficient	[-]
q_{in}	=flow rate	[m ³ /h]
R	=gas constant	[J/(molK)]
T	=temperature	[°C]
U	=overall coefficient of heat transfer	[KJ/(m ² h°C)]
u	=flow rate	[m ³ /h]
V	=volume in distillation still	[kmol]
V_1	=reactor volume	[m ³]
V_2	=jacket volume	[m ³]
x	=mole fraction (liquid phase)	[-]
y	=mole fraction (vapor phase)	[-]
α	=volatility ratio	[-]
ΔT	=sampling time period	[s]

Literature cited

Bojkov, B. and R. Luus ; "Optimal Control of Nonlinear Systems with Unspecified Final Times," *Chem. Eng. Sci.*, **51**, 905-919 (1996)

Kogou, H. and T. Mita ; "Shisutemu Seigyo Riron Nyuumon," p. 156-163, Jikkyou Syuppan, Tokyo, Japan (1979)

Luus, R. ; "Optimal Control of Batch Reactors by Iterative Dynamic Programming," *J. Proc. Cont.*, **4**, 218-226 (1994)

Morimoto, J., Y. Yamashita and M. Suzuki ; "A Method for Non-linear Optimal Regulator," *Kagaku Kogaku Ronbunshu*, submitted

Park, S. and D. M. Himmelblau ; "Fault Detection and Diagnosis via Parameter Estimation in Lumped Dynamic Systems," *Ind. Eng. Chem.*, **22**, 482-487 (1983)

Schröder, A. and M. J. Mendes ; "Time Optimal Control of Distillation Column : A Mixed IDP-AQP Approach," *Comp. Chem. Eng.*, **23**, S 491-494 (1999)

On-line Optimal Regulator for Multi-Variable Non-Linear Systems by Dynamic Programming

JUN MORIMOTO*, YOSHIYUKI YAMASHITA and MUTSUMI SUZUKI

Department of Chemical Engineering, Tohoku University, Sendai 980-8579

Key words: optimal regulator, dynamic programming.

Although the optimal regulator is widely known as a typical optimal-feedback controller, the optimal problem for multi-variable non-linear systems is hard to solve in real-time. In this paper, a new method for solving the optimal regulator is proposed. Optimal values of manipulation variable are calculated by evaluating an objective function on state-variable space which is iteratively solved by a dynamic programming. As a result of simulation for level-control of a tank and temperature-control of a CSTR, the proposed method provides real-time calculation of the optimal problem, and a good controller can be realized. Consecutive calculation of optimal regulator realizes tracking controller of a batch process with quasi-steady state condition. Simulation of reflux-ratio control of a batch distillation shows good control performance.

* Sankyo Co., Ltd.