機械学会論文集

第1巻 第3号

昭和10年8月

梁の強さにおける剪断應力の影響に関して

(昭和9年4月1日 第11期定期總會に於て講演)

正員 砂谷 智導⁽¹⁾

准員 南川 祥三郎⁽²⁾

Effect of Shear Stress on the Strength of a Straight Beam

By Chidō SUNATANI, Member

Shōsaburō MINAGAWA, Associate Member

摘 要

從來真直梁の強さは普通の設計法では單に所謂纖維應力のみから定められて居るが、本論文ではこの強さにおける剪断應力の影響を直断面が矩形及び円輪形である兩場合に就き寸法割合の廣範圍に亘りて計算から求め、その結果寸法割合が可なり極端でない限り真直梁の強さの定め方は從來の儘にて差支ないことを示した。

1. 緒 言

從來真直梁の強さは普通の設計法では單に所謂纖維應力のみから定められて居るが剪断應力のこの強さにおける影響が梁の諸種寸法に於て如何様であるか又梁寸法の如何なる範圍内に於てこの影響を考慮外に置き得るかに就ては未だ明確な指示がないやうである。茲に本論文では直断面が矩形及び円輪形である兩場合の真直梁の無荷重部に就き寸法割合の廣範圍に亘つて剪断應力の上記影響を計算式から求め且上記範圍の明示を得ようとする。因に本論文では應力並に強さの計算は著者の1人が提唱する真直梁の應力式⁽³⁾及び固体破損の法則⁽⁴⁾に據つた。

2. 應力分布状態

梁の設計に於て普通用ひる直断面形に種々あるが、本論文では、その中簡単に取扱ひ得る矩形及び円輪形直断面の真直梁（嚴格には、その無荷重部）に就いて論ずる。尙矩形直断面の梁に於ては、曲げ平面がこれを左右對稱形に分つ場合だけを取扱ふ。斯やうな場合は任意點の應力は下記で示される⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \widehat{zz} &= My/I & \widehat{xx} &= \widehat{yy} = \widehat{xy} = 0 \\ \widehat{xz} &= -\{F/2(1+\sigma)I\} \partial \chi / \partial y \\ \widehat{yz} &= \{F/2(1+\sigma)I\} \{\partial \chi / \partial x + \sigma x^2 - (1+\sigma)y^2\} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

但し z 軸は梁軸、 yz 面は曲げ平面、 zx 面は中立面、 M 、 F は與へられた點を通る直断面における曲げモーメント及び

剪断力、 I は中立軸に對する直断面の慣性モーメント、 σ はポアソン比、 χ は平面調和函數で、その周邊條件は

$$\chi = -\frac{1}{3}\sigma x^3 + (1+\sigma) \int y^2 dx + k \dots (2)$$

この式に於て積分は直断面の周邊に沿ふて行ひ、 k はその積分常數である。

矩形直断面の真直梁における應力：—

矩形並に円輪形直断面の梁における應力の計算式は St. Venant の式から已に求まつては居るが、上記 (1) (2) 式から求める方が幾分手短である。その概要は矩形直断面では次記の如くである。直断面の巾を $2a$ 、厚さを $2b$ とする。然れば χ の周邊條件は (2) 式から

$$\left. \begin{aligned} \text{邊 } x=\pm a \text{ に於て } \chi &= \mp \frac{1}{3}\sigma a^3 + k = \text{一定} \\ \text{邊 } y=\pm b \text{ に於て } \chi &= -\frac{1}{3}\sigma x^3 + (1+\sigma)b^2 x + k \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

これ等の條件に適合する平面調和函數として χ に下記形を與へる。 $\chi = k + \sum A_n \sin(n\pi x/a) \cosh(n\pi y/a)$ この式は明かに (3) の第1式を満足する。又 A_n を下記値に取れば (3) の第2式をも満足する。

$$A_n = (-1)^n (2a/n\pi) \left\{ \frac{1}{3}\sigma a^2 (1 - \sigma/n^2\pi^2) - (1+\sigma)b \right\} / \cosh(n\pi b/a)$$

但し $n=1, 2, 3, \dots, \infty$

即ち本問題の χ は次記で示され得る。

$$\chi = k + (2a/\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left\{ \frac{1}{3}\sigma a^2 (1 - \sigma/n^2\pi^2) - (1+\sigma)b \right\} \cosh(n\pi y/a)$$

(1) (2) 東北帝國大学 (3) 砂谷、真直梁の理論に関する考察一二 37 卷 207 號昭和9年 (4) 砂谷: Laws of Failure of Solid Bodies due to Stress 25 卷 74 號大正11年

$$-(1+\sigma)b^2 \left\{ \sin(n\pi x/a) \cosh(n\pi y/a) / \cosh(n\pi b/a) \right\} \dots\dots\dots (4)$$

依つて本問題における任意點の應力を直斷面單位面積當り剪斷力 $[F/(4ab) = \zeta_m]$ に對する比で示すならば、(1) 式から下記が得られる。

第1a圖 縦剪斷應力分布圖 (矩形)

$$\left. \begin{aligned} \widehat{zz}/\zeta_m &= 3ly/b^2, \\ \widehat{xz}/\zeta_m &= \frac{6\sigma}{(1+\sigma)\pi^2} (a/b)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\pi x/a) \\ &\quad \sinh(n\pi y/a) / \cosh(n\pi b/a), \\ \widehat{yz}/\zeta_m &= \frac{3}{2(1+\sigma)} \left\{ (1+\sigma)(1-z^2/b^2) + \frac{1}{3}\sigma(3x^2/a^2 - 1)a^2/b^2 \right\} \\ &\quad + \frac{6\sigma}{(1+\sigma)\pi^2} (a/b)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos(n\pi x/a) \\ &\quad \cosh(n\pi y/a) / \cosh(n\pi b/a), \\ \widehat{xx} = \widehat{yy} = \widehat{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

但し $M/F \equiv l$ と置いた。この l は単一荷重の片持ち梁の場合には與へられたる直斷面から荷重力線迄の距離に該當するが、一般の場合にはこれを單に M/F なる比を表す量と心得る。依つて本論文では $l=0$ なる場合を含めて論ずるのであるが、この場合は荷重點に極めて接近した直斷面の意味でなく、 $M=0$ なる直斷面を考へることとする。

(5) 式の第2第3式に於て吾人の注意を促すことは $(a/b)^2$ が主なる係數となつて居るから梁の巾が廣く厚さが薄くなる

に従つて、一直斷面中剪斷應力の場所による相違が甚だしくなり、又 ζ_m の一定値に就ては、より大なる剪斷應力が起ることである。第1a, b, c 圖は巾が厚さの10倍である矩形直斷面の剪斷應力分布状態を示す。これ等の圖に於て縦又は横剪斷應力の最大値が梁の表面で起つて居ることが着目される。

円輪形直斷面の眞直梁における應力：—

円輪形の内、外半径を a_0, a_1 (これ等を共通に a で表はす) とすれば、

内外周邊では

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta$$

第1b圖 横剪斷應力分布圖 (矩形)

但し r, θ を円座標とする。然れば χ の周邊條件は

$$\chi = k - \frac{1}{3}\sigma a^3 \cos^3 \theta - (1+\sigma)a^3 \int_0^\theta \sin^3 \theta d\theta$$

$$\text{即ち } \chi = k + \frac{1}{4}(3+2\sigma)a^3 \cos \theta - \frac{1}{12}(1+2\sigma)a^3 \cos 3\theta$$

この條件は χ を次記形の平面調和函數にとり

$$\chi = k + \sum (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta$$

且係數 A_n, B_n

を下記値にとることに依つて満足される。

第1c圖
剪斷應力分布圖
(矩形)

$$A_1 = \frac{1}{4}(3+2\sigma)(a_0^2 + a_1^2), \quad B_1 = -\frac{1}{4}(3+2\sigma)a_0^2 a_1^2,$$

$$A_3 = -\frac{1}{12}(1+2\sigma), \quad \text{この他の係數は何れも零}$$

即ち本問題の χ は次記で示される。

$$\chi = k + \frac{1}{4}(3+2\sigma) \{ (a_0^2 + a_1^2)r - a_0^2 a_1^2 r^{-1} \} \cos \theta - \frac{1}{12}(1+2\sigma)r^3 \cos 3\theta$$

依つて本問題における任意點の應力は矩形直断面におけると同様に、下記で示される。

$$\left. \begin{aligned} \widehat{zz}/\zeta_m &= [4\rho l / \{a_1(1+\rho_0^2)\}] \sin \theta, \\ \widehat{xz}/\zeta_m &= [-1/\{2(1+\sigma)(1+\rho_0^2)\}] \{ (3+2\sigma)\rho_0^2\rho^{-2} \\ &\quad + (1+2\sigma)\rho^2 \} \sin 2\theta \\ \widehat{yz}/\zeta_m &= [1/\{2(1+\sigma)(1+\rho_0^2)\}] \{ (3+2\sigma)(1+\rho_0^2 \\ &\quad + \rho_0^2\rho^{-2} \cos 2\theta) - 2\rho^2 \} + (1+2\sigma)\rho^2 \cos 2\theta, \\ \widehat{xx} &= \widehat{yy} = \widehat{xy} = 0, \text{ 但し } \rho_0 = a_0/a_1, \rho = r/a_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

第2圖 剪断應力分布圖(円輪形)

力は常に内側円周にて最大で外側に行くに従つて減少する。又 θ が零でその値最大である。 θ 増すに従つて次第に減少し θ が $\pi/2$ で消失する。尚 θ が零の場所ではその方向は常に半径に直角であるが、 θ 増すに従つて漸次外方向に向ふ。

3. 強 さ

固体破損の法則から、固体の一點における破損傾向 (R) は次記で示さる。

$$R = T_1 - T_3 + \mu(T_1 + T_3)$$

但し T_1, T_3 は該點における代數的最大並に最小主應力であり μ は滑り破損では $\sin 20^\circ$ 開き破損では $\cos 20^\circ$ を以て示される常數である。而して眞直梁では

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \widehat{zz} + \left\{ \frac{1}{4} \widehat{zz}^2 + \widehat{xz}^2 + \widehat{yz}^2 \right\}^{1/2}, \\ T_3 &= \frac{1}{2} \widehat{zz} - \left\{ \frac{1}{4} \widehat{zz}^2 + \widehat{xz}^2 + \widehat{yz}^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\text{依つて } R = \{ \widehat{zz}^2 + 4(\widehat{xz}^2 + \widehat{yz}^2) \}^{1/2} + \mu \widehat{zz} \quad (7)$$

この傾向の最大値で眞直梁の強さが論ぜられる。

矩形直断面の梁の強さ：—

(5), (7) 式から、この場合の R が求まる。この式は少しく複雑であるため R が最大である位置並に R の最大値
昭和10年8月]

を代數的に定むることが困難と思はれる。依つてこれ等を圖解的に定めた。第3a, b圖はその例を示す。第3a圖は巾が厚さの10倍、長さと同厚さの場合の滑り破損傾向状態で第3b圖は同じ場合の開き破損傾向状態を示す。取扱ひの便宜のため縦座標に $R/\zeta_m \equiv P_1$ を取つた。第3a圖に於

第3a圖 滑り破損分布圖(矩形)

て滑り破損傾向の最大は中立面より b , 曲げ平面より $0.825a$ なる點で起りその P_1 は 3.26 である。開き破損の場合では第3b圖に於て中立面より b , 曲げ平面より $0.835a$ の點で起りその P_1 は 4.18 である。而してこの場合繊維應力のみを考へ P_1 は開き破損では 2.89 滑り破損では 2.01 である。

円輪形直断面の梁の強さ：—

(6), (7) 式からこの場合の R が求まる。併し取扱ひの都合から R の代りに $2(1+\sigma)(1+\rho_0^2)R/\zeta_m \equiv P$ を考へる。然れば

$$P = a \sin \theta + (\beta^2 - \gamma \sin^2 \theta)^{1/2} \quad (8)$$

但し

$$\alpha = 8\mu(1+\sigma)(l/a)\rho > 0,$$

第3b圖 開き破損分布圖(矩形)

$$\beta = 2(3+2\sigma)(1+\rho_0^2+\rho_0^2\rho^2) - 2(1-2\sigma)\rho^2 > 0,$$

$$r = 16\{(3+2\sigma)\rho_0^2\rho^2 + (1+2\sigma)\rho^2\} \cdot \{(3+2\sigma)(1+\rho_0^2) - 2\rho^2\} - 64(1+\sigma)^2(l/a_1)^2\rho^2$$

第4a図 最大破損傾向位置 (円輪形—開き破損)

(a) $\theta = \pi/2$ (即ち y 軸上) では $\partial^2 P / \partial \theta^2 = r(\beta^2 - \gamma)^{-1/2} - a$, 依つて $r(\beta^2 - \gamma)^{-1/2} < a$ が成立する部分では P の最大が y 軸上で起ることになる。

(b) $\sin \theta = a\beta / \{r(a^2 + r)\}^{1/2}$ なる曲線上に就ては $\partial^2 P / \partial \theta^2 = -\beta^{-1}r^{-2}\{r(a^2 + r)\}^{1/2}\{r^2 - a^2(\beta^2 - \gamma)\}$, この式に於て明かに $\beta^{-1}r^{-2}\{r(a^2 + r)\}^{1/2} > 0$ である。依つて $r^2 / (\beta^2 - \gamma) > a^2$ が成立する部分では、 P の最大が $\sin \theta = a\beta / \{r(a^2 + r)\}^{1/2}$ なる曲線上で起ることになる。尚 $r^2 / (\beta^2 - \gamma) > a^2$ なる条件に就ては、 $r > 0$ なる場合、この条件は $r(\beta^2 - \gamma)^{-1/2} > a$ となる、又 $r < 0$ なる場合は、(8) 式から P が最大値を取る位置は常に y 軸上に在ること明かであるから、この場合は P の最大値が曲線 (b) で起り得ないことになる。

第4b図 最大破損傾向 (円輪形—開き破損)

以上要するに、 $r(\beta^2 - \gamma)^{-1/2} > a$ ($r < 0$ なる場合を含んで) が成立する部分では、 P の最大は曲線 (b) 上で起ることになる。扱て y 軸上及び曲線 (b) 上の P は夫々次記式で示される。

$$P_{\theta=\pi/2} = a + (\beta^2 - \gamma)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$P_{\theta=\theta_0} = \beta \{(a^2 + r)/r\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

この兩式の右邊は一定直断面では、 ρ だけの函数である故に ρ に就て P の最大値を求めることにより一断面の P 即ち破損傾向の最大値が求まる。而しこれを代數

的に行ふことは困難と思ふ。依つて圖解的にこれを行なつた。第4a, b, c 圖は $a_1 = 2a_0$ なる場合の開き破損傾向に就て求めた一例である。

第4a 圖に於て曲線 A_1D_1 , A_2B_2 , A_3B_3 は l/a_1 が夫々 $1/4$, $3/4$, 1 なる場合の曲線 (b) である。これ等3 曲線中 A_2B_2 , A_3B_3 は y 軸と出會ひ、交點 B_2 , B_3 で $r(\beta^2 - \gamma)^{-1/2} = a$ が成立する。半径が B_2 或は B_3 の半径より大となる部分では $r(\beta^2 - \gamma)^{-1/2} < a$ が成立し、従つてその部分では P 最大は B_2C 或は B_3C 線上で起る。又曲線 A_1D_1 は y 軸に出會はない。故に $l/a_1 = 1/4$ では P 最大は y 軸上で起り得ないことになる。尚上記3 曲線より案ずるに l/a_1 が減ずるに従つて y 軸との交點 B が漸次上昇し遂に直断面外に移り、曲線 AB は A_1D_1 の如く直断面外周と交るに至

第4c図 最大破損傾向立體圖 (円輪形—開き破損)

ることが察せられる。

第4b 圖の曲線 [I] [II] [III] は上記 A_1D_1 , A_2B_2C , A_3B_3C 線上の ρ - P 関係を (9), (10) 式から求めたものである。この圖は曲線 (b) 上では P は常に内側円周上の點 A で最大であり、 y 軸上では外側點 C で最大であることを告げて居る。而して點 A , C における P は夫々下記で示される。

$$P_A = \beta_0 \{(a_0^2 + r_0)/r_0\}^{1/2}, \quad P_C = 8(1+\mu)(1+\sigma)(l/a_1) \quad \dots\dots\dots (11)$$

但し $a_0 \beta_0 r_0$ は a, β, γ の $\rho = \rho_0$ と置いたものである。依つて P_A P_C 兩者の中大なる方によりて與へられた直断面の最大破損傾向即ち該直断面の強さが論ぜられる。

4. 繊維應力のみを考へた強さの誤差

繊維應力のみを考へる場合は1 直断面の最大破損傾向 (R_f) は $(1+\mu)z\hat{z}_1$ で示される。但し $z\hat{z}_1$ は中立軸より最も遠い點の $z\hat{z}$, 従つて

円輪形直断面の場合:—

繊維應力のみを考へての P の最大値 P_f は

$$P_f = 8(1+\sigma)(1+\mu)(l/a_1)$$

この値は即ち P_C の値である。故に前節の記述により $P_C >$

P_A なる場合は、繊維応力のみを考へての強さは少しも誤差を含まないことになり、 $P_A > P_C$ なる場合に於てのみ同強さは下記誤差を含むことになる。

$$(P_A - P_f)/P_A = 1 - 8(1 + \sigma)(1 + \mu)(l/a_1) \{(\beta_0/\gamma_0)(a_0^2 + \gamma_0)\}^{-1/2}$$

従つて $P_A = P_f (= P_C)$ である場合即ち

$$1 - 8(1 + \sigma)(1 + \mu)(l/a_1) \{(\beta_0/\gamma_0)(a_0^2 + \gamma_0)\}^{-1/2} = 0$$

$$\{(\beta_0/\gamma_0)(a_0^2 + \gamma_0)\}^{-1/2} = 0$$

即ち $l/a_1 = \{[(1 - \mu)\rho_0^2 + (1 + \mu)]$

$$- \sqrt{\{(1 - \mu)\rho_0^2 + (1 + \mu)\}^2 - 4\rho_0^2}^{1/2} \beta_0 /$$

$$64(1 + \sigma)^2 \rho_0 \{2(1 + \mu)\}^{1/2} \dots \dots \dots (12)$$

なる場合が上記誤差の有無の境界であり、 l/a_1 がこの値よりも大なる場合は該誤差が零、 l/a_1 がこの値より小なる場合に於て始めて該誤差が生じ、且 l/a_1 が小となる程該誤差が大となることが云はれ得る。

である。この線に於て l/a_1 は A 点即ち無孔円輪形 ($a_0 = 0$) 直断面では約 3/4 (開き破損) 約 1 (滑り破損) であつて、 a_0/a_1 が増すにつれて l/a_1 が増し、無肉円輪形 [$a_0 = a_1$] と

第 5 a 圖 滑り破損誤差圖 (円輪形)

第 5 b 圖 開き破損誤差圖 (円輪形)

第 6 a 圖 滑り破損誤差圖 (矩形)

矩形直断面の場合：—

繊維応力のみを考へての最大破損傾向は

$$Q_f = R_f / \zeta_m = 3(1 + \mu)(l/b)$$

先に示した圖から求めた R/ζ_m の最大値を Q_g で表はすならば、この場合繊維応力のみによる強さが含む誤差は $(Q_g - Q_f)/Q_g$ で示される。尙この場合の誤差有無の境界をば圖解的に求める。

第 5 a, b 第 6 a, b 圖は以上の所論を種々なる寸法の場合に就て求めた結果である。そして第 5 a, b 圖は円輪形直断面の滑り並に開き破損を生ずる際の誤差曲線であり、第 6 a, b 圖は矩形直断面の場合における同意味の誤差曲線である。

これ等の圖面に於て案ずるに、先づ第 5 a, b 圖円輪形直断面に於て、曲線 ABC は誤差有無の境界線 [即ち (12) 式]

昭和 10 年 8 月]

考へられる極端なる直断面では l/a_1 が約 3/2 [開き破損] 約 7/4 [滑り破損] に達する。故に凡ての円輪形 [無孔円輪形を含む] 直断面の場合 l が直断面外径 ($2a_1$) よりも大きい場合は、繊維応力のみを考へての強さは正しいことが察せられる。而して曲線 ABC 以内に於ては、 l/a_1 が小さくなる程誤差大となり、 $l/a_1 = 0$ 即ち $M = 0$ に於て誤差が 100% に達し、 a_0/a_1 の一定値における l/a_1 —誤差関係は略ぼ直線的であることが察せられる。

次に第 6 a, b 圖 [矩形直断面] における本問題の誤差は、

第 6 b 圖 開き破損誤差圖 (矩形)

$b/a = 0$ に於て常に 100% であり、 b/a が増すに従ひ次第に減じ、その減じ方は b/a 並に l/b が小さい程大きく、誤差— b/a 関係は直角双曲線様である、そして誤差=0 は $b/a = \infty$ 並に $l/b = \infty$ に於て起るらしく察せられる。然れば矩形直断面の場合、誤差有無の厳格なる意味における境界線がない

ことになる。然しながら僅少の誤差は、實際的にはないものと見做し得られるを以て、實際問題に於てはその要求する精度に應じ誤差有無の一定境界線が得られる譯である。第 7 a, b 圖は本問題の誤差が 0.5%, 1%, 1.5%, 2.0% なる各場合における $a/b-l/b$ 関係を夫々第 6 a, b 圖より求めたものである。即ち第 7 a, b 圖に於て、曲線 [I] は許容最大誤差が、0.5% である場合の誤差有無の境界線であり、該曲線と

第 7 a 圖 滑り破損等誤差線

は、如何なる範圍に適用可能であるかを、矩形直断面並に円輪形（無孔円形を含む）直断面の兩種の場合につき理論的に求めた。而して先づ應力分布並に破損傾向分布状態を著者の 1 人が提唱する理論から求め、以て最大破損傾向が、矩形の場合は、梁の表面で起ることを示し、円輪形の場合は、内表面又は外表面で起ることを論じた。次に繊維應力のみで計算する強さが含む誤差を求め、それを圖面で示した。そして該

第 7 b 圖 開き破損等誤差線

横軸 l/b 間が誤差なき範圍と見做され得る。その他の曲線 [II], [III], [IV] についても同様である。さて第 7 a, b 圖に於て記せる如き少量の誤差は、普通には許容範圍内にありと見做され得る。然れば矩形直断面の場合も寸法割合 (a, b, l 相互間の比) が可なり異常ならざる限りは、眞直梁の強さは従來の計算にて差支ないことが圖面から察せられる。

5. 結 び

本論文では、普通に繊維應力のみで計算する眞直梁の強さ

誤差は、円輪形直断面の場合は、外径が l 即ち M/F 比よりも小さい時に始めて起り、矩形直断面の場合は、誤差有無の厳格なる意味の境界線はないが、許容誤差量に應じての該境界線が存在する。併しこの場合も、要するに寸法割合（厚さ、巾、 l 相互比）が異常である範圍に於て始めて該誤差が起るとすべきであることを論じた。尙本論文は眞直梁の無荷重部について論じたものであるが、實用的にはその荷重部にも、これを適用し得るだらうと想像する。

彎曲棒及び平板の減衰振動に就て

(昭和 9 年 10 月 15 日 大阪臨時大會講演會に於て講演)

正員 植 松 時 雄⁽¹⁾

On the Damped Vibrations of Curved Rods and Thin Plates

By Tokio UEMATU, Member

摘 要

本文は材料の粘性抵抗を考へに入れて彎曲棒並に平板の振動を二三の簡単な場合に對して取扱つたものである。

1. 緒 言

材料の粘性抵抗を考へに入れて細い彎曲棒の振動を取扱つたものは無いらしく思はれたので⁽²⁾、こゝではこの問題に對し極く簡単な場合を取扱つてみる。尙妹澤博士の提唱された平板の減衰屈曲振動の式⁽³⁾を使つて二三の簡単な場合に對する振動を取扱つてみる。

2. 細 い 彎 曲 棒

(A) 円形輪の半径方向の振動

円形輪の中心線が半径方向へ一樣な大さの變位をするものとして、その自由振動を考へる。

今 T, V, F を運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、減衰函数⁽⁴⁾、 r, u, a を円形輪の半径、中心線の半径方向の變位、棒の斷面積、 ρ, E, ξ を材料の密度、ヤング率、伸

(1) 大阪帝國大学 (2) 航空研究所彙報第 74 號に於て、妹澤博士は眞直棒及び平板の減衰屈曲振動の式を掲げた 後彎曲棒に對しても同様の考へから減衰屈曲振動の式を導き得ることを述べて居る。 (3) 航空彙報：前掲

(4) Lamb, Higher Mechanics 2 版 242 頁、或は Hydrodynamics 6 版 568 頁