両端ビルトインされ中央に集注荷重を受ける短き角梁の内力分布

(昭和 9 年 11 月 30 日 福岡地方講演會に於て講演)

准 員 工 学 士 溝 口 孝 喜⁽¹⁾

The Stress Distribution in a Rectangular Beam of Short Span built-in at Both Ends under Concentrated Load at the Middle Point

By Kôki MIZOGUCHI, Kôgakusi Associate Member

摘 要

両端に於て完全にビルトインされて居ると思はれる短い角梁が中央に集注荷重を受ける場合に梁中に生ずる諸内力を求めこれ等を従来の理論から求めた値に比較し種々な相違を比較研究した。

1. 緒 論

水平に置かれた十分長い梁に於ては、ビルトインとは両端に於て弾性線への接線が水平であつて軸の方向の内力の總和が零である事に依つて定義されて居る。然し梁が相當短くなると單に 1 本の弾性線のみでなく、荷重前これに平行な凡ての直線群の荷重後の状態が問題となる。

第 1 圖に就て考へるに、梁の両端 aa , $\beta\beta$ 断面に於て、これ等曲線群への接線は悉く完全に水平とはならず幾分傾斜するものも存在し、且この傾斜は高さの方向のみならず嵌入部 m の大さの函数と考へられる。併しビルトインが完全になる程この接線群は水平に近附くであらう。又何れにても荷重は殆ど大部分 A, B 2 點で受け、従つて A, B, M 3 點に特異點を生ずると考へられる。従つて完全なビルトインとは次の様な條件を充すものとするのが至當であらう。即ち梁の両端に於ては上記曲線群への凡ての接線が水平であつて両端の下面に特異點を生じ、且梁の軸の方向の内力の總和が零なるものをビルトインの條件とする。但し A, B, M 3 點では荷重は或る面積上に分布すると考へるのが妥當である。本論文ではこの様な状態の梁を取扱つた。

この様な條件は第 2 圖の様に充す事が出来る。

即ち無限に長い梁に $2l$ 毎に支持を置き、各支持の中央に集注荷重 P を加へれば各支持間の梁に就ては夫々上記ビルトインの條件が充されて居る。従つて第 2 圖の様な状態を完全なビルトインと考へこの様な状態の梁に就て考へる。

2. 解 法

第 3 圖の様に軸及び記號を定める。これは第 2 圖中の 1 部を取つたものである。即ち

$2l$ = 梁の長さ, $2h$ = 梁の高さ, $2s$ = 集注荷重の作用する巾, s は小で且集注荷重はこの間に均等に分布するものとする。

P = 梁の単位厚さに對する荷重

$A, B, 2$ 點では荷重の分布が M 點に於けるとやゝ異なるであらうが簡単のため同一状態であるとする。又角梁であるから 2 次元問題として取扱ふ。

F を Airy 氏内力函数とすれば、

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{今 } F \text{ を } F = -\frac{P}{4l} x^2$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cosh k_n y + b_n y \sinh k_n y + c_n \sinh k_n y + d_n y \cosh k_n y) \cos k_n x \dots\dots\dots (3)$$

と置く。茲に a_n, b_n, c_n, d_n は n に依つて變ずる常數で

$$k_n = \frac{n\pi}{l} \quad n=1, 2, 3, 4, \dots \text{等正の整数} \dots\dots\dots (4)$$

(3) 式は (1) 式を充す。(3) を (2) に代入すれば

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} [(k_n^2 a_n + 2k_n b_n) \cosh k_n y + k_n^2 b_n y \sinh k_n y + (k_n^2 c_n + 2k_n d_n) \sinh k_n y + k_n^2 d_n y \cosh k_n y] \cos k_n x \dots\dots\dots (5)$$

$$\sigma_y = -\frac{P}{2l} - \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 [a_n \cosh k_n y + b_n y \sinh k_n y + c_n \sinh k_n y + d_n y \cosh k_n y] \cos k_n x \dots\dots\dots (6)$$

[第 1 卷 第 2 號]

(1) 東洋高圧工業株式会社工手

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} k_n [(k_n a_n + b_n) \sinh k_n y + k_n b_n y \cosh k_n y + (k_n c_n + d_n) \cosh k_n y + k_n d_n y \sinh k_n y] \sin k_n x \quad \dots (7)$$

周囲条件の第1として、

$$\left. \begin{aligned} |x| < s \text{ なる範囲で } (\sigma_y)_{y=\pm h} &= -P/2s \\ s < |x| < l \text{ なる範囲で } (\sigma_y)_{y=\pm h} &= 0 \\ |x| < l-s \text{ なる範囲で } (\sigma_y)_{y=-h} &= 0 \\ l-s < |x| < l \text{ なる範囲で } (\sigma_y)_{y=-h} &= -P/2s \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

然るに $|x| < s$ なる範囲で $-P/2s$, $s < |x| < l$ なる範囲で 0 なる函数は、

$$-\frac{P}{2l} - \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\epsilon}{n\epsilon} \cos n\xi \quad \dots (9)$$

で與へられ、 $|x| < l-s$ なる範囲で 0, $l-s < |x| < l$ なる範囲で $-P/2s$ なる函数は、

$$-\frac{P}{2l} - \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n\epsilon}{n\epsilon} \cos n\xi \quad \dots (10)$$

で與へられる。茲に

$$\epsilon \equiv \frac{\pi s}{l}, \quad \xi \equiv \frac{\pi x}{l} \quad \dots (11)$$

(4) と (11) を参照し (6) を (9)(10) に比較すれば、

$$k_n^2 [a_n \cosh k_n h + b_n h \sinh k_n h + c_n \sinh k_n h + d_n h \cosh k_n h] = \frac{P \sin n\epsilon}{l n\epsilon} \quad \dots (12)$$

$$k_n^2 [a_n \cosh k_n h + b_n h \sinh k_n h - c_n \sinh k_n h - d_n h \cosh k_n h] = (-1)^n \frac{P \sin n\epsilon}{l n\epsilon} \quad \dots (13)$$

次に第2の周囲条件として、

$$(\tau)_{y=\pm h} = 0 \quad \dots (14)$$

従つて (7) から、

$$(k_n a_n + b_n) \sinh k_n h + k_n b_n h \cosh k_n h = 0 \quad \dots (15)$$

$$(k_n c_n + d_n) \cosh k_n h + k_n d_n h \sinh k_n h = 0 \quad \dots (16)$$

今 n 中の奇数を p , 偶数を q 即ち $p=1, 3, 5, 7, \dots$
 $q=2, 4, 6, 8, \dots$ とすれば (12), (13), (15), (16) から *

$$\begin{aligned} \triangle F &= -\frac{P}{4l} x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cosh k_n h \cdot \cosh k_n w - a_n \sinh k_n h \cdot \sinh k_n w + b_n (h-w) \sinh k_n h \cdot \cosh k_n w - b_n (h-w) \cosh k_n h \cdot \sinh k_n w \\ &\quad + c_n \sinh k_n h \cdot \cosh k_n w - c_n \cosh k_n h \cdot \sinh k_n w + d_n (h-w) \cosh k_n h \cdot \cosh k_n w - d_n (h-w) \sinh k_n h \cdot \sinh k_n w] \cos k_n x \\ &= -\frac{P}{4l} x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \cosh k_n h + b_n h \sinh k_n h + c_n \sinh k_n h + d_n h \cosh k_n h) \cosh k_n w \\ &\quad - (a_n \sinh k_n h + b_n h \cosh k_n h + c_n \cosh k_n h + d_n h \sinh k_n h) \sinh k_n w \\ &\quad - (b_n \sinh k_n h + d_n \cosh k_n h) w \cosh k_n w + (b_n \cosh k_n h + d_n \sinh k_n h) w \sinh k_n w] \cos k_n x \end{aligned}$$

この式に (17), (18) を代入し、 $\sinh k_p h \cdot \cosh k_p h - k_p h \equiv D_p$, $\sinh k_q h \cdot \cosh k_q h + k_q h \equiv D_q$ と置き、 $\cosh^2 k_n w - \sinh^2 k_n w = 1$
 $\cosh k_n w - \sinh k_n w = e^{-k_n w}$ 及び (12), (15), (16) の関係を利用すれば、

昭和 10 年 5 月]

$$\left. \begin{aligned} a_p &= 0 \\ b_p &= 0 \\ c_p &= \frac{P}{l} \frac{1}{k_p^2} \frac{\sin p\epsilon}{p\epsilon} \frac{\cosh k_p h + k_p h \cdot \sinh k_p h}{\sinh k_p h \cdot \cosh k_p h - k_p h} \\ d_p &= -\frac{P}{l} \frac{1}{k_p^2} \frac{\sin p\epsilon}{p\epsilon} \frac{k_p \cosh k_p h}{\sinh k_p h \cdot \cosh k_p h - k_p h} \\ a_q &= \frac{P}{l} \frac{1}{k_q^2} \frac{\sin q\epsilon}{q\epsilon} \frac{\sinh k_q h + k_q h \cdot \cosh k_q h}{\sinh k_q h \cdot \cosh k_q h + k_q h} \\ b_q &= -\frac{P}{l} \frac{1}{k_q^2} \frac{\sin q\epsilon}{q\epsilon} \frac{k_q \sinh k_q h}{\sinh k_q h \cdot \cosh k_q h + k_q h} \\ c_q &= 0 \\ d_q &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} a_q &= \frac{P}{l} \frac{1}{k_q^2} \frac{\sin q\epsilon}{q\epsilon} \frac{\sinh k_q h + k_q h \cdot \cosh k_q h}{\sinh k_q h \cdot \cosh k_q h + k_q h} \\ b_q &= -\frac{P}{l} \frac{1}{k_q^2} \frac{\sin q\epsilon}{q\epsilon} \frac{k_q \sinh k_q h}{\sinh k_q h \cdot \cosh k_q h + k_q h} \\ c_q &= 0 \\ d_q &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

第3の周囲条件としては両端における条件である。先づ任意の断面における軸方向の内力の總和及び $|x|=l/2$ の断面におけるモーメントが共に零なる事を要する。逆にこれ等の条件が満足されれば (9), (10) で示される函数が周期的な Fourier 級数である事を考へれば完全に第2圖の状態に置かれて居る事が分る。

$$\int_{-h}^h \sigma_x dy = \int_{-h}^h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy = \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{y=-h}^{y=h}$$

この右邊は (15), (16) から零なる事が分る。

$|x|=l/2$ に於ては、 $\cos k_p x = 0$ 而して $c_q = d_q = 0$ なる故に $(\sigma_x)_{|x|=l/2}$ は y に就ての偶函数である。即ち $|x|=l/2$ なる断面では σ_x は x 軸の上下對稱であり従つてモーメントは零である。

第 4 圖

第4圖の様に記號を定むれば

$$\begin{aligned} y &= h-w \\ \cosh k_n y &= \cosh k_n (h-w) = \cosh k_n h \cdot \cosh k_n w \\ &\quad - \sinh k_n h \cdot \sinh k_n w \\ \sinh k_n y &= \sinh k_n (h-w) = \sinh k_n h \cdot \cosh k_n w \\ &\quad - \cosh k_n h \cdot \sinh k_n w \end{aligned}$$

これ等を (3) 式に代入すれば、

△

$$\begin{aligned}
F &= -\frac{P}{4l}x^2 + \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \cosh k_n w \cdot \cos k_n x \\
&\quad + \frac{P}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{k_p^2} \frac{\sin p\varepsilon}{p\varepsilon} \left[-\frac{\cosh^2 k_p h}{D_p} \sinh k_p w + \frac{\cosh^2 k_p h}{D_p} k_p w \cosh k_p w - \frac{\cosh k_p h \cdot \sinh k_p h}{D_p} k_p w \sinh k_p w \right] \cos k_p x \\
&\quad + \frac{P}{l} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{k_q^2} \frac{\sin q\varepsilon}{q\varepsilon} \left[-\frac{\sinh^2 k_q h}{D_q} \sinh k_q w + \frac{\sinh^2 k_q h}{D_q} k_q w \cosh k_q w - \frac{\sinh k_q h \cdot \cosh k_q h}{D_q} k_q w \sinh k_q w \right] \cos k_q x \\
&= -\frac{P}{4l}x^2 + \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \cos k_n w \cdot \cos k_n x \\
&\quad + \frac{P}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{k_p^2} \frac{\sin p\varepsilon}{p\varepsilon} \left[-\left(1 + \frac{\cosh^2 k_p h - D_p}{D_p}\right) (\sinh k_p w - k_p w \cosh k_p w) \right. \\
&\quad \quad \left. - \left(1 + \frac{\cosh k_p h \cdot \sinh k_p h - D_p}{D_p}\right) k_p w \sinh k_p w \right] \cos k_p x \\
&\quad + \frac{P}{l} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{k_q^2} \frac{\sin q\varepsilon}{q\varepsilon} \left[-\left(1 + \frac{\sinh^2 k_q h - D_q}{D_q}\right) (\sinh k_q w - k_q w \cosh k_q w) \right. \\
&\quad \quad \left. - \left(1 + \frac{\sinh k_q h \cdot \cosh k_q h - D_q}{D_q}\right) k_q w \sinh k_q w \right] \cos k_q x \\
&= -\frac{P}{4l}x^2 + \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \cdot e^{-k_n w} \cos k_n x + \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} k_n w \cdot e^{-k_n w} \cos k_n x \\
&\quad - \frac{P}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{k_p^2} \frac{\sin p\varepsilon}{p\varepsilon} \left[\frac{k_p h}{D_p} k_p w \sinh k_p w + \frac{e^{-k_p h} \cdot \cosh k_p h + k_p h}{D_p} (\sinh k_p w - k_p w \cosh k_p w) \right] \cos k_p x \\
&\quad + \frac{P}{l} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{k_q^2} \frac{\sin q\varepsilon}{q\varepsilon} \left[\frac{k_q h}{D_q} k_q w \sinh k_q w + \frac{e^{-k_q h} \cdot \sinh k_q h + k_q h}{D_q} (\sinh k_q w - k_q w \cosh k_q w) \right] \cos k_q x \\
F_e &= -\frac{P}{4l}x^2 + \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \cdot e^{-k_n w} \cdot \cos k_n x + \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} k_n w \cdot e^{-k_n w} \cdot \cos k_n x \quad \dots\dots\dots (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_e &= -\frac{P}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{k_p^2} \frac{\sin p\varepsilon}{p\varepsilon} [a_p k_p w \sinh k_p w - \beta_p (k_p w \cdot \cosh k_p w - \sinh k_p w)] \cos k_p x \\
&\quad + \frac{P}{l} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{k_q^2} \frac{\sin q\varepsilon}{q\varepsilon} [a_q k_q w \sinh k_q w - \beta_q (k_q w \cdot \cosh k_q w - \sinh k_q w)] \cos k_q x \quad \dots\dots\dots (20)
\end{aligned}$$

$$\text{と置く、茲に} \quad a_p \equiv \frac{k_p h}{D_p}, \quad \beta_p \equiv \frac{e^{-k_p h} \cdot \cosh k_p h + k_p h}{D_p}, \quad a_q \equiv \frac{k_q h}{D_q}, \quad \beta_q \equiv \frac{e^{-k_q h} \cdot \sinh k_q h + k_q h}{D_q} \quad \dots\dots\dots (21)$$

以下 σ_x, σ_y, τ の各々に就て考へる。

i) σ_x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_e}{\partial w} &= -\frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} e^{-k_n w} \cdot \cos k_n x + \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} e^{-k_n w} \cdot \cos k_n x \\
&\quad - \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} k_n w \cdot e^{-k_n w} \cdot \cos k_n x = -\frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} k_n w \cdot e^{-k_n w} \cdot \cos k_n x \quad \dots\dots\dots (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_e}{\partial w} &= -\frac{P}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{k_p} \frac{\sin p\varepsilon}{p\varepsilon} [a_p (\sinh k_p w + k_p w \cdot \cosh k_p w) - \beta_p k_p w \cdot \sinh k_p w] \cos k_p x \\
&\quad + \frac{P}{l} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{k_q} \frac{\sin q\varepsilon}{q\varepsilon} [a_q (\sinh k_q w + k_q w \cdot \cosh k_q w) - \beta_q k_q w \cdot \sinh k_q w] \cos k_q x \quad \dots\dots\dots (23)
\end{aligned}$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} = \frac{\partial^2 F_e}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 F_s}{\partial w^2}$$

(22), (23) から

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_s}{\partial w^2} &= -\frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} e^{-k_n w} \cos k_n x + \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} k_n w \cdot e^{-k_n w} \cos k_n x \\ \frac{\partial^2 F_s}{\partial w^2} &= -\frac{P}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\varepsilon}{p\varepsilon} [a_p(2 \cosh k_p w + k_p w \cdot \sinh k_p w) - \beta_p(\sinh k_p w + k_p w \cdot \cosh k_p w)] \cos k_p x \\ &\quad + \frac{P}{l} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{\sin q\varepsilon}{q\varepsilon} [a_q(2 \cosh k_q w + k_q w \cdot \sinh k_q w) - \beta_q(\sinh k_q w + k_q w \cdot \cosh k_q w)] \cos k_q x \\ \lambda &\equiv \frac{\pi h}{l}, \quad \eta \equiv \frac{\pi w}{l} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{と置き} \quad -\frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} e^{-k_n w} \cos k_n x = -\frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \cdot e^{-n\eta} \cos n\xi \equiv \sigma_{x1} \quad (25)$$

$$\frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} k_n w \cdot e^{-k_n w} \cos k_n x = \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \cdot n\eta \cdot e^{-n\eta} \cos n\xi \equiv \sigma_{x2} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_s}{\partial w^2} &= -\frac{P}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\varepsilon}{p\varepsilon} [a_p(2 \cosh p\eta + p\eta \cdot \sinh p\eta) - \beta_p(\sinh p\eta + p\eta \cdot \cosh p\eta)] \cos p\xi \\ &\quad + \frac{P}{l} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{\sin q\varepsilon}{q\varepsilon} [a_q(2 \cosh q\eta + q\eta \cdot \sinh q\eta) - \beta_q(\sinh q\eta + q\eta \cdot \cosh q\eta)] \cos q\xi \\ &\equiv \sigma_{x3} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{と置けば} \quad \sigma_x = \sigma_{x1} + \sigma_{x2} + \sigma_{x3} \quad (28)$$

$a_p, \beta_p, a_q, \beta_q$ は (21) に (24) を代入して、

$$a_p = \frac{p\lambda}{\sinh p\lambda \cdot \cosh p\lambda - p\lambda}, \quad \beta_p = \frac{e^{-p\lambda} \cdot \cosh p\lambda + p\lambda}{\sinh p\lambda \cdot \cosh p\lambda - p\lambda}, \quad a_q = \frac{q\lambda}{\sinh q\lambda \cdot \cosh q\lambda + q\lambda}, \quad \beta_q = \frac{e^{-q\lambda} \cdot \sinh q\lambda + q\lambda}{\sinh q\lambda \cdot \cosh q\lambda + q\lambda} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x1} &= -\frac{P}{l\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\eta} \frac{\sin n\varepsilon \cos n\xi}{n} = -\frac{P}{l\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\eta} \frac{\sin n(\xi+\varepsilon) - \sin n(\xi-\varepsilon)}{2n} \\ &= -\frac{P}{2l\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\eta} \sin n(\xi+\varepsilon)}{n} + \frac{P}{2l\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\eta} \sin n(\xi-\varepsilon)}{n} \\ S &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\eta} \frac{\sin n(\xi+\varepsilon)}{n}, \quad S' \equiv \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\eta} \frac{\sin n(\xi-\varepsilon)}{n} \quad \text{と置き、} \\ C &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\eta} \frac{\cos n(\xi+\varepsilon)}{n} \quad \text{なる函数を考へれば、} \\ C+iS &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\eta} \frac{e^{in(\xi+\varepsilon)}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-\eta} \cdot e^{i(\xi+\varepsilon)})^n}{n} \\ e^{-\eta} \cdot e^{i(\xi+\varepsilon)} &\equiv z \end{aligned} \quad (30)$$

と置けば

$$C+iS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

然るに (30) から $|z| \leq 1$ (但し $z=1$ は除く) なる故に

$$C+iS = -\ln(1-z)$$

$(1-z)$ の微角は $-\pi/2$ と $\pi/2$ の間に存在するから、

$$-S = \tan^{-1} \frac{-e^{-\eta} \cdot \sin(\xi+\varepsilon)}{1 - e^{-\eta} \cdot \cos(\xi+\varepsilon)} = -\tan^{-1} \frac{\sin(\xi+\varepsilon)}{e^{\eta} - \cos(\xi+\varepsilon)}$$

即ち

$$S = \tan^{-1} \frac{\sin(\xi+\varepsilon)}{e^{\eta} - \cos(\xi+\varepsilon)} \quad (31)$$

茲に $\tan^{-1}$ は主値を示す。同様に

$$S' = \tan^{-1} \frac{\sin(\xi-\varepsilon)}{e^{\eta} - \cos(\xi-\varepsilon)} \quad (32)$$

昭和 10 年 5 月]

依つて
$$\sigma_{x1} = -\frac{P}{2l\epsilon} [S - S'] = -\frac{P}{2l\epsilon} \left[\tan^{-1} \frac{\sin(\xi + \epsilon)}{e^\eta - \cos(\xi + \epsilon)} - \tan^{-1} \frac{\sin(\xi - \epsilon)}{e^\eta - \cos(\xi - \epsilon)} \right] \quad (33)$$

(25) と (26) を比較すれば
$$\sigma_{x2} = \gamma \cdot \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial \eta} \quad (34)$$

なる事を知る。故に

故に
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial \eta} &= -\frac{P}{2l\epsilon} \left[\frac{-e^\eta \cdot \sin(\xi + \epsilon)}{\{e^\eta - \cos(\xi + \epsilon)\}^2 + \sin^2(\xi + \epsilon)} - \frac{-e^\eta \cdot \sin(\xi - \epsilon)}{\{e^\eta - \cos(\xi - \epsilon)\}^2 + \sin^2(\xi - \epsilon)} \right] \\ &= \frac{P}{2l\epsilon} \left[\frac{\sin(\xi + \epsilon)}{2\{\cosh \eta - \cos(\xi + \epsilon)\}} - \frac{\sin(\xi - \epsilon)}{2\{\cosh \eta - \cos(\xi - \epsilon)\}} \right] \\ \sigma_{x2} &= \frac{P}{4l\epsilon} \left[\frac{\eta \sin(\xi + \epsilon)}{\cosh \eta - \cos(\xi + \epsilon)} - \frac{\eta \sin(\xi - \epsilon)}{\cosh \eta - \cos(\xi - \epsilon)} \right] \quad (35) \end{aligned}$$

ii) σ_y

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 F_e}{\partial x^2} &= -\frac{P}{2l} - \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\epsilon}{n\epsilon} \cdot e^{-k_n w} \cdot \cos k_n x - \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\epsilon}{n\epsilon} \cdot k_n w \cdot e^{-k_n w} \cdot \cos k_n x \\ \frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} &= \frac{P}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\epsilon}{p\epsilon} [a_p k_p w \sinh k_p w - \beta_p (k_p w \cdot \cosh k_p w - \sinh k_p w)] \cos k_p x \\ &\quad - \frac{P}{l} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{\sin q\epsilon}{q\epsilon} [a_q k_q w \sinh k_q w - \beta_q (k_q w \cdot \cosh k_q w - \sinh k_q w)] \cos k_q x \\ &\quad - \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\epsilon}{n\epsilon} \cdot e^{-k_n w} \cdot \cos k_n x = -\frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\epsilon}{n\epsilon} \cdot e^{-n\eta} \cdot \cos n\xi \equiv \sigma_{y1} \quad (36) \end{aligned}$$

$$- \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\epsilon}{n\epsilon} \cdot k_n w \cdot e^{-k_n w} \cdot \cos k_n x = -\frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\epsilon}{n\epsilon} \cdot n\eta \cdot e^{-n\eta} \cdot \cos n\xi \equiv \sigma_{y2} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} &= \frac{P}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\epsilon}{p\epsilon} [a_p p\eta \sinh p\eta - \beta_p (p\eta \cdot \cosh p\eta - \sinh p\eta)] \cos p\xi \\ &\quad - \frac{P}{l} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{\sin q\epsilon}{q\epsilon} [a_q q\eta \sinh q\eta - \beta_q (q\eta \cdot \cosh q\eta - \sinh q\eta)] \cos q\xi \\ &\equiv \sigma_{y3} \quad (38) \end{aligned}$$

と置けば、(25), (26) とに比較して明かに

$$\sigma_{y1} = \sigma_{x1} \quad \sigma_{y2} = -\sigma_{x2} \quad (39)$$

而して

$$\sigma_y = -\frac{P}{2l} + \sigma_{y1} + \sigma_{y2} + \sigma_{y3} \quad (40)$$

iii) τ

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial w} = \frac{\partial^2 F_e}{\partial x \partial w} + \frac{\partial^2 F_s}{\partial x \partial w} \\ (22) (23) \text{ から} \quad \frac{\partial^2 F_e}{\partial x \partial w} &= \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\epsilon}{n\epsilon} \cdot k_n w \cdot e^{-k_n w} \cdot \sin k_n x \\ \frac{\partial^2 F_s}{\partial x \partial w} &= \frac{P}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\epsilon}{p\epsilon} [a_p (\sinh k_p w + k_p w \cdot \cosh k_p w) - \beta_p k_p w \cdot \sinh k_p w] \sin k_p x \\ &\quad - \frac{P}{l} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{\sin q\epsilon}{q\epsilon} [a_q (\sinh k_q w + k_q w \cdot \cosh k_q w) - \beta_q k_q w \cdot \sinh k_q w] \sin k_q x \\ \frac{\partial^2 F_e}{\partial x \partial w} &= \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\epsilon}{n\epsilon} \cdot n\eta \cdot e^{-n\eta} \cdot \sin n\xi \equiv \tau_1 \quad (41) \\ \frac{\partial^2 F_s}{\partial x \partial w} &= \frac{P}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\epsilon}{p\epsilon} [a_p (\sinh p\eta + p\eta \cdot \cosh p\eta) - \beta_p p\eta \cdot \sinh p\eta] \sin p\xi \end{aligned}$$

$$-\frac{P}{l} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{\sin q\epsilon}{q\epsilon} [a_q(\sinh q\eta + q\eta \cdot \cosh q\eta) - \beta_q q\eta \cdot \sinh q\eta] \sin q\xi \\ \equiv \tau_s \dots\dots\dots (42)$$

$$\text{と置けば (25) と比較し} \quad \tau_1 = \eta \cdot \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial \xi} \dots\dots\dots (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial \xi} &= -\frac{P}{2l\epsilon} \left[\frac{\cos(\xi+\epsilon)(e^\eta - \cos(\xi+\epsilon)) - \sin^2(\xi+\epsilon)}{\{e^\eta - \cos(\xi+\epsilon)\}^2 + \sin^2(\xi+\epsilon)} - \frac{\cos(\xi-\epsilon)(e^\eta - \cos(\xi-\epsilon)) - \sin^2(\xi-\epsilon)}{\{e^\eta - \cos(\xi-\epsilon)\}^2 + \sin^2(\xi-\epsilon)} \right] \\ &= -\frac{P}{2l\epsilon} \left[\frac{\cos(\xi+\epsilon) - e^{-\eta}}{2\{\cosh \eta - \cos(\xi+\epsilon)\}} - \frac{\cos(\xi-\epsilon) - e^{-\eta}}{2\{\cosh \eta - \cos(\xi-\epsilon)\}} \right] \\ &= -\frac{P}{4l\epsilon} \left[\frac{\cos(\xi+\epsilon) - \cosh \eta + \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos(\xi+\epsilon)} - \frac{\cos(\xi-\epsilon) - \cosh \eta + \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos(\xi-\epsilon)} \right] \\ &= -\frac{P}{4l\epsilon} \left[\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos(\xi+\epsilon)} - \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos(\xi-\epsilon)} \right] \end{aligned}$$

$$\text{故に} \quad \tau_1 = \frac{P}{4l\epsilon} \left[\frac{\eta \cdot \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos(\xi-\epsilon)} - \frac{\eta \cdot \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos(\xi+\epsilon)} \right] \dots\dots\dots (44)$$

特に $\xi \neq 0$ で $\epsilon \rightarrow 0$ なる時は (33) の極限値を求めるに (44) の計算を参照して ξ の代りに ϵ で微分するため第 2 項の符號の變ずる事を考へれば直ちに

$$(\sigma_{x1})_{\epsilon \rightarrow 0} = -\frac{P}{2l} \cdot \frac{\cos - e^{-\eta}}{\cosh \eta - \cos \xi} = \frac{P}{2l} \left(1 - \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \right) \dots\dots\dots (33)'$$

$$\begin{aligned} (35) \text{ から } (\sigma_{x2})_{\epsilon \rightarrow 0} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P}{4l} \left[\frac{\cosh \eta \{\sin(\xi+\epsilon) - \sin(\xi-\epsilon)\} - \sin(\xi+\epsilon) \cos(\xi-\epsilon) + \cos(\xi+\epsilon) \sin(\xi-\epsilon)}{\{\cosh \eta - \cos(\xi+\epsilon)\} \{\cosh \eta - \cos(\xi-\epsilon)\} \epsilon} \cdot \eta \right] \\ &= \frac{P}{4l} \cdot \frac{2 \cosh \eta \cdot \cos \xi - 2}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2} \cdot \eta = \frac{P}{2l} \cdot \frac{(\cosh \eta \cdot \cos \xi - 1) \eta}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2} \dots\dots\dots (35)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (44) \text{ から } (\tau_1)_{\epsilon \rightarrow 0} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P}{4l} \left[\frac{\eta \cdot \sinh \eta \{-\cos(\xi+\epsilon) + \cos(\xi-\epsilon)\}}{\{\cosh \eta - \cos(\xi-\epsilon)\} \{\cosh \eta - \cos(\xi+\epsilon)\} \epsilon} \right] \\ &= \frac{P}{2l} \cdot \frac{\eta \cdot \sinh \eta \cdot \sin \xi}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2} \dots\dots\dots (44)'\ast \end{aligned}$$

*

3. 内力の極値

内力函数 F 中 F_s , F_e 各々に就て考へて見る。 F_s から導出された $-P/2l + \sigma_{y1} + \sigma_{y2}$ 即ち $-P/2l + \sigma_{s1} - \sigma_{s2}$ の $\eta=0$ の値は (33), (35) から

$$\begin{aligned} &-\frac{P}{2l} - \frac{P}{2l\epsilon} \left[\tan^{-1} \frac{\sin(\xi+\epsilon)}{1 - \cos(\xi+\epsilon)} - \tan^{-1} \frac{\sin(\xi-\epsilon)}{1 - \cos(\xi-\epsilon)} \right] \\ &= -\frac{P}{2l} - \frac{P}{2l\epsilon} \left[\tan^{-1} \left(\cot \frac{\xi+\epsilon}{2} \right) - \tan^{-1} \left(\cot \frac{\xi-\epsilon}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

この函数は ξ に就ての偶函数であるから $\xi > 0$ に就て考へれば宜い。

a) $\epsilon < \xi \leq \pi$

$$\begin{aligned} -\frac{P}{2l} + \sigma_{y1} + \sigma_{y2} &= -\frac{P}{2l} - \frac{P}{2l\epsilon} \\ &\left[\tan^{-1} \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\xi+\epsilon}{2} \right) \right\} - \tan^{-1} \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\xi-\epsilon}{2} \right) \right\} \right] \\ &= -\frac{P}{2l} - \frac{P}{2l\epsilon} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\xi+\epsilon}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\xi-\epsilon}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{P}{2l} - \frac{P}{2l\epsilon} (-\epsilon) = 0 \end{aligned}$$

b) $0 \leq \xi < \epsilon$

$$\begin{aligned} -\frac{P}{2l} + \sigma_{y1} + \sigma_{y2} &= -\frac{P}{2l} - \frac{P}{2l\epsilon} \\ &\left[\tan^{-1} \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\xi+\epsilon}{2} \right) \right\} + \tan^{-1} \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon-\xi}{2} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

昭和 10 年 5 月]

$$\begin{aligned} &= -\frac{P}{2l} - \frac{P}{2l\epsilon} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\xi+\epsilon}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon-\xi}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{P}{2l} - \frac{P}{2l\epsilon} (\pi - \epsilon) = -\frac{P\pi}{2l\epsilon} = -\frac{P}{2s} \end{aligned}$$

F_s から導出された σ_{ys} は (38) から $\eta=0$ の時零である。又 F_e から導出された τ_1 , F_s から導出された τ_s は夫々 (44) 及び (42) から $\eta=0$ の時零である。これ等の結果から考へれば上面における集注荷重の條件は全く F_e に依つて充されて居る事が分る。従つて荷重附近の内力状態は、 F_s から導出されたものがその大部分を占め F_e から導出された σ_{xs} は大さはそれ程小ではないが大體激しい變化の無い分布をなし、 σ_{ys} , τ_s は何れも荷重點附近で甚だ小であらうと考へられる。依つて荷重點附近の x 軸に直角な各断面における諸内力の最大の位置は殆ど F_e から導出したもので決定される。

i) $\sigma_{x1} + \sigma_{x2}$

(34) から $\sigma_{x2} = \eta \cdot \partial \sigma_{x1} / \partial \eta$ なる故に、

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\sigma_{x1} + \sigma_{x2}) = 2 \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial^2 \sigma_{x1}}{\partial \eta^2}$$

(35) から

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{x1}}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sigma_{x2}}{\eta} \right) = \frac{P}{4l\epsilon} \\ &\left[\frac{-\sinh \eta \cdot \sin(\xi+\epsilon)}{\{\cosh \eta - \cos(\xi+\epsilon)\}^2} - \frac{-\sinh \eta \cdot \sin(\xi-\epsilon)}{\{\cosh \eta - \cos(\xi-\epsilon)\}^2} \right] \end{aligned}$$

故に $\partial(\sigma_{x1} + \sigma_{x2})/\partial\eta = 0$ を充す η の値は (35) を参照すれば、

$$\frac{2 \sin(\xi + \epsilon)}{\cosh \eta - \cos(\xi + \epsilon)} - \frac{2 \sin(\xi - \epsilon)}{\cosh \eta - \cos(\xi - \epsilon)} - \frac{\eta \cdot \sinh \eta \cdot \sin(\xi + \epsilon)}{\{\cosh \eta - \cos(\xi + \epsilon)\}^2} + \frac{\eta \cdot \sinh \eta \cdot \sin(\xi - \epsilon)}{\{\cosh \eta - \cos(\xi - \epsilon)\}^2} = 0$$

即ち

$$\frac{2\{\cosh \eta - \cos(\xi + \epsilon)\} - \eta \cdot \sinh \eta}{\{\cosh \eta - \cos(\xi + \epsilon)\}^2} \cdot \sin(\xi + \epsilon) = \frac{2\{\cosh \eta - \cos(\xi - \epsilon)\} - \eta \cdot \sinh \eta}{\{\cosh \eta - \cos(\xi - \epsilon)\}^2} \cdot \sin(\xi - \epsilon) \quad (45)$$

ϵ, ξ, η は何れも小であるから

$$\cosh \eta \approx 1 + \frac{\eta^2}{2} \quad \cos(\xi \pm \epsilon) \approx 1 - \frac{(\xi \pm \epsilon)^2}{2},$$

$$\sinh \eta \approx \eta, \quad \sin(\xi \pm \epsilon) \approx \xi \pm \epsilon$$

とすれば (45) から

$$\frac{(\xi + \epsilon)^3}{\eta^2 + (\xi + \epsilon)^2} = \frac{(\xi - \epsilon)^3}{\eta^2 + (\xi - \epsilon)^2} \quad (46)$$

(46) が成立するためには先づ $|\xi| > \epsilon$ なる事を必要とする。

この条件の下に両邊を平方に開くと

$$\begin{aligned} \frac{(\xi + \epsilon)^{3/2}}{\eta^2 + (\xi + \epsilon)^2} &= \frac{(\xi - \epsilon)^{3/2}}{\eta^2 + (\xi - \epsilon)^2} \\ \eta^2 &= \frac{(\xi + \epsilon)^3(\xi - \epsilon)^{3/2} - (\xi - \epsilon)^3(\xi + \epsilon)^{3/2}}{(\xi + \epsilon)^{3/2} - (\xi - \epsilon)^{3/2}} \\ &= \frac{[(\xi + \epsilon)^{1/2} - (\xi - \epsilon)^{1/2}](\xi + \epsilon)^{3/2}(\xi - \epsilon)^{3/2}}{[(\xi + \epsilon)^{1/2} - (\xi - \epsilon)^{1/2}][(\xi + \epsilon) + (\xi + \epsilon)^{1/2}(\xi - \epsilon)^{1/2} + (\xi - \epsilon)]} \\ &= \frac{(\xi^2 - \epsilon^2)^{3/2}}{2\xi + (\xi^2 - \epsilon^2)^{1/2}} \quad (47) \end{aligned}$$

$|\xi| < \epsilon$ の時は (33) から常に $\sigma_{x1} < 0$ でその絶対値は η の増加と共に減ずる。又 (55) から $\sigma_{x2} > 0$ で η の充分小な間は η の増加と共に増す。従つて $\sigma_{x1} + \sigma_{x2}$ の最大の圧縮内力は上面に起りその値は b の計算を参照すれば

$$-\frac{P}{2s} + \frac{P}{2l} \quad (48)$$

即ち ξ に無関係となる。従つて $|\xi| < \epsilon$ の場合に上面における σ_x の値は $-P/2s + P/2l + (\sigma_{xs})_{\eta=0}$ である。而して σ_y の値は $-P/2s$ であるから 2 次元の内力の状態と考へれば、上面における x 方向の歪は

$$\frac{1}{E} \left[-\frac{P}{2s} + \frac{P}{2l} + (\sigma_{xs})_{\eta=0} + \frac{1}{m} \cdot \frac{P}{2s} \right] \quad (49)$$

茲に E は Young 率、 m は Poisson 氏常数である。 $(\sigma_{xs})_{\eta=0}$ は (27) から、 $|\xi|$ は十分小であるから、(21) を参照すれば負である事が分る。且 $m > 1$ であるから (49) は負即ちこの部分は収縮する。従つて荷重との接觸面に磨擦の存在する様な場合には、この収縮は幾分妨害されそのため上面の充分近くに於て、 $|\xi| < \epsilon$ 範囲では x 方向の圧縮内力は減じ、 $|\xi| > \epsilon$ 範囲では引張内力が減ずるであらう。

$$\begin{aligned} \text{ii) } -\frac{P}{2l} + \sigma_{y1} + \sigma_{y2} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\frac{P}{2l} + \sigma_{y1} + \sigma_{y2} \right] &= \frac{\partial}{\partial \eta} [\sigma_{y1} + \sigma_{y2}] = \frac{\partial}{\partial \eta} [\sigma_{x1} - \sigma_{x2}] = \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &\left[\sigma_{x1} - \eta \cdot \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial \eta} \right] = -\eta \frac{\partial^2 \sigma_{x1}}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

故に $\partial \left[-\frac{P}{2l} + \sigma_{y1} + \sigma_{y2} \right] / \partial \eta = 0$ を充す η の値は i) を参照すれば

$$\eta = 0, \quad \left. \begin{aligned} \frac{\sin(\xi + \epsilon)}{\{\cosh \eta - \cos(\xi + \epsilon)\}^2} &= \frac{\sin(\xi - \epsilon)}{\{\cosh \eta - \cos(\xi - \epsilon)\}^2} \end{aligned} \right\} \dots (50)$$

(50) の第 2 式は $|\xi| > \epsilon$ の時にだけ成立する。i) と同様に ϵ, ξ, η が何れも小とすれば、(50) の第 2 式は

$$\begin{aligned} \frac{(\xi + \epsilon)^{1/2}}{\eta^2 + (\xi + \epsilon)^2} &= \frac{(\xi - \epsilon)^{1/2}}{\eta^2 + (\xi - \epsilon)^2} \\ \eta^2 &= \frac{(\xi + \epsilon)^2(\xi - \epsilon)^{1/2} - (\xi - \epsilon)^2(\xi + \epsilon)^{1/2}}{(\xi + \epsilon)^{1/2} - (\xi - \epsilon)^{1/2}} \\ &= (\xi^2 - \epsilon^2)^{1/2} [(\xi + \epsilon) + (\xi^2 - \epsilon^2)^{1/2} + (\xi - \epsilon)] \\ &= (\xi^2 - \epsilon^2)^{1/2} [2\xi + (\xi^2 - \epsilon^2)^{1/2}] \quad (51) \end{aligned}$$

$|\xi| > \epsilon$ の時 $\eta = 0$ では $-P/2l + \sigma_{y1} + \sigma_{y2} = 0$ であるからこの最大圧縮内力の位置は (51) で與へられる。 $|\xi| < \epsilon$ の時は i) を参照すれば常に $\partial[-P/2l + \sigma_{y1} + \sigma_{y2}]/\partial\eta \geq 0$ 、従つて最大圧縮内力は上面で起るその値は明かに $-P/2s$ である。

iii) τ_1

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial \eta} = 0 \quad \text{の値は (44) から}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sinh \eta + \eta \cosh \eta}{\cosh \eta - \cos(\xi - \epsilon)} - \frac{\eta \cdot \sinh^2 \eta}{\{\cosh \eta - \cos(\xi - \epsilon)\}^2} \\ - \frac{\sinh \eta + \eta \cosh \eta}{\cosh \eta - \cos(\xi + \epsilon)} + \frac{\eta \cdot \sinh^2 \eta}{\{\cosh \eta - \cos(\xi + \epsilon)\}^2} = 0 \end{aligned}$$

ϵ, ξ, η を小とすれば i), ii) と同様に、(45) を参照すれば

$$\eta = 0, \quad \frac{(\xi - \epsilon)^2}{\{\eta^2 + (\xi - \epsilon)^2\}^2} = \frac{(\xi + \epsilon)^2}{\{\eta^2 + (\xi + \epsilon)^2\}^2} \quad (52)$$

$\eta = 0$ の時は $\tau_1 = 0$ で従つて最大値の位置は (52) の第 2 式で與へられる。第 2 式に就ては

a) $|\xi| > \epsilon$

$$\begin{aligned} \frac{\xi - \epsilon}{\eta^2 + (\xi - \epsilon)^2} &= \frac{\xi + \epsilon}{\eta^2 + (\xi + \epsilon)^2} \\ \eta^2 &= \xi^2 - \epsilon^2 \quad (53) \end{aligned}$$

b) $|\xi| < \epsilon$

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon - \xi}{\eta^2 + (\xi - \epsilon)^2} &= \frac{\xi + \epsilon}{\eta^2 + (\xi + \epsilon)^2} \\ \eta^2 &= \epsilon^2 - \xi^2 \quad (54) \end{aligned}$$

4. 両端固定の場合

両端ビルトインと固定との相違は前者は各断面における軸方向の内力の總和が零に等しく後者は両端の距離の不変な事であつて他の条件は全く同一である。梁の伸びは

第 5 圖

第 8 圖

第 9 圖

第 6 圖

第 10 圖

第 7 圖

第 11 圖

第 12 圖

$$2 \int_0^l \epsilon_x dx$$

ϵ_x は歪で内力は 2 次元の内力分布とすれば

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right)$$

σ_x, σ_y に (5) (6) の式を用ふれば明かに

$$2 \int_0^l \epsilon_x dx = 2 \cdot \frac{Pl}{2lEm} = \frac{P}{mE}$$

故に両端固定の場合は、軸方向の内力 σ_x に

$$\frac{P}{mE} \times \frac{E}{2l} = \frac{P}{2lm} \quad \dots\dots\dots (55)$$

だけの圧縮内力を加ふれば宜い。他の諸内力はビルトインの場合と同一である。

5. 計 算 例

$\sigma_{xs}, \sigma_{ys}, \tau_s$ は w が大となる程その収斂性が悪くなる。これは $A, B, 2$ 特異点の影響がこれに含まれて居るため、従つて實計算には $0 \leq w \leq h$ の範囲を取扱つた。これは各内力は $x=l/2, y=0$ の点に對し喰違對稱に分布して居るため $0 \leq w \leq h$ の範囲だけ知れば充分である。

荷重點附近の断面における計算には、先づ (47), (51), (53), (54), 等に依つてその極値を求めて後多くの點を選びその値を求めた。第 5 圖乃至第 15 圖は何れも $l=2h$ の場合に於て夫々圖に記入せる様な断面における諸内力の分布を示した
昭和 10 年 5 月]

ものである。横軸に内力を取り何れも $P/2l$ を単位とする。上下線上の小円は夫々上面及び下面における曲線の位置を明示したものである。尚比較のため從來の理論から求めた分布を點線で記入した。

第 16 圖 (I) は中央下面における最大引張内力の本計算から求めた値と從來の計算から求めた値の比を縦軸に取り横軸に l/h を取つて圖示したもので、これを見れば從來の計算から求めた値より一般に小であるが $l/h \approx 2.25$ 附近で最小値を有し、 l/h が甚小になればこの比は反つて急激に大となる。同圖 (II) は同じものゝ両端固定の場合である。併し 3 の i) に述べた様に荷重との接觸面に磨擦の存在する時はこれ等の比は幾分小になるであらう。

同圖 (III) は $|x|=l/2, y=0$ 點における τ の値の本計算から求めた値と從來の計算から求めた値の比を示したもので、本計算から求めた方が一般に大であるが圖の様に極大値を有し、 l/h が甚小になればこの比は急激に小になる。

第 17 圖は $(\partial \sigma_x / \partial y)_{y=0}$ の本計算から求めた値と從來の計算から求めた値の比を l/h を横軸に取つて示したものである。 l/h が甚小になるとこの比は急激に増して居る。即ち第 16 圖 (I), (II) に示した通りに l/h が小になれば中央最下面の引張内力は直線的分布のものに比して著しく大となるが僅かに内部へ入ると直線分布のものに比して引張内力の減小度が著しく大となる事を示す。

第 13 圖

第 15 圖

第 16 圖

第 14 圖

第 17 圖

第18圖(I)は $\varepsilon=0.01$ の場合に $\sigma_{x1}+\sigma_{x2}$ の最大圧縮内力を縦軸に取り ξ を横軸に取った曲線で内力の単位は同じく $P/2l$ である。 ξ の小になる程最大圧縮内力増し $\xi=\varepsilon$ の所で不連続となり以下一定である。同圖(II)は $\varepsilon \rightarrow 0$ の場合における同じものゝ曲線で兩者を比較し且 σ_{xs} は ε が小であれば殆どこれに無関係なる事を考へれば、荷重點附近の σ_x の最大圧縮内力は ξ が ε に比しやゝ大となれば ε の大さには殆ど無関係、従つて集注荷重の分布状態にも殆ど無関係であらう。他の諸内力に対しても同様な事が想像出来る。

6. 結 言

梁の長さが小になるとビルトインの定義は従來のものでは不完全で、完全なビルトインと考へられるものに就て2次元

的に内力を求め、従來の計算から求めたものとの種々な相違を比較した。

又両端固定とビルトインとはその軸方向の内力だけに差を生じ、前者の方が軸方向の圧縮内力が大となる事を示した。本計算は荷重との接觸面の磨擦及び $P/2s$ が相等大となるとこの附近の材料が歪性状態に達する事は考へに入れて居ないが可成正確なものと思はれる。

終りに本論文發表に際し種々御便宜御助言を賜つた九大小野教授石橋助教授に感謝致します。

第 18 圖

回轉円板の遠心力による内力の研究(第3報) エボナイト円板による實驗

(昭和9年11月10日 應用力学講演會に於て講演)

正員 工 学 士 安 川 寛

On the Centrifugal Stress of Rotating Disc (Report 3) Experiment of Ebonite Disc

(Read before the Meeting of Applied Mechanics Nov. 11 1934.)

By HIROSI YASUKAWA, Kōgakusi, Member

1. 緒 言

拙著“Strength of High Speed Rotating Discs of Various Sections⁽¹⁾”,及び“寒天による回轉円板の實驗⁽²⁾”

をそれぞれ“回轉円板の遠心力による内力の研究第1報及び第2報と稱する事にす。寒天による實驗においては測定精度が悪く實驗方法それ自身も不充分な點多く單に傾向を知る程度の實驗に過ぎないからこれを補ふ目的で各種の斷面形を有するエボナイト円板を用ひこれを回轉させた時の遠心力

[第1巻第2號

(1) 機械學會誌 第32巻第145號 昭和4年5月 199頁

(2) 同 上 第35巻第178號 昭和7年2月 120頁