エネルギー積分法によるベナール対流の解析

井上 義朗・伊藤 龍象

大阪大学基礎工学部 化学工学科^{*}

エネルギー積分法を用いて層流のベナール対流を解析し、得られた計算値と今までの実験値を比較することによりその有効性を調べた。

攪乱の波数と温度の空間的分布とがレイリー数に依存することを考慮することにより、従来のエネルギー積分法を改良し、広いレイリー数域にわたって精度の良い解を得た。臨界レイリー数と臨界波数は 0.13% 以内で厳密解と一致した。レイリー数が臨界レイリー数より大きくなると、攪乱の波数や温度分布中のパラメータを決める付加的な条件が必要となる。本論文では、そのような条件として 5 種類の条件を取りあげ、計算結果と実験値との比較を行った。その結果、ヌッセルト数最大条件を用いた場合には、平均ヌッセルト数、平均温度分布、最大流速の各実験値とよく一致することが解った。しかし、波数に対しては、いずれの条件も満足な結果を与えなかった。

緒 言

下面を加熱された水平流体層内に生じるベナール対流については、Bénard¹⁾ や Rayleigh¹⁵⁾ 以来、多くの研究がなされ、臨界状態のレイリー数や波数については、線型安定性理論で充分説明できることが実験により確かめられている³⁾。しかし、レイリー数が臨界値よりも大きくなり、対流場の非線型性が無視できない領域では未解決の問題が多い⁴⁾。たとえば、層流域の平均ヌッセルト数とレイリー数やプラントル数との関係については多くの実験データが得られているが、これらを統一的に説明できる理論はまだみあたらない。遷移・乱流域の理論的研究はさらに遅れている²⁾。他方、実験面においても、得られた実測データの種類の極めて限られていた。ベナール対流の実験では、系に攪乱を与えるような測定器の挿入ができないことと、対流速度が極めて遅いことなどの理由により、大部分の実験は平均ヌッセルト数や波数の測定と対流パターンの観測に限定されていた。しかし、最近の光学的測定法の改良により、非接触で速度や温度分布の精度の良い測定値が得られるようになった^{4,9,13)}。これらの実測値をもとに、従来のいろいろな解析法を再検討する必要があると思われる。

非線型領域におけるベナール対流の解析法として有限差分による数値解析¹⁴⁾、摂動法による解析¹¹⁾、エネルギー積分法による解析¹²⁾などがあるが、最近は有限差分法と摂動法による解析が多い。一方、エネルギー積分法は臨界レイリー数の近傍以外では精度が落ちるため現在ではあまり用いられていない²⁰⁾。本論文では、このエネルギー積分法を改良し、パラメータを含んだ温度分布を用いることによって、層流の広いレイリー数の範囲にわた

って適用可能な解を得た。さらに、得られた計算結果と多くの実験者によって測定されてきた平均ヌッセルト数、温度分布、対流速度、波数を比較することにより解の有効性を調べた。また従来の理論的な解析ではあまり考慮されなかった波数の影響についても考察した。

1. 理論と計算結果

1・1 エネルギー積分式の導出

Nakagawa¹²⁾、Chandrasekhar³⁾、Roberts¹⁷⁾ らと同様の方法を用いて、対流による非線型項を含んだエネルギー積分式の導出を行う。

水平方向に無限に広がった深さ L の流体層を考える。鉛直上方に z 軸、水平方向に x と y 軸をとり、 $z=0$ と $z=L$ の界面は剛体壁であると仮定する。Boussinesq 近似を用いて、下面の温度が上面よりも ΔT だけ高い静止定常状態からの変位として表した速度 u_i^* 、温度 θ^* 、圧力 p^* の関係式は次式で与えられる。

$$\partial u_j^* / \partial x_j = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \right) u_i^* = - \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \theta^* \lambda_i + \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}} \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \right) \theta^* = Ra w^* + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_j^{*2}} \quad (3)$$

境界条件は

$$z^*=0, 1: u_i^* = \theta^* = 0 \quad (4)$$

各変数は長さ L 、時間 L^2/κ 、温度 $\kappa\nu/g\alpha L^3$ を代表量として無次元化されている。 λ_i は z 方向の単位ベクトルの成分、 α は熱膨脹係数、 $Pr \equiv \nu/\kappa$ はプラントル数、 $Ra \equiv g\alpha\Delta TL^3/\kappa\nu$ はレイリー数を表している。

水平方向に周期構造をもつ速度場を仮定する。温度と圧力を同じ周期変化を示す成分と、速度場との非線型相

^{*} 〒560 豊中市待兼山町 1-1

互作用によって生じる非周期成分との和として表すと

$$u_i^* \equiv u_i^{*'}, \theta^* \equiv \bar{\theta}^* + \theta^{*'}, p^* \equiv \bar{p}^* + p^{*'} \quad (5)$$

ただし、非周期成分には $\bar{}$ を、周期変化成分には $'$ をつけて区別した。これらを Eqs. (2), (3) に代入して一周期について体積積分平均を行うと、エネルギー積分式が得られる。

$$\frac{1}{2Pr} \frac{d}{dt} \langle u_i'^2 \rangle = \langle w'\theta' \rangle + \left\langle u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j'^2} \right\rangle \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \theta'^2 \rangle + \left\langle w'\theta' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right\rangle = Ra \langle w'\theta' \rangle + \left\langle \theta' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j'^2} \right\rangle \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + u_j' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} \quad (8)$$

上式において、無次元量を表す $*$ 印を省略し、体積積分平均を $\langle \rangle$ で表した。

周期的に変化する速度と温度の攪乱成分を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} \theta' &\equiv f(x, y) A(t) \Theta(z), \quad w' \equiv f(x, y) F(t) W(z) \\ u' &\equiv \frac{1}{a^2} \frac{\partial f}{\partial x} F \frac{dW}{dz}, \quad v' \equiv \frac{1}{a^2} \frac{\partial f}{\partial y} F \frac{dW}{dz} \end{aligned} \quad (9)$$

$F(t)$ と $A(t)$ は速度と温度の攪乱の振幅を表し、 $W(z)$ と $\Theta(z)$ は次の境界条件

$$z=0, 1: \quad W=dW/dz=\Theta=0 \quad (10)$$

を満足するこの関数である。 $f(x, y)$ は規格化された波数 a の周期関数で次の関係を満足する。

$$(\partial^2 f / \partial x^2) + (\partial^2 f / \partial y^2) = -a^2 f \quad (11)$$

$$f^2 = 1 \quad (12)$$

y 方向に軸をもつ2次元ロールセルの場合は

$$f(x) = \sqrt{2} \cos ax \quad (13)$$

となる。

定常状態を仮定して Eqs. (6)~(8) に Eq. (9) を代入し、Eqs. (10)~(12) の条件を用いると、攪乱の振幅 F と A についての関係式が得られる。

$$\langle W((d^2/dz^2) - a^2)W \rangle F - a^2 \langle W\Theta \rangle A = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} Ra \langle W\Theta \rangle F + \langle \Theta((d^2/dz^2) - a^2)\Theta \rangle A \\ = \langle W^2 \Theta^2 \rangle - \langle W\Theta \rangle^2 F^2 A \end{aligned} \quad (15)$$

平均温度分布 $\bar{\theta}(z)$ は

$$\bar{\theta}(z) = \left\{ \int_0^z W\Theta dz - z \langle W\Theta \rangle \right\} FA \quad (16)$$

平均ヌセルト数 $\bar{Nu}$ は

$$\bar{Nu} = 1 + \langle W\Theta \rangle FA / Ra \quad (17)$$

により計算される。

本解析では、速度と温度の攪乱の分布型 $W(z)$ と $\Theta(z)$ として $z=1/2$ の上下で対称な関数型を仮定し、

$$W(z) \equiv z^2(1-z)^2 \quad (18)$$

$$\Theta(z) \equiv z(1-z)\{1 + \lambda(2z-1)^2\} \quad (19)$$

を用いてすべての計算を行った。Eq. (19) 中の λ は、後に述べる条件によって決められるパラメータである。

1・2 $Ra = Ra_c$ の場合

静止状態が不安定化して対流モードが現れる臨界状態では、各攪乱の振幅は充分小さいと考えられ Eq. (15) の右辺は無視できる。この時 Eqs. (14), (15) が0でない解をもつ条件より次式が得られる。

$$\begin{aligned} Ra = & \left\langle \left(\frac{d^2 W}{dz^2} \right)^2 \right\rangle + 2a^2 \left\langle \frac{dW}{dz} \right\rangle^2 + a^4 W^2 \\ & \times \left\langle \left(\frac{d\Theta}{dz} \right)^2 + a^2 \Theta^2 \right\rangle / a^2 \langle W\Theta \rangle^2 \end{aligned} \quad (20)$$

右辺に Eqs. (18), (19) を代入し、与えられた波数 a に対して右辺が最小となるようにパラメータ λ を決めることによって、中立安定曲線を表す次式が得られる。

$$\begin{aligned} Ra = & 4(a^2 + 24 + 504/a^2)\{21(a^2 + 10) + 6\lambda(a^2 + 14) \\ & + \lambda^2(a^2 + 66)\}/(\lambda + 9)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

ただし

$$\lambda = -(a^2 + 28)/(a^2 + 92) \quad (22)$$

上式による計算結果は、 $1 \leq a \leq 8$ において1.3%以内の誤差で Reid ら¹⁰⁾の線型安定性理論による厳密解と一致する。臨界レイリー数と臨界波数の計算値は

$$Ra_c = 1708.87 \quad (1707.762) \quad (23)$$

$$a_c = 3.113 \quad (3.117) \quad (24)$$

となった。() 内に示した値は Reid らの厳密解である。

1・3 $Ra > Ra_c$ の場合

1・1 で示した理論は、Eqs. (14), (15) のように攪乱の振幅とレイリー数や波数との関係を与えるが、レイリー数による攪乱の分布型や波数の変化を規定する条件式がないため、臨界レイリー数以上では波数は一意的に決まらない。そのため従来のエネルギー積分法による解析では、攪乱の型や波数の値として線型安定性理論より得られる攪乱分布と臨界波数を用いて計算を行い、レイリー数によるこれらの変化を無視した。そのため平均ヌセルト数はレイリー数が大きくなると急激に実測値よりも小さくなる傾向があった^{12,20)}。レイリー数によらない一定の波数値を仮定する方法は他の解析法でもみられ、有限差分法による数値解析ではロールの幅が深さに等しい正方形断面にロールセル ($a=\pi$) を仮定することが多い¹⁴⁾。

本解析では、レイリー数による攪乱温度分布の変化を考慮するために Eq. (19) の $\Theta(z)$ 中にパラメータ λ を導入し、波数 a とパラメータ λ はともにレイリー数によって変化すると仮定した。 a や λ を決める条件式が新たに必要となるが、次の3種類の条件を用いてそれぞれの場合について計算を行った。

- ヌセルト数 Nu を最大にする条件
- 速度の攪乱の振幅 F を最大にする条件
- 温度の攪乱の振幅 A を最大にする条件

Table 1 Computed values of wave number, mean Nusselt number and amplitude of disturbances

Ra	a	χ	$\bar{Nu}$	F	A
Nu max. condition					
2000	3.11	-0.260	1.214	56.05	1100
2500	3.11	-0.068	1.476	93.47	1795
3000	3.13	0.127	1.662	121.2	2263
5000	3.24	0.934	2.107	205.6	3415
7000	3.38	1.76	2.383	276.9	4094
10000	3.53	2.94	2.692	372.3	4796
20000	3.72	5.55	3.327	628.4	6414
50000	3.82	8.12	3.962	1129	9650
F max. condition					
2000	3.27	-0.264	1.209	56.74	1063
3000	3.60	0.128	1.632	125.5	2086
5000	3.91	0.961	2.061	215.0	3119
7000	4.05	1.79	2.337	287.9	3796
10000	4.18	2.94	2.649	384.3	4527
20000	4.37	5.54	3.289	644.3	6158
A max. condition					
2000	2.92	-0.357	1.204	53.01	1124
3000	2.26	-0.321	1.515	87.59	2563
5000	1.60	-0.304	1.645	95.85	4873
7000	1.30	-0.297	1.679	96.83	7108
10000	1.06	-0.293	1.672	95.91	10435
20000	0.731	-0.288	1.719	96.72	21488

Fig. 1 Correlation of Nusselt number

各場合についての計算結果を Table 1 に示した。Nu 最大条件と F 最大条件を用いた場合はよく似ているが、A 最大条件を用いた場合は他と異なる傾向を示している。次にこれらの計算結果と従来の実験結果を比較しながら各条件の有効性を調べる。

2. 考 察

2・1 平均ヌセルト数

Nu 最大条件と A 最大条件を用いた場合の平均ヌセルト数の計算結果を Fig. 1 に示した。F 最大条件を用いた場合は、Nu 最大条件の結果とあまり変わらず約 2% 低い値を示すだけである。図中の丸印は Silveston¹⁹⁾ の実験値で、●印は比較的高いプラントル数のデータ ($Pr = 35 \sim 3700$) を表し、○印は比較的低いプラントル数のデータ ($Pr = 3.6 \sim 6.6$) を表している。これらの実験データは、平均ヌセルト数がレイリー数の他にプラントル数にも依存し、プラントル数とともに大きくなるこ

Fig. 2 Effect of Rayleigh number on mean temperature distribution

とを示している。このような傾向は他の実験結果においてもみられる¹⁸⁾。実線で示した Nu 最大条件による計算値は、層流域の実験値の上限を示すのに対し、A 最大条件による計算値は破線で示したようにまったく実験値と合わないことがわかる。

2・2 平均温度分布

Fig. 2 は Nu 最大条件を用いて計算した流体層内の平均温度分布である。壁面の近傍における温度勾配は、レイリー数とともに単調に大きくなるが、層の中央 ($z = 0.5$) では $Ra \approx 4100$ で温度勾配が 0 となり、 $4100 < Ra < 13000$ ではわずかに温度勾配が逆転して安定な密度成層部分が現れるが、 $Ra \approx 13000$ で再び温度勾配は 0 となる。 $Ra > 13000$ では、中央部をはさんで上下に安定な密度成層部分が現れ、層の中央部と上下界面近傍に不安定な密度成層が形成される。

温度分布の実測値として、マッハツェンダー干渉計による Farhadieh ら⁶⁾ のデータがある。Fig. 3 に $Ra \approx 5000$ における彼らの測定結果を示した。図中の曲線は、ほぼ同じレイリー数に対応する Nu 最大条件を用いた場合の計算結果で、実測値とよく一致しているのがわかる。また Farhadieh らの実験データでは $3860 < Ra < 4610$ において流体層の中央部の温度勾配が 0 になっており、本計算結果とよく合っている。しかし、 $Ra > 13000$ の温度分布については、測定値が少く比較できなかった。

2・3 最大流速

上昇または下降流の最大流速 w_{max} は $z = 0.5$ の流体層の中央で起こり、Eq. (13) の 2 次元ロールセル状対流の場合には次式で計算される。

$$w_{max} = \sqrt{2} F / 16 \quad (25)$$

Fig. 4 中の実線は、Nu 最大条件と F 最大条件による計算結果を示している。Nu 最大条件による値は、F 最大条件による値よりも 3~4% 低い値を示す。図中の丸印は Oertel, Kirchartz¹⁸⁾ のレーザードップラー流速計による実験値である。F 最大条件による計算値はこれ

Fig. 3 Comparison of the experimental mean temperature distributions with the simulated one. The solid curve was calculated with $\bar{Nu}$ max. condition

Fig. 4 Correlation of maximum velocity. The solid curves show the results of analyses with $\bar{Nu}$ max. and F max. conditions

Fig. 5 Wave number predicted with various conditions

らの上限を示している。図中の破線は Dubois ら⁹⁾の実験式より計算した値で、第1モードと第2モードの最大流速の和である。 Nu 最大条件による本計算値は、測定誤差の範囲内でこれらの実験値とよく一致しているが、これについては次節でさらに詳しく検討する。

2.4 波数

Nu 最大、 F 最大および A 最大の各条件を用いて計算した波数を Fig. 5 に示した。 Nu 最大と F 最大の条件を用いた場合は、レイリー数の増加とともに波数も増加するが、 A 最大条件の場合は逆に減少している。

波数の実測は多くの実験者により行われているが、Fig. 5 には Willis ら ($Pr=0.71, 6.7, 450$)²¹⁾ と Krishnamurti ($Pr=6.7, 100, 8500$)¹⁰⁾ および著者ら ($Pr=940$)⁷⁾ のデータのみを示した。実験者ごとに波数は大きくばらついているが、いずれもレイリー数の増加とともに波数は減少し、同一のレイリー数に対してはプラントル数が小さくなると波数も小さくなる傾向がある。他の実験データにおいてもまったく同じ傾向がみられる^{5,8,18,19)}。3種類の条件の中で Nu 最大条件による計算値は、平均ヌッセルト数、平均温度分布、最大流速の各実測値とよく一致を示したが、波数については実測値と合わないことがわかる。Fig. 5 においてすべての実測波数は、 Nu 最大条件と A 最大条件より計算された2本の曲線の間に存在し、先に仮定した三つの条件はいずれも波数やパラメータを決める正しい条件となっていないことがわかる。

Fig. 6 はレイリー数を一定にして波数を変えた場合の平均ヌッセルト数の変化を示したものである。ただしパラメータ N は平均ヌッセルト数が最大となるように決められた。各レイリー数に対する曲線の頂点を結んだ破線は、 Nu 最大条件による平均ヌッセルト数と波数の関係を表している。実測波数は、レイリー数が増加するほ

ど、またプラントル数が小さいほど破線より左にずれるため、平均ヌッセルト数もそれに応じて急激に減少する。したがってレイリー数が大きくなると、 Nu 最大条件による平均ヌッセルト数の計算値は実測値よりも大きくなり、プラントル数が小さくなるほどこの傾向が強くなると予想されるが、これは Fig. 1 の傾向とよく合っている。このことから、実測された波数を用いて計算を行えば、平均ヌッセルト数は実測値とさらによく一致することが予想される。

Fig. 7(a) の○印は $Pr=3.6\sim 6.6$ の Silveston の実測平均ヌッセルト数を表し、実線は波数として $Pr=6.7$ の Willis らの実測値を用いパラメータ N についてのみ Nu 最大条件を適用して計算した平均ヌッセルト数を表している。Fig. 1 の Nu 最大条件を用いた場合と比較して実験値との一致が良くなっているのがわかる。Fig. 7(b) はプラントル数が高い場合で、実線は $Pr=450$ の Willis らの実測波数を用いた計算結果を表し、●印は $Pr=940$ の著者らの実測した波数を用いた計算結果を表している。○印は $Pr=35\sim 3700$ の Silveston の実測値である。この場合も計算値と実験値との一致が良くなっている。Fig. 3 の平均温度分布についても同様にして、Farhadieh らの実測波数を用いて計算したが、先に示した Nu 最大条件による計算結果との差はほとんどみられなかった。

最大流速の計算に実測波数を用い、パラメータ N についてのみ Nu 最大条件を適用した場合の結果を Fig. 8 に示した。実測波数として Willis らと著者らのデータを用いた。平均ヌッセルト数の場合と異なり、波数測定実験による実測波数を用いることにより、かえって最大流速の実験値との一致は悪くなるように見える。これは Kirchartz や Dubois らの実験で用いられた測定容器の横幅が深さの10倍で、ロールセルがちょうど10個並ぶ

Fig. 6 Relationship between mean Nusselt number and wave number

(a)

(b)

Fig. 7 Mean Nusselt number calculated with the wave number experimentally determined by Willis *et al.* ($Pr=6.7$) for (a), and Willis *et al.* ($Pr=450$) and authors ($Pr=940$) for (b)

Fig. 8 Maximum orbital velocities with the wave number by Willis *et al.* and ones by authors. The solid curve shows the results of calculation with Nu max. condition

大きさは小さく、そのため深さに比べて充分広い流体層容器を用いて行われた波数測定実験で観測されるようなレイリー数の増加による波数の減少が起こらず、波数は一定のままほとんど変化しなかったためであると考えられる。実際、波数を正方形ロールセルの値($a=\pi$)に固定し、 λ についてのみ Nu 最大条件を適用した場合の計算結果は、Fig. 8 の Nu 最大条件による計算値より数%低い値を示すが実測値とよく一致する。また速度擾乱の振幅 F と波数について Fig. 6 と同様の図を描くと、平均ヌセルト数の場合と同じような曲線群が得られるが、全体的にピークが鋭くなり波数のわずかな変化によって F の値が変化しやすく、最大流速は波数値の変化に敏感であることがわかる。特に波数が小さくなるにつれてこの傾向は強くなる。このため Kirchartz や Dubois らの流速測定実験の波数よりも小さい値の、波数測定実験による波数値を仮定して計算した結果が、Fig. 8 のように実測の最大流速値と大きく異なる値になったものと思われる。

2.5 エントロピー生成速度

波数の計算値と実測値の比較より、 Nu 最大条件、 F 最大条件、 A 最大条件はいずれも正しい波数決定条件とみなせないことがわかった。そこで次にエントロピー生成速度に関する諸量を計算し、波数を決める条件との関

連について考察を行う。

エントロピー生成速度 ϕ_s は次式で表される。

$$\phi_s = (\mu/T) \Phi_v + (k/T^2) \cdot (\partial T / \partial x_j)^2 \quad (26)$$

ただし $\mu \Phi_v$ は粘性消散項 $-\tau : \nabla \mathbf{v}$ である。両辺を無次元化して体積積分平均を行い、Eqs. (9), (14) を用いると次式が得られる。

$$\langle \phi_s^* \rangle = \left\{ \frac{\kappa \nu}{c_p L^2 T} + \frac{1}{Ra} \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\} \langle W \Theta \rangle FA \quad (27)$$

ここで T は絶対温度で表された系の代表平均温度、 ΔT は上下界面の温度差である。上式の導出において $\Delta T/T$ の3次以上の微小項を無視した。通常の実験条件では右辺の第1項は第2項に比べて無視できる。こうして Eq. (27) は Eq. (17) を用いて

$$\langle \phi_s^* \rangle = (\bar{Nu} - 1) (\Delta T/T)^2 \quad (28)$$

と近似できる。同じ物性値の流体を用いた場合、レイリー数一定は ΔT 一定に対応するから、Eq. (28) よりレイリー数が一定の条件下でエントロピー生成速度を最大にする条件は Nu 最大条件に相当することがわかる。したがってエントロピー生成速度を最大にする条件では、実測波数の変化を説明できないことがわかる。

$Ra > Ra_c$ のベナール対流系は、熱平衡状態から大きくはずれた系である。Glansdorff と Prigogine⁹⁾ は、線型の非平衡熱力学が適用できないような平衡状態から充分離れた定常状態系の熱力学的、流体力学的安定性を表す量として“一般化された過剰エントロピー生成速度” $P[\delta Z']$ を導入した。この量は基準状態からのゆらぎに対する系のリャプノフ関数になっており、この量が正の値をとるとき系はゆらぎに対して安定で、負ならば不安定であることを表している。ベナール対流系における一般化された過剰エントロピー生成速度は

$$P[\delta Z'] = \int \left[\frac{k}{T^+} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 - \left(\frac{\rho c_p \Delta T}{LT^+} + \rho g \alpha \right) w' \theta' \right] dV \quad (29)$$

ここで T^+ は温度の次元を有するパラメータで、Glansdorff らによれば

$$T^* \equiv c_p \Delta T / g \alpha L \quad (30)$$

である。Eq. (29) を無次元化して Eq. (30) を代入すると

$$P[\delta Z']^* = -\frac{1}{Ra} \left\langle \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial x_j^*} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \right)^2 \right\rangle - 2 \langle w^* \theta^* \rangle \quad (31)$$

右辺の第1項は、ゆらぎ温度の熱伝導過程によって生成されるエントロピーを表し、第2項はゆらぎ速度による粘性消散、第3項はゆらぎ速度によるエントロピーの輸送と浮力のゆらぎによって解放されるポテンシャルエネルギーに關係した項である。右辺に Eq. (9) を代入して整理すると

$$P[\delta Z']^* = -\frac{1}{Ra} \left\langle \theta \left(\frac{d^2}{dz^2} - a^2 \right) \theta \right\rangle A^2 + \frac{1}{a^2} \left\langle W \left(\frac{d^2}{dz^2} - a^2 \right)^2 W \right\rangle F^2 - 2 \langle W \theta \rangle F A \quad (32)$$

Eqs. (14), (15) を用いると

$$P[\delta Z']^* = -\langle W^2 \theta^2 \rangle - \langle W \theta \rangle^2 F^2 A^2 / Ra \quad (33)$$

が得られる。 $\langle W^2 \theta^2 \rangle - \langle W \theta \rangle^2 > 0$ であるから、 $F, A \neq 0$ であれば $P[\delta Z']^* < 0$ となり、対流が存在する時、すなわち Eqs. (14), (15) を満たす0でない F, A が存在すれば、一般化された過剰エントロピー生成速度は必ず負の値となることがわかる。Glansdorff らの理論は、この性質を利用して $P[\delta Z']$ の符号により系の安定性を調べようとするものである。Eq. (33) の $P[\delta Z']^*$ を最小化するように波数とパラメータ λ を決めた場合の波数の計算値を示したものが Fig. 5 の曲線 (d) である。Nu 最大条件による曲線 (a) とよく似た傾向を示し、レイリー数の増加とともに波数は増大する。したがって一般化された過剰エントロピー生成速度最小の条件も実測波数の変化を表すことができないことがわかる。

結 言

ベナール対流問題に対してエネルギー積分法を適用して解析を行った。攪乱の形や波数がレイリー数によって変化することを考慮して、温度の攪乱を表す分布式中にパラメータ λ を導入し、波数と λ を変化させることにより、層流の広いレイリー数領域にわたって従来のエネルギー積分法よりも精度の高い解を得た。

この解析により得られた臨界レイリー数と臨界波数は0.13% 以内で、また中立安定曲線は1.3% 以内でそれぞれ線型安定性理論による厳密解と一致した。

レイリー数が臨界値よりも大きい場合には、波数と λ を決める条件が別に必要となるが、次の5種類の条件を仮定して、それぞれの場合について計算を行った：ヌッセルト数 Nu 最大条件、攪乱速度の振幅 F 最大条件、攪乱温度の振幅 A 最大条件、エントロピー生成速度最大条件、一般化された過剰エントロピー生成速度最小条件。これらの条件を用いた計算結果と実験値を比較した結

果、以下のことがわかった。

1) 波数 a と温度分布中のパラメータ λ の決定に対して Nu 最大条件を適用した計算結果は、実測の平均ヌッセルト数の上限値を与える。

2) a と λ の決定に対して F 最大条件を適用した結果は、最大流速の実測値の上限を与える。

3) 前述の五つの条件の中では、Nu 最大条件を用いて a と λ を決めた場合に、平均ヌッセルト数、平均温度分布、最大流速の実験値とよく一致する解が得られる。しかし、波数はいずれの条件を用いても実測値とまったく異なる結果が得られた。

4) a は実測値を用い、 λ の決定に対してのみ Nu 最大条件を適用した場合には、実測値と最もよく一致する解が得られる。 a の実測値が未知の場合は、線型安定性理論における臨界波数 $a = 3.117$ または正方形ロールセルの $a = \pi$ を用い、 λ の決定に対してのみ Nu 最大条件を適用すれば比較的よい解が得られる。

5) 平均ヌッセルト数の値は波数の影響をあまり受けないが、最大流速の値は波数の値によって大きく変化する。したがって最大流速値の推算にはできるだけ正確な波数値を用いる必要がある。

6) 本解析法では波数を正しく推算することはできなかった。特に前述の五つの条件式のいずれにもプラントル数が含まれていないため、実測波数データにみられるような波数のプラントル数への依存性を説明することはできなかったが、今後これらの点も考慮して波数の決定条件を探さなければならないと思われる。

7) 粘性消散による発熱が小さい場合、Nu 最大条件はエントロピー生成速度最大条件に対応する。

[謝 辞] 本研究の実験に際してご協力いただいた佐伯周治、廣田 正、八幡達人君に感謝いたします。

Nomenclature

a	= wave number	[1/m]
A	= amplitude of temperature disturbance	[—]
c_p	= specific heat	[J/kg·K]
F	= amplitude of velocity disturbance	[—]
f	= function defined by Eqs. (11), (12)	[—]
g	= gravitational acceleration	[m/s ²]
k	= thermal conductivity	[W/m·K]
L	= depth of fluid layer	[m]
Nu	= Nusselt number	[—]
$\bar{Nu}$	= mean Nusselt number	[—]
Pr	= Prandtl number	[—]
$P[\delta Z']$	= generalized excess entropy production rate	[W]
p	= pressure	[Pa]
Ra	= Rayleigh number	[—]
T	= mean temperature	[K]

T^+	= characteristic temperature defined by Eq. (30)	[K]
ΔT	= temperature difference between upper and lower plates	[K]
t	= time	[s]
u	= x-component of velocity	[m/s]
u_i	= i-component of velocity	[m/s]
v	= y-component of velocity	[m/s]
$\mathbf{v}$	= velocity vector	[m/s]
w	= z-component of velocity	[m/s]
$w_{\max}$	= maximum velocity in z-direction	[m/s]
W	= function defined by Eqs. (9), (18)	[—]
x	= lateral coordinate	[m]
y	= lateral coordinate	[m]
z	= vertical coordinate	[m]
α	= thermal expansion coefficient	[1/K]
θ	= temperature disturbance	[K]
Θ	= function defined by Eqs. (9), (19)	[—]
κ	= thermal diffusivity	[m ² /s]
λ_i	= component of unit vector in z-direction	[—]
μ	= viscosity	[kg/m·s]
ν	= kinematic viscosity	[m ² /s]
ρ	= density	[kg/m ³]
τ	= shear stress tensor	[kg/m·s ²]
ϕ_s	= entropy production rate	[W/m ³ ·K]
Φ_v	= viscous dissipation function	[1/s ²]
χ	= parameter	[—]
∇	= vector differential operator	[1/m]
<Subscripts>		
c	= critical	
i	= i-component of coordinate	
j	= j-component of coordinate	
<Superscripts>		
*	= dimensionless	
'	= periodic component	

— = averaged over the horizontal plane
< > = averaged over the unit cell

Literature cited

- 1) Bénard, H.: *Rev. Gen. Sci. Pure Appl.*, **11**, 1261, 1309 (1900)
- 2) Busse, F. H.: "Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence", p. 97, Springer-Verlag, Berlin (1981)
- 3) Chandrasekhar, S.: "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Clarendon Press, Oxford (1961)
- 4) Dubois, M. and P. Berge: *J. Fluid Mech.*, **85**, 641 (1978)
- 5) Farhadieh, R. and R. S. Tankin: *J. Fluid Mech.*, **66**, 739 (1974)
- 6) Glansdorff, P. and I. Prigogine: "Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations", Wiley-Interscience, London (1971)
- 7) Ito, R., Y. Inoue and S. Saeki: Preprints of the 46th Annual Meeting of The Soc. of Chem. Engrs., Japan, Nagoya, p. 636 (1980)
- 8) Koschmieder, E. L.: *Advance in Chem. Physics*, **26**, 177 (1974)
- 9) Koschmieder, E. L.: "Order and Fluctuations in Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics", p. 159, Wiley-Interscience (1981)
- 10) Krishnamurti, R.: *J. Fluid Mech.*, **42**, 295 (1970)
- 11) Malkus, W. V. R. and G. Veronis: *J. Fluid Mech.*, **4**, 225 (1958)
- 12) Nakagawa, Y.: *Physics of Fluids*, **3**, 82 (1960)
- 13) Oertel Jr. H.: "Natural Convection in Enclosures", HTD Vol. 8, p. 11, ASME New York (1980)
- 14) Ozoe, H. and S. W. Churchill: *AIChE J.*, **18**, 1196 (1972)
- 15) Rayleigh, L.: *Phil. Mag.*, **32**, 529 (1916)
- 16) Reid, W. H. and D. L. Harris: *Physics of Fluids*, **1**, 102 (1958)
- 17) Roberts, P. H.: "Non-equilibrium Thermodynamics, Variational Techniques and Stability", p. 125, the Univ. of Chicago Press, Chicago (1966)
- 18) Rossby, H. T.: *J. Fluid Mech.*, **36**, 309 (1969)
- 19) Silveston, P. L.: *Forsch. Ing. Wes.*, **24**, 29, 59 (1958)
- 20) Silveston, P. L.: *Physics of Fluids*, **6**, 313 (1963)
- 21) Willis, G. E., J. W. Deardorff and R. C. J. Sonnerille: *J. Fluid Mech.*, **54**, 351 (1972)

(1982年6月4日受理)

Analysis of Bénard Convection by Energy Integral Method

Yoshiro Inoue and Ryuzo Ito

Dept. of Chem. Eng., Osaka Univ., Toyonaka 560

The laminar Bénard convection system was analyzed by the energy integral method and the applicability of this method was examined by comparing predicted results with the experimental results reported previously.

Taking account of the fact that wave numbers and spatical distributions of temperature disturbances depend on Rayleigh number, the energy integral method was improved and fairly good solutions were obtained over a wide range of Rayleigh number. The critical Rayleigh number and the critical wave number predicted by this method agree within less than 0.13% error with the exact solutions. In the range of supercritical Rayleigh number, the additional condition is required to restrict wave number and the parameter included in the expression of temperature distribution. In this paper, five kinds of such condition are treated, and the predicted results for each condition are compared with the experimental results. As a result, the values for the condition of maximum Nusselt number show good agreement with the experimental results for mean Nusselt number, mean temperature distribution and maximum velocity. For the wave number, however, none of the five conditions gives satisfactory results.