多角形の切斷面を有する梁の撓みに就て (等角寫像を用ひて解く)

(昭和 9 年 11 月 10 日 應用力学講演會に於て講演)

正員 津村 利 光⁽¹⁾

The Bending of a Beam by Terminal Transverse Load, which Cross-Section is bounded by a Polygon, using a Method of Conformal Representation.

By Toshimitsu TSUMURA, Member

1. 緒 言

切斷面一様の眞直片持梁の一端に、荷重が加はる際に生ずる内力を、計算するに必要な撓み函数 (χ) を求める一般式は既に解れてゐる。⁽²⁾ 只多角形で圍まれた切斷面の梁に應用して χ を求める場合は比較的困難を伴ふためか餘り多く解かれてないやうである。著者の知る範圍では切斷面が矩形⁽³⁾、第1圖で $\tan^2 \alpha = \sigma/(1+\sigma)$ の場合⁽⁴⁾、及び直角二等邊三角形⁽⁵⁾ の場合のみである。但し σ はポアッソンの比で $1/2$ より小さい。仍つて著者は上記表題の問題を等角寫像を用ひて解く方法を考へ、その1例題として正三角形の切斷面の梁に應用した。尙この際生ずる内力を2種類とし、第1を垂直内力として第2を剪斷内力とする。前者は容易に得られるから茲には特にその解法を求めず、只後者の剪斷内力についてのみ記す。

第 1 圖 既に解かれてゐる切斷面の形 (x 軸の方向が荷重の方向である)

第 2 圖 片持梁の圖

2. 一般解法

第2圖の如く、切斷面一様の眞直片持梁の一端に、荷重 W が x 軸の正の方向に加はり、 z 軸は固定端より斷面重心通り荷重の點に向ひ、 x, y 軸は梁の切斷面慣性モーメントの兩主軸とし且原點は切斷面の重心を通るとする。而してこの場合には X_m, X_y, Y_y が消えて Z_m, X_s, Y_s のみが残る Z_s は次の式で求められる。

$$Z_s = -W(l-z)x/I \dots\dots\dots (1)$$

但し I は y 軸についての慣性モーメントで $I = \int \int x^2 dx dy$ である。 X_s 及び Y_s を求めるには χ なる函数を使用しこれより適當の處理によつて兩内力が得られる。その條件として

$$\partial^2 \chi / \partial x^2 + \partial^2 \chi / \partial y^2 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} \partial \chi / \partial \nu = & -\left\{ \frac{1}{2} \sigma x^2 \right. \\ & + (1 - \frac{1}{2} \sigma) y^2 \} \cos(x, \nu) \\ & - (2 + \sigma) xy \cos(y, \nu) \dots\dots (3) \end{aligned}$$

の2式を満足せねばならぬ。但し ν は切斷面周の外向き垂直線である。換言すれば χ は平面調和函数で且切斷面の周で (3) の條件を満足すればよい。茲に $x+iy$ の函数をとればその實部又は虚部は常に (2) を満足するからかかる實部又は虚部を χ とおけば χ は (3) のみを満足すればよい事になる。仍つて

$$\omega + i\chi = f(x+iy)$$

$$\left. \begin{aligned} p+iq &= df/d(x+iy), \quad p = \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad q = -\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ s+it &= d^2 f/d(x+iy)^2, \quad s = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad t = -\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \\ u+iv &= d^3 f/d(x+iy)^3, \quad u = \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

とおく。且境の條件式 (3) を p, q で置換へ且この式を更に多角形の周に沿つて微分すると

$$\left. \begin{aligned} q \sin \epsilon - p \cos \epsilon &= -\left\{ \frac{1}{2} \sigma x^2 + (1 - \frac{1}{2} \sigma) y^2 \right\} \sin \epsilon + (2 + \sigma) xy \cos \epsilon \\ t \sin 2\epsilon - s \cos 2\epsilon &= x \sin 2\epsilon + y (4 \cos^2 \epsilon - 2 + \sigma) \\ v \sin 3\epsilon - u \cos 3\epsilon &= \sin \epsilon \{ (4 + \sigma) \cos^2 \epsilon - (2 - \sigma) \sin^2 \epsilon \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

となり (5) は總て切斷面周の多角形邊上で成立する。 ϵ とは多角形の或る邊が軸の正の方向となす角である。而して (5) の第3式は $u+iv$ 面で直線の方程式を表はし、原點よりこ

(1) 東京府立化学工業学校嘱託 (2) Love, Elasticity, 版 4, 頁 329 以下 (3) 同上 頁 337. (4) S. Timoschenko, London Math. Soc. Proc. (Ser. 2), Vol. 20, 1922, p. 398. (5) 竹田 勇 本誌 昭和 8 年 12 月 頁 848.

の直線に下した垂線と u 軸の負の方向とのなす角を 3ε とす。以上によつて $x+iy$ 面の第 v 邊に対する境の條件は $u+iv$ 面では直線をなす。故に $u+iv$ を Schwarz の式で表はしこれを積分する事によつて $s+it$, $p+iq$ を求めるのである。而して $u+iv$ 面の多角形の内角 β_v は次式で表はされる。

$$\beta_v = (m_v - 3k_v)\pi \quad \dots\dots\dots (6)$$

但し m_v は整数にして k_v は $x+iy$ 面の多角形の内角を π で割つた商で 0 と 2 との間にある。而して $x+iy$ 面の多角形即ち切斷面を Schwarz の式によつて z 上半面に寫像し、 $u+iv$ 面の多角形をも z 上半面に寫像し、且兩面の頂點に對應する點が z 實軸上で相一致するやうにする。このために次式を用ふ。

$$\left. \begin{aligned} x+iy &= c \int \frac{d\zeta}{\Pi(\zeta-\zeta_v)^{1-k_v}} \\ u+iv &= \gamma \int \frac{R(\zeta)d\zeta}{\Pi(\zeta-\zeta_v)^{3k_v}} \\ R(\zeta) &= a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 \\ &\quad + \dots\dots\dots + a_{3n-8}\zeta^{3n-8} \\ |\gamma| &= |a_0, a_1, \dots\dots a_{3n-8}| \text{ 實數} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

但し n は多角形の邊數とす。上式中第 1 式は既知の式であるから證明を要しないが、他の 2 式は證明を要し且未だ證明せられてないけれども簡単のために結果を先きに書いておく。これを證明する事次の如くである。 $u+iv$ 面では境の條件が直線で表はされ且その内角は (6) によつて $\beta_v = (m_v - 3k_v)\pi$ である。仍つて一般には Schwarz の公式によつて

$$u+iv = c' \int \Pi(\zeta-\zeta_v)^{m_v-1-3k_v} d\zeta \quad \text{とすべきであるが、これでは } u+iv \text{ 面の頂點に對立する } \zeta_v' \text{ と } x+iy \text{ 面の頂點に對應する } \zeta_v \text{ とは一致さず事は一般に出来ない。仍つて } R_1(\zeta) \text{ なる項を乗じてこれによつて所期の目的を達しようとする。但し } R_1(\zeta)=0 \text{ の根は共軛根とす。}$$

擬て $x+iy = z \quad \dots\dots\dots (8)$
 において剪斷力を加へた際のエネルギーを考へるとこれは有限でなければならぬとの事を利用して次のやうに進める。

(7) の第 1 式によつて

$$z - z_v = a_1(\zeta - \zeta_v)^{k_v} + a_2(\zeta - \zeta_v)^{k_v+1} + \dots\dots\dots$$

∴ $\zeta - \zeta_v = b_1(z - z_v)^{1/k_v} + b_2(z - z_v)^{1/k_v+1} + \dots\dots\dots$
 の展開式が成立する。但し a, b は常數とする。これを $u+iv$ の式に代入して ζ_v の近くに展開すると

$$\begin{aligned} u+iv - (u+iv)_v &= \int R_1(\zeta) \Pi(\zeta-\zeta_v)^{m_v-1-3k_v} d\zeta \\ &= c_1(\zeta-\zeta_v)^{m_v-3k_v} + c_2(\zeta-\zeta_v)^{m_v-3k_v+1} + \dots\dots \\ &= d_1(z-z_v)^{m_v/k_v-3} + d_2(z-z_v)^{m_v/k_v-2} + \dots\dots \end{aligned}$$

となる。但し $c_1, c_2, \dots, d_1, d_2, \dots$ は常數とする。何となれば ζ_v の充分近くでは $R_1(\zeta)$ 常數とみてよいからである。尚 $p+iq$ は $u+iv$ を 2 回積分して求められるのであるから

$$\begin{aligned} p+iq - (p+iq)_v &= \iint (u+iv) dz dz \\ &= e_1(z-z_v)^{m_v/k_v-1} + e_2(z-z_v)^{m_v/k_v} + \dots\dots \end{aligned}$$

而して

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= \mu\tau \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) - \frac{W}{2(1+\sigma)I} \left\{ q + \frac{1}{2}\sigma x^2 + (1-\frac{1}{2}\sigma)y^2 \right\} \\ Y_2 &= \mu\tau \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) - \frac{W}{2(1+\sigma)I} \{ p + (2+\sigma)xy \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

で表はされる。兩式とも第 1 項は梁の捩れより来る内力であつて切斷面が x 軸に對して對稱でない時に使用せられ、第 2 項は荷重 W より直接来る剪斷内力である。 I は既記の如く y 軸に關しての切斷面の慣性モーメントである。仍つて剪斷内力は p 又は q に有限の有限項を加へ且有限數を乗じた數で表はされるから軸線に沿つて單位長さの梁の持つ歪エネルギーを E_1 とすると

$$E_1 \propto c \iint (p^2 + q^2) dx dy + \text{有限量}, \quad c \text{ 有限量}$$

であつて上に單に有限量と書いた中には實は p 又は q を面積で積分したものも這入つてゐるけれども p^2 又は q^2 を積分したものより位數が低いから考へに入れない。即ち E_1 が有限であるためには $\iint (p^2 + q^2) dx dy$ が有限であればよい。仍つて

$$p+iq \text{ の } z \text{ の最小次數 } > -1/2$$

$$\text{即ち } m_v/k_v - 1 > -1/2$$

$$\therefore m_v/k_v > 1/2$$

しかるに $k_v\pi$ は $x+iy$ 面の多角形の内角であるから $0 < k_v < 2$ であつて從つて $m_v > 0$ となり m_v は整数なるこ

とより次の式を得る。

$$m_v > 1 \quad \dots\dots\dots (10)$$

仍つて

$$u+iv = c' \int \frac{R_1(\zeta) \Pi(\zeta-\zeta_v)^{m_v-1}}{\Pi(\zeta-\zeta_v)^{3k_v}} d\zeta = c' \int \frac{R(\zeta)d\zeta}{\Pi(\zeta-\zeta_v)^{3k_v}}$$

となり上式被積分函數の分子は整函數となる。次に $R(\zeta)$ の ζ の次數を決定するために梁の切斷面周の直線部分に沿つては内力有限である事を用ふ。これを行ふために

$$z=0, \quad \zeta=\infty$$

の點が相對應し且 $z=0$ が切斷面周上の點とする。この事を一般的に言つて何等差支へないのは z 面の軸を移す事によ

(6) Love, Elasticity, 版 4, 頁 332.

つて切斷面周上の何れの點をも $z=0$ となし得るし、又 ζ の方は 1 次變換によつて實軸上の何れの點をも $\zeta=\infty$ に對應せしめ得るからである。乃ち

$$z=1/\zeta + \dots\dots\dots(11)$$

とおき、 R の ζ の次數を r とおくと

$$u+iv \text{ の } \zeta \text{ の次數} = r - 3\sum k_v + 1 = r - 3n + 7$$

であるから

$$r - 3n + 7 < 0 \quad \therefore r \leq 3n - 8 \dots\dots\dots(12)$$

以上によつて (7) の大部分を得たのであるが更に $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3n-8}$ が總て實數なることを證明しよう。

(5) の第 3 式によつて ζ_h と ζ_{h+1} との間では

$$V \sin 3\varepsilon_h - u \cos 3\varepsilon_h = \sin \varepsilon_h \\ \times \{(4+\sigma) \cos^2 \varepsilon_h - (2-\sigma) \sin^2 \varepsilon_h\} \dots\dots\dots(13)$$

$$\therefore (u+iv) e^{i3\varepsilon_h} \text{ の實部} = \text{實數}$$

$$\therefore (du/d\xi + idv/d\xi) e^{i3\varepsilon_h} \text{ の實部} = 0$$

但し ξ とは ζ の實部とす。

今 $R(\zeta) = \gamma \{a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots + a_{3n-8} \zeta^{3n-8}\}$ において

$$\frac{du}{d\xi} + i \frac{dv}{d\xi} = \frac{\gamma \{a_0 + \dots + a_{3n-8} \zeta^{3n-8}\}}{\prod (\zeta - \zeta_v)^{3k_v}}$$

この式で $a_0, a_1, \dots, a_{3n-8}$ を實數とすると分子の中括弧内は實數である。又分母の内 $\zeta_v \leq \zeta_h$ なる ζ_v の分岐點に對する項即ち $\prod_{v=1}^h (\zeta - \zeta_v)^{3k_v}$ は實數である。 $\zeta_v \geq \zeta_{h+1}$ なる ζ_v の分岐點に對する項は

$$\prod_{v=h+1}^n (\zeta - \zeta_v)^{3k_v} = \prod_{v=h+1}^n \{|\zeta - \zeta_v|^{3k_v} e^{i3k_v \pi}\} = Z e^{i3\pi \sum_{h+1}^n k_v} \dots\dots\dots(14)$$

但し Z は實數にして分岐點の内 ζ_n が最大と假定す。一方

$$\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} = (1 - k_n) \pi$$

$$\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n-2} = (1 - k_{n-1}) \pi$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\varepsilon_{h+1} - \varepsilon_h = (1 - k_{h+1}) \pi$$

$$\therefore \varepsilon_n - \varepsilon_h = \left(n - h - \sum_{v=h+1}^n k_v \right) \pi$$

$$\therefore \pi \sum_{v=h+1}^n (n-h) \pi - (\varepsilon_n - \varepsilon_h) \dots\dots\dots(15)$$

$$\therefore \prod_{v=h+1}^n (\zeta - \zeta_v)^{3k_v} = \pm Z e^{-i3(\varepsilon_n - \varepsilon_h)}$$

故に $du/d\xi + idv/d\xi = \pm \gamma Z e^{-i3(\varepsilon_n - \varepsilon_h)}$

故に $\gamma = ie^{-i3\varepsilon_n}$ とおくと $\{du/d\xi + idv/d\xi\} e^{i3\varepsilon_h}$ の實部が零となつて所要の目的を達す。而して第 n 邊は何れの邊であるとの定めなきため $u+iv$ を求めて更に $p+iq$ を求める際には γ をも定めなければならぬ事になる。この點が振れの場合と異なる點であつて振れの場合には第 n 邊が x 軸に並行であるとなし得るけれども、撓みの場合にはその自由が昭和 10 年 5 月]

ない。

以上によつて (7) の正しい事を證明し得た。而して p, q を求むるには (5) の式を用ひ各式を各邊にあてはめると $3n$ の條件が出て来る。これに對し $p+iq$ の積分の方では、1 複素常數を 2 個の常數とすると

r より	1 個の常數
R より	$3n-7$,,
$u+iv$ の積分常數	2 ,,
$s+it$,,	2 ,,
$p+iq$,,	2 ,,

合計 $3n$ であつて條件の數と求むべき常數の數とは一致して一般に解かれる事になる。

3. 正 3 角形の斷面への應用

梁の斷面が正 3 角形 (一般に正多角形) の場合には、斷面主軸が一定しないけれども、今 x 軸を斷面の對稱の軸とし x 軸の正方向に荷重 W が加はるものとして解き、且斷面が正多角形なる事を利用して任意の方向に荷重の加はる際の内力分布に迄擴張した。今第 5 圖の如き正三角形の内部を單位円 (τ) 内に寫像すると。

$$x+iy = k \int_0^\tau \frac{d\tau}{(1-\tau^3)^{2/3}}, \quad 1/k = \int_0^1 \frac{d\xi}{(1-\xi^3)^{2/3}} \dots\dots\dots(16)^{(7)}$$

この式を直接使用して問題を解いてもよいが更にこれを ζ 上半面に寫像して利用した方が一層便利である。即ち

$$\zeta = -i \frac{1}{\sqrt{3}} (\tau - 1) / (\tau + 1)$$

の變換を行ふと

$$x+iy = -\frac{1}{2} - iC \int_\infty^\zeta \frac{d\zeta}{(\zeta^3 - \zeta)^{2/3}}, \quad C = 2^{1/3} k / \sqrt{3} \dots\dots\dots(17)$$

これによつて各對應點をとると第 1 表の如くである。

第 1 表 $x+iy$ 面と $\zeta = \xi + i\eta$ 面との對應表

$x+iy$ 面	V_3	M_1	V_1	M_2	V_2	M_3	0
ζ 面	0	1/3	1	∞	-1	-1/3	$i/\sqrt{3}$

仍つて (5) の第 3 式にあてはめ $u+iv$ 面での境の條件を求めると第 7 圖の如くなる。即ち

$$\left. \begin{array}{ll} \text{第 1 邊に對して} & v = (5+2\sigma)/4 \\ \text{第 2 邊に對して} & v = 2-\sigma \\ \text{第 3 邊に對して} & v = (5+2\sigma)/4 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

而して $\sigma < 1/2$ なるにより⁽⁸⁾ $2-\sigma > \frac{1}{2}(5+2\sigma)$ である。

第 7 圖より或は又内力の式の $p+iq$ を微分することによつても第 2 邊 ($V_1 V_2$) に對應する $u+iv$ の値は v 軸に對稱であるから (7) の第 2 式被積分函數は ζ の偶函數であつて、この場合その分母が奇函數であるから分子も亦奇函數で

(7) Forsyth, Theory of Functions, 版 3, 頁 678.

(8) $\sigma > 1/2$ のときには物體に外圧を加へるゝ容積が増加する。實測結果鉛が最大で $\sigma = 0.428$ である。

ある。而して $3n-8=9-8=1$ であるから $R(\zeta)=a_1\zeta$ である。即ち

$$u+iv = \gamma \int a_1 \zeta d\zeta / (\zeta^2-1) = \gamma a_1 / 2 \log(\zeta-1)/(\zeta+1) + \text{常数}$$

而して積分の下限を $\zeta=\infty$ とすると

$$u+iv = -\frac{a}{2} \log \frac{\zeta-1}{\zeta+1} + i(2-\sigma), \quad a \text{ 正實数} \dots\dots(19)$$

第 5 圖 梁の断面を示す圖

第 3 邊に對應する $u+iv$ に進むに際して π だけ偏角を進め、第 3 邊のそれから第 1 邊のそれに進む際には式の形から偏角が進まない。仍つて第 3 邊に對應する $u+iv$ は

第 6 圖 正三角形を ζ 面に寫像した圖

第 7 圖 $u+iv$ 面での條件圖

$$u+iv = -\frac{a}{2} \log \left| \frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right| + i \left(\frac{-a\pi}{2} + 2-\sigma \right)$$

$$= \text{實數} + i \frac{1}{2} (5+2\sigma)$$

$$\therefore a = 3(1-2\sigma)/2\pi \dots\dots(20)$$

故に一般に

$$u+iv = -\frac{3}{4\pi} (1-2\sigma) \log \frac{\zeta-1}{\zeta+1} + i(2-\sigma) \dots\dots(21)$$

次に (5) を各邊にあてはめて各頂點の $s+it$ 及び $p+iq$ を求め各頂點のサフィックスを附してその値とすると

$$\left. \begin{aligned} s_3+it_3 &= 0+i, \\ s_1+it_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} (2-\sigma) - i \frac{1}{2} (1+3\sigma) \\ s_2+it_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (2-\sigma) - i \frac{1}{2} (1+3\sigma) \end{aligned} \right\} \dots\dots(22)$$

$$\left. \begin{aligned} p_3+iq_3 &= 0-i \frac{1}{2} \sigma, \\ p_1+iq_1 &= \frac{\sqrt{3}}{4} (2+\sigma) - i \frac{1}{4} (3-\sigma) \\ p_2+iq_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} (2+\sigma) - i \frac{1}{4} (3-\sigma) \end{aligned} \right\} \dots\dots(23)$$

$u+iv$ 面が 1 葉よりなり随つて $s+it$, $p+iq$ 面も亦 1 葉である事より容易に (22) 及び (23) の 6 式が導き出される。

4. 第 1 邊に沿つての剪断内力

この際は $0 < \zeta < 1$ の範囲内であつて

$$u+iv = -\frac{a}{2} \log \frac{1-\zeta}{1+\zeta} + i \frac{1}{4} (5+2\sigma),$$

$$a = \frac{3}{2\pi} (1-2\sigma) \dots\dots(24)$$

$$s+it = \int (u+iv) d(x+iy)$$

$$= -\frac{ac}{2} e^{i5\pi/8} \int_0^1 \log \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta^3)^{2/3}} + i \frac{1}{4} (5+2\sigma) (x+iy-1) + b_1' + ib_1''$$

この式の常数を求めるため (22) の第 1 式即ち V_3 の點の $s_3+it_3=0+i$ にあてはめると

$$b_1'=0, \quad b_1''=1 \dots\dots(25)$$

更に積分して

$$p+iq = -\frac{ac^2}{2} e^{i5\pi/8} \left(\int_0^1 \log \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta^3)^{2/3}} \right) \frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta^3)^{2/3}} + i \frac{1}{4} (5+2\sigma) \left(\frac{1}{2} z^2 - z + \frac{1}{2} \right) + i(z-1) + 0 - i \frac{1}{2} \sigma \dots\dots(26)$$

但し $z=x+iy$ を表し且最後の 2 項 $0-i\frac{1}{2}\sigma$ は積分常數で $p+iq$ を (23) の第 1 式に代入して求めた値である。(26) 式の積分は級數展開にて比較的容易にその値が求められる。

第 8 圖 第 1 邊に沿つての剪断内力

第 2 表 $\zeta, s, x, y, \int_0^1 \tau_z/f$ の値 (第 8 圖参照)

ζ	0	·01	·1	·2	1/3	·6
s/ρ	0	·26613	·57390	·72518	·86603	1·08504
x	1	·76952	·50299	·37198	·25000	·06036
y	0	·13307	·28695	·36259	$\sqrt{3}/4$	·54252
$-\int_0^1 \tau_z/f$	0	·00042	·01953	·06279	·15260	·47255
τ_z/f	0	·8925	1·4982	1·6295	1·6553	1·5125

$$\text{表中 } \int_0^1 \int_0^1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \log \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta^3)^{2/3}} \right) \frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta^3)^{2/3}}$$

τ_z は第 1 邊に沿つての剪斷合内力

f は 荷重 W を切斷面積で割つた平均剪斷内力

第 9 圖 中央線 V_3M_2 に沿つての剪斷内力 (第 3 表参照)

5. 中央線に沿つての剪斷内力

この際は

$$\zeta = i\eta, \quad 0 \leq \eta \dots \dots \dots (27)$$

これを (24) に代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} u+iv &= i \left[a \tan^{-1} \eta + \frac{1}{4}(5+2\sigma) \right] \\ s+it &= \int (u+iv) dz \\ &= i \left[-ac \int_0^\eta \tan^{-1} \eta \frac{d\eta}{(\eta+\eta^3)^{2/3}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}(5+2\sigma)(z-1)+1 \right] \end{aligned}$$

最後の項 1 は $s+it$ を (22) の第 1 式に代入して求めた。更にこれを積分すると

$$\begin{aligned} p+iq &= \int (s+it) dz \\ &= i \left[ac^2 \int_{\eta=0}^1 \left(\int_{\eta=0}^1 \tan^{-1} \eta \frac{d\eta}{(\eta+\eta^3)^{2/3}} \right) \frac{d\eta}{(\eta+\eta^3)^{2/3}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}(5+2\sigma) \left(\frac{1}{2}z^2 - z + \frac{1}{2} \right) + z - 1 - \frac{1}{2}\sigma \right] \dots (28) \end{aligned}$$

前と同じく最後の項 $-\frac{1}{2}\sigma$ は上式を (23) 第 1 式に代入して得た積分定数である。第 3 表は η とこれに對應する他の數値との表である。表中

$$\int_0^1 \int_0^1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \tan^{-1} \eta \frac{d\eta}{(\eta+\eta^3)^{2/3}} \right) \frac{d\eta}{(\eta+\eta^3)^{2/3}}$$

であつて $0 \leq \eta < 1$ のときにはその數値は容易に得られる。且 $\eta=1/\sqrt{3}$ の點が切斷面の重心であるから $\eta=0.6$ 迄しか數計算をしなかつた。

第 3 表 $\eta, s, x, y, \int_0^1 \int_0^1, \tau_z/f$ の値 (第 9 圖参照)

η	0	.1	.2	$1/\sqrt{3}$	.6
s/ρ	0	.57281	.71968	1.00000	1.01092
x	1	.42719	.28032	0	-.01092
y	0	0	0	0	0
$\int_0^1 \int_0^1$	0	.00967	.03020	.15609	.16475
τ_z/f	0	1.4369	1.5282	1.3798	1.3652

6. 第 2 邊 (v_1v_2) に沿つての剪斷内力

この際もこの邊に沿

つた剪斷内力 V_z を上記の式から求められるけれども級數の收斂悪く勞多くして功少いかから寧ろ斷面が正三角形なる事を利用して別の方面よりこの内力を求める。先づ ov_3 に沿つて W の荷重が働く際の v_1v_3 に沿つての剪斷内力が計算されてゐる。次に ov_1 の方向に

第 10 圖

W が加はる際も亦 v_3v_1 に沿つての剪斷内力がわかつてゐる。只その方向が第 10 圖の矢のやうに反對になつてゐる。依つてその差が即ちこの 2 荷重によつて生ずる剪斷内力であり、且この 2 荷重の合力は ov_2 の方向に $-W$ の荷重が加はると同一結果になる。依つて ov_3 の方向に W のみの荷重が加つた際の第 2 邊に沿つての剪斷内力は第 11 圖の如くなる。

第 11 圖 第 2 邊に沿つての剪斷内力

7. 任意の方向に荷重の加はる際にはその力を分解して ov_3 及び ov_1 方向に分ちこれより直に周邊に沿つての合剪斷内力が求められる。而かも斷面周に沿つての内力が中央線に沿つての内力より大きいから周邊の合内力がわかればよいことになる。

又正三角形 (一般に正多角形) の切斷面重心を通るやう荷重を加るとその荷重方向の如何に関らず梁は撓れない。