指数法則模型非ニュートン流体中での球の強制自然複合対流熱伝達実験

山中 彰 宏・三 石 信 雄
九州大学工学部 応用原子核工学教室*

$1.0 < N_{Pe} < 10^8$, $1.6 \times 10^{-6} < N_{Gr} < 0.44$, $2.6 \times 10^4 < N_{Pr'} < 6.4 \times 10^5$ および $0.24 < N_{Gr}^{1/(n+1)}$. $N_{Pr'}^{2n/(3n+1)} < 74$ の範囲で実験を行った. ここで, N_{Pe} はペクレ数であり, N_{Gr} および $N_{Pr'}$ はそれぞれ Acrivos によって定義されたような指数法則模型流体の一般化グラスホフ数およびプラントル数である. 実験に用いた球は, 11 枚の銅片から製作した 46.03 mm の球と, 19.03 mm および 9.543 mm の 2 つの真ちゅう球であり, 試料液体は, 2.61%MC (methylcellulose), 5.52%CMC, 0.74%SPA (sodium polyacrylate) および 1.48%PEO 水溶液である. 結果は次式で整理でき, その平均偏差は 29.3% である.

$$Nu_m - 2 = [(0.866\sigma^{2/3}N_{Pe}^{1/3} - 0.553\sigma - 0.341)^{3/2} + (0.44N_{Gr}^{1/(2n+2)}N_{Pr'}^{n/(3n+1)})^{3/2}]^{2/3}(K_b/K_s)^{1/(3n+1)}$$

ここで, $\sigma = -2.475n^3 + 6.738n^2 - 7.868n + 4.740$ であり, K_b および K_s はそれぞれ主流温度 t_b および球表面温度 t_s における指数法則模型のパラメータ K の値である.

緒 言

強制対流と自然対流が共存している複合対流場での熱伝達の研究は, 平板上や円管内については数多くなされているが, 球のまわりについてはあまり行われていない. ニュートン流体の球のまわりの複合対流層流熱伝達に関しては, 北浦ら¹⁾, Acrivos²⁾ および Hieber ら³⁾ の理論的研究と, 弓削²¹⁾, 坪内ら¹⁰⁾, 伊藤ら¹⁰⁾, 井上ら⁹⁾ およびその他²⁰⁾ の実験的研究が挙げられるが, 非ニュートン流体に関してはみあたらない.

非ニュートン流体中の球の強制対流層流熱伝達に関しては, 直接球を扱ったものはないが, Acrivos ら⁴⁾ が境界層方程式を用いて指数法則模型流体のまわりの熱伝達について解析しており, Shah ら¹⁵⁾ が同様の手法で円柱についての解析結果を報告している. 円柱などについては, このほかにも研究されている^{6,12,13,18)}.

非ニュートン流体中の球の自然対流層流熱伝達に関しては, やはり Acrivos¹⁾ が境界層方程式を用いて指数法則模型流体の漸近解を求めている.

しかし, 通常非ニュートン流体の粘度度が大きい場合, 強制対流による熱伝達量が低下し, 相対的にみれば, 自然対流による熱伝達が無視できなくなることが多いと思われる**. そこで, 非ニュートン流体を取り扱う場合, 複合対流領域が問題になることが少なくないと考えられる.

* 〒812 福岡市東区箱崎

** たとえば, 自然対流の強制対流に対する相対的な寄与の大きさを表すパラメータと考えられる Gr/Re^2 の値をみてみる. $Gr/Re^2 = dg\beta\Delta t/v^2$ であるから, 速度が一定の場合は, 粘度が大きくなるにつれて Re 数が小さくなり, その結果 Δt が大きくなるので, Gr/Re^2 の値は大きくなる. ポンプ動力一定の場合も同じくこの値は大きくなる.

本研究では, 数種の高分子水溶液の非ニュートン流体中での球の伝熱実験を行い, これらの非ニュートン流体の流動特性が指数法則模型で表されたとした場合のモデルパラメータを用いて, Acrivos-Goddard³⁾ と同様の手法でニュートン流体の場合の複合対流熱伝達式を拡張した整理式でまとめた結果について報告する.

1. 実験装置, 実験方法および実験試料

実験装置および実験方法は, 前報²⁰⁾のニュートン流体のときと同様である. 実験に用いた流体は, 5.52%CMC, 2.61%MC, 0.74%SPA および 1.48%PEO 水溶液である. これらの高分子水溶液の流動曲線をワイセンベルグ・レオゴニオメータで測定した. その結果を Fig. 1 に示す. なお図中のせん断速度の範囲は, 球のせん断速度を $3v/d$ とみなしたときの実験範囲にほぼ相当している. Table 1 には, Fig. 1 の試料が次に示す指数法則模型に従うとした場合のパラメータ n と K の値の一例が示されている.

$$\tau = K\dot{\gamma}^n \quad (1)$$

2.61%MC と 5.52%CMC の指数 n は温度が変化してもあまり変わらなかったため, その平均値を用いたが, 0.74%SPA と 1.48%PEO のそれは温度による変化が大きかったため, 温度により異なった値を用いた. これは SPA および PEO の水溶液が大きな弾性効果を持つことに関連があるとも考えられるが, 詳細は不明である. なお, 高分子水溶液のもつこのような弾性効果は, ここでは考慮しなかった.

試料の密度はボーメの比重計を用いて測定した. また試料の体膨張係数 β は藤井ら⁷⁾によって推奨された次式によって計算した.

Fig. 1 Flow curves of test liquids

Table 1 Power-law model parameters				
Test liquid	Key	Temp. [°C]	n [—]	K [g/cm·sec ²⁻ⁿ]
2.61%MC	○	19.4	0.816	548
	○—	37.4	0.816	297
	○—	58.2	0.816	159
5.52%CMC	□	23.3	0.931	468
	□—	35.8	0.931	256
	□—	66.1	0.931	71.5
0.74%SPA	△	20.5	0.300	71.7
	△—	39.2	0.350	64.6
	△—	58.8	0.403	60.6
1.48%PEO	◇	17.6	0.629	37.9
	◇—	34.5	0.714	22.0
	◇—	53.4	0.810	12.8

$$\beta = (\rho_b - \rho_f) / \{\rho_f(t_f - t_b)\} \quad (2)$$

試料の熱伝導度および比熱は、宮入ら¹⁴⁾の結果により補正し、0.74%SPA水溶液の熱伝導度および比熱と、1.48%PEO水溶液の比熱は、高分子濃度が低いため補正を施さなかった。

2. 実験結果および考察

試料の物性値は温度による n の値の変化などを考慮して粘度 (K あるいは η) 以外はすべて境界温度 (球表面温度と主流温度との平均値) での値を採用した。なお、指数法則模型非ニュートン流体に対する粘度項の補正に関しては、垂直平板と水平円筒のまわりの自由対流熱伝達について赤木⁵⁾が解析しており、 $(K_b/K_s)^{2/(7n+2)}$ という形で与えている。したがって、球のまわりの熱伝達における粘度項の補正もほぼ同様な形で与えられるもの

Fig. 2 Relation between n and σ

と仮定した。ただし、粘度項の指数はニュートン流体 ($n=1$) のときに $1/4$ になり、かつ、 $2/(7n+2)$ に近似している簡単な形として、 $1/(3n+1)$ を用いた。

指数法則模型流体に対する球の強制対流熱伝達の問題は、レイノルズ数が大きい場合についての2次元境界層流れに関しては Acrivos⁴⁾によって解析されているが、今の場合のように流れが遅い場合には適用できない。しかし、高分子水溶液は一般にプラントル数が大きくなり、ペクレ数が大きいことが多い。したがって、Acrivos-Goddard³⁾の解析法の適用が考えられる。すなわち、半径 $d/2$ の球のまわりを接近速度 v で流体が流れている場合の軸対称2次元流れに対するエネルギー方程式を、無次元流れ関数 ψ を用いて無次元形で書き表すと次のようになる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{N_{Pe}} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \quad (3)$$

ただし、無次元形は、代表長さ $d/2$ 、代表速度 v および代表温度差 $(t_s - t_b)$ に対してのものであり、例外は、

$$N_{Pe} = d v \rho c_p / \lambda \quad (4)$$

である。

指数法則模型流体の遅い流れに対する流れ関数として、Wasserman-Slattery¹⁷⁾によって用いられた次式を採用する。

$$\psi = \frac{1}{2} (1 - r^\sigma)^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (5)$$

Eq. (5) の σ は変分原理から数値積分により n の関数として求められるべきものである。これを球表面 ($r=1$) 近傍で冪級数に展開すれば、

$$\psi = \frac{1}{2} [\sigma^2 y^2 + \sigma^2 (1 - \sigma) y^3 + O(y^4)] \sin^2 \theta \quad (6)$$

となる。ここで、 $y = r - 1$ である。

ここで、Acrivos-Goddard による摂動解と同様の方法

Fig. 3 Relation between the average Nusselt number and the Péclet number (2.61%MC)

Fig. 4 Relation between the average Nusselt number and the Péclet number (5.52%CMC)

を, Eq. (6) に対して適用すれば, 平均ヌセルト数は次式ようになる.

$$Nu_m/N_{Pe}^{1/3} = c_0 + c_1(N_{Pe})^{-1/3} + o(N_{Pe}^{-1/3}) \quad (7)$$

ただし,

$$c_0 = 0.866\sigma^{2/3} \quad (8)$$

$$c_1 = 0.553(3 - \sigma) \quad (9)$$

したがって,

$$Nu_m - 2 = 0.866\sigma^{2/3}N_{Pe}^{1/3} + 0.553(3 - \sigma) - 2 \quad (10)$$

となる. Eq. (10) における σ と n の関係は, 山中ら¹⁰⁾ が与えており, それを Fig. 2 に示す. この σ と n の関係を, 3 次式で表すと, 次式ようになる.

$$\sigma = -2.475n^3 + 6.738n^2 - 7.668n + 4.740 \quad (11)$$

Eq. (11) は最大 0.6% の誤差を含んでいる. なお, Eq. (10) による $Nu_m - 2$ の値はニュートン流体 ($n=1$) のとき, Acrivos-Goddard の結果とは少し異なり, N_{Pe} が $8 \sim 10^8$ の範囲では 2~4% の誤差を伴うが, 実験誤差内である. この結果, 指数法則模型流体に対する強制対流熱伝達式は, Eq. (10) に粘度項による補正を施して次式のようにになると考えられる.

$$Nu_m - 2$$

$$= (0.866\sigma^{2/3}N_{Pe}^{1/3} - 0.553\sigma - 0.341) \left(\frac{K_b}{K_s} \right)^{1/(3n+1)} \quad (12)$$

実測された $Nu_m - 2$ と N_{Pe} との関係を図示したのが,

Fig. 5 Relation between the average Nusselt number and the Péclet number (0.74%SPA)

Fig. 6 Relation between the average Nusselt number and the Péclet number (1.48%PEO)

Figs. 3~6 である. 図中の $N_{Gr}=0$ の曲線が, 各データの n の値に対する Eq. (12) を表している. なお, 0.74%SPA および 1.48%PEO 水溶液に対する粘度項は, n が温度によって変化するので, K のかわりにみかけ粘度 η を用いた. これらの図では, 球径が大きくなるほど曲線からのずれ, すなわち, Eq. (12) からのずれが大きくなっている. これは, 球径が大きい方が自然対流の効果が大きいので, その影響と考えられる. 図中の $N_{Gr}=0$ 以外の曲線については後述する.

他方, 指数法則模型流体に対する球の自然対流熱伝達に関しては, Acrivos¹⁾ により解析されており, 結果は次式によって与えられている.

$$Nu_m = CN_{Gr}^{1/2(n+1)}N_{Pr}^{n/(8n+1)} \quad (13)$$

ここで,

$$N_{Gr} = \rho^2 d^{n+2} [\beta g \Delta T]^2 / K^2 \quad (14)$$

$$N_{Pr} =$$

$$= (\rho c_p / \lambda) (K / \rho)^{2/(1+n)} d^{(1-n)/(1+n)} [d \beta g \Delta T]^{8(n-1)/2(1+n)} \quad (15)$$

Eq. (13) の C は n の関数であり, n が 0.1 から 1.0 に変化するにつれて 0.46 から 0.58 に変わる程度の弱い関数である. また, Eq. (13) は

$$N_{Gr}^{1/(n+1)} N_{Pr}^{2n/(3n+1)} > 36, \quad N_{Pr'} > 10 \quad (16)$$

なる条件のもとで成立する。今回の実験範囲内での $N_{Pr'}$ の値はすべて 10 より大きいが、 $N_{Gr}^{1/(n+1)} N_{Pr}^{2n/(3n+1)}$ の値は 0.5~60 の範囲にわたっていて、Eq. (16) を満足していないものもあるが、その場合にも拡張適用できるものと仮定する。さらに、ニュートン流体の場合に提出した式²⁰⁾との関連と粘度項の補正も考慮すれば、指数法則模型流体に対する自然対流熱伝達式として、Eq. (13) のかわりに次式のように与えられる。

$$Nu_m - 2 = 0.44 N_{Gr}^{1/2(n+1)} N_{Pr}^{n/(3n+1)} \left(\frac{K_b}{K_s} \right)^{1/(3n+1)} \quad (17)$$

ところで、強制対流と自然対流の複合対流に対する熱伝達量は、ニュートン流体の場合と同じように、各対流による寄与分の 1.5 乗の和の 2/3 乗に等しい²⁰⁾と考えると、非ニュートン流体（指数法則模型）の場合に対する熱伝達式は Eq. (12) と Eq. (17) より次式のように表される。

$$Nu_m - 2 = [(0.866 \sigma^{2/3} N_{Pe}^{1/3} - 0.553 \sigma - 0.341)^{3/2} + (0.44 N_{Gr}^{1/2(n+1)} N_{Pr}^{n/(3n+1)})^{3/2}]^{2/3} (K_b/K_s)^{1/(3n+1)} \quad (18)$$

Figs. 3, 4, 5 および 6 には各球径での平均的と考えられる $N_{Gr}^{1/(2n+2)} N_{Pr}^{n/(3n+1)}$ の値をパラメータとして、Eq. (18) を点綴した結果も示されている。Eq. (18) による計算値と実測値との偏差は、最大 67.7%，平均 29.3% である。

結 言

レイノルズ数が小さく、かつ、ペクレ数が 1,000 以下の範囲において、強制対流と自然対流の複合対流領域の平均ヌセルト数は、Eq. (18) で計算するとき、その最大偏差 67.7% で、平均偏差は 29.3% であり、工業上十分実用に供することができる。適用範囲は、 $1.0 < N_{Pe} < 10^3$, $1.6 \times 10^{-6} < N_{Gr} < 0.44$, $2.6 \times 10^4 < N_{Pr'} < 6.4 \times 10^5$, $0.24 < N_{Gr}^{1/(n+1)} N_{Pr}^{2n/(3n+1)} < 74$ である。

【付 記】 本研究に際し、適切な助言を戴きました九州大学工学部化学機械工学教室の広瀬勉氏および実験とデータ整理を手伝って戴きました幸豊喜氏に対し、ここに付記して謝意を表します。

Nomenclature

C	= coefficient in Eq. (13)	[—]
c_0, c_1	= coefficients in Eq. (7)	[—]
c_p	= heat capacity of test fluid	[cal/g·°C]
d	= diameter of sphere	[cm]
K, n	= parameters of power-law model	
N_{Gr}	= generalized Grashof number defined by Eq. (14)	[—]
Nu_m	= average Nusselt number, $h_m d / \lambda$	[—]

N_{Pe}	= Péclet number, $d v \rho c_p / \lambda$	[—]
$N_{Pr'}$	= generalized Prandtl number defined by Eq. (15)	[—]
r	= dimensionless radial distance in spherical co-ordinate	[—]
T	= dimensionless temperature, $(t - t_b) / (t_s - t_b)$	[—]
t	= temperature	[°C]
v	= velocity far away from sphere	[cm/sec]
y	= dimensionless distance normal to sphere, $r - 1$	[—]
β	= coefficient of thermal expansion	[°C ⁻¹]
$\dot{\gamma}$	= shear rate	[sec ⁻¹]
Δt	= $t_s - t_b$	[°C]
η	= apparent viscosity	[g/cm·sec]
θ	= angle in spherical co-ordinate	[—]
λ	= thermal conductivity	[cal/cm·sec·°C]
ρ	= density of test fluid	[g/cm ³]
σ	= parameter in Eq. (5)	[—]
τ	= deviation stress	[dyne/cm ²]
ψ	= dimensionless stream function	[—]
<Subscripts>		
b	= bulk fluid condition (t_b)	
f	= average film condition [$t_f = (t_b + t_s) / 2$]	
s	= average surface condition (t_s)	

Literature cited

- 1) Acrivos, A.: *AIChE J.*, **6**, 584 (1960)
- 2) Acrivos, A.: *Chem. Eng. Sci.*, **21**, 343 (1966)
- 3) Acrivos, A. and J. D. Goddard: *J. Fluid Mech.*, **23**, 273 (1965)
- 4) Acrivos, A., M. J. Shah and E. E. Petersen: *AIChE J.*, **6**, 312 (1960)
- 5) Akagi, S.: *Trans. J. S. M. E.*, **32** (238), 919 (1966)
- 6) Chen, J. L. S. and P. T. Radulovic: *Trans. ASME*, **C95**, 498 (1973)
- 7) Fujii, T., M. Takeuchi and H. Morioka: Preprints for 51st Lecture Meeting of Japan Soc. Mech. Engrs., No. 740-5, 49 (1974)
- 8) Hieber, C. A. and B. Gebhart: *J. Fluid Mech.*, **38**, 137 (1969)
- 9) Inoue, H. and T. Kato: *J. Chem. Eng. Japan*, **8**, 289 (1975)
- 10) Ito, R., Y. Hirata, Y. Inoue and T. Shinoda: Preprints of Hokuriku Meeting of The Soc. of Chem. Engrs., Japan, p. 46, Toyama (1974)
- 11) Kitaura, Y. and H. Tanaka: *Kagaku Kōgaku*, **27**, 567 (1963)
- 12) Lee, S. Y. and O. W. F. Ames: *AIChE J.*, **12**, 700 (1966)
- 13) Luikov, A. V., Z. P. Shulman and B. M. Berkovsky: Proc. 3rd Int. Heat Transfer Conf., Chicago, Illinois, Vol. I, 377 (1966)
- 14) Miyairi, Y. and N. Mitsuishi: *Kagaku Kogaku Ronbunshu*, **1**, 325 (1975)
- 15) Shah, M. J., E. E. Petersen and A. Acrivos: *AIChE J.*, **8**, 542 (1962)
- 16) Tsubouchi, T. and S. Sato: *Trans. J. S. M. E.*, **29** (207), 1809 (1963)
- 17) Wasserman, M. L. and J. C. Slattery: *AIChE J.*, **10**, 383 (1964)
- 18) Wolf, C. J. and A. A. Szewczyk: Proc. 3rd Int. Heat Transfer Conf., Chicago, Illinois, Vol. I, 388 (1966)
- 19) Yamanaka, A., T. Yuki and N. Mitsuishi: *Kagaku Kogaku Ronbunshu*, **2**, 222 (1976)
- 20) Yamanaka, A., T. Yuki and N. Mitsuishi: *J. Chem. Eng. Japan*, **9**, 445, (1976)
- 21) Yuge, T.: *Trans. ASME*, **C80**, 216 (1960)

(1976 年 9 月 13 日受理; 第 13 回日本伝熱シンポジウム(神戸, 1976 年 5 月)にて発表)

An Experimental Study on Combined Forced and Natural Convective Heat Transfer from Spheres to Power-Law Fluids

Akihiro Yamanaka and Nobuo Mitsuishi

Dept. of Nuclear Eng., Kyushu Univ., Fukuoka 812

Experiments have been carried out in the range of $1.0 < N_{Pe} < 10^3$, $1.6 \times 10^{-6} < N_{Gr} < 0.44$, $2.6 \times 10^4 < N_{Pr'} < 6.4 \times 10^5$ and $0.24 < N_{Gr}^{1/(n+1)} N_{Pr'}^{2n/(3n+1)} < 74$, where N_{Pe} is Péclet number, and N_{Gr} and $N_{Pr'}$ are generalized Grashof and Prandtl number for power-law fluids as defined by Acrivos, respectively. A sphere, 46.03 mm in diameter, composed of eleven copper segments, and two brass spheres (19.03 and 9.534 mm in diameter) have been used. Test liquids used are 2.61%MC (methylcellulose), 5.52%CMC, 0.74%SPA (sodium polyacrylate) and 1.48%PEO aqueous solutions. The experimental data are summarized by the following relation:

$$Nu_m - 2 = [(0.866\sigma^{2/3} N_{Pe}^{1/3} - 0.553\sigma - 0.341)^{3/2} + (0.44 N_{Gr}^{1/(2n+2)} N_{Pr'}^{n/(3n+1)})^{3/2}]^{2/3} (K_b/K_s)^{1/(3n+1)}$$

where

$$\sigma = -2.475n^3 + 6.738n^2 - 7.868n + 4.740$$

and K_b and K_s are the values of power-law model parameter K at the bulk liquid temperature t_b and the sphere surface temperature t_s , respectively. This equation has been shown to represent measured values of Nu_m within an average deviation of 29.3 per cent.

~~~~~