$$\frac{d^2\delta_0}{d\beta^2} + a_0^2 \frac{\lambda^2}{\pi^2} \delta_0 = 0 \dots\dots\dots(12)$$

$$\frac{d^2\delta_1}{d\beta^2} + \frac{\lambda^2}{\pi^2} a_0^2 \delta_1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2} (2a_0 a_1 + a_0^2 \cos 2\beta) \delta_0 = 0 \dots\dots(13)$$

等を得る。(12) の解は

$$\delta_0 = A \cos(n\beta - \gamma_0) \dots\dots\dots(14)$$

$$\text{但し } n = a_0 \lambda / \pi$$

となり単振動を示す。(10) の条件が満足されるためには $n=2, 4, 6, \dots(10_2)$ が満足されるためには $n=1, 3, 5, \dots$ でなければならぬ。第1近似として(11)より $T \approx a_0$ とすると

$$T_n = \frac{n\pi}{\lambda}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

となり、これを角振動数に變へると $2\lambda/n$ となる。而して(7)における外力 $\varphi(t)$ の角振動数は 2ω なる故に

$$2\omega = 2\lambda/n$$

$$\text{又は } \omega = \lambda/n, \quad n=1, 2, 3, \dots\dots\dots(15)$$

なる場合に振動が激しい。故に第1近似としては危険速度範囲の代りに一定の危険速度を得る。 λ は近似的に試験片の自然角振動数を示す故に回轉角速度が自然振動の整数分の1なる時が危険速度である。

第2近似は(14)を(13)に入れることにより得られる。即ち(14)を(13)に代入し δ_1 の解が(10)₁(10)₂の条件を満足するが如き週期を求めると一定の危険速度の代りに危険速度範囲を得るがその計算法は省略する。

円筒に関する塑性理論並に焼嵌め及び力嵌め に関する計算式に就て

(昭和9年10月15日 大阪臨時大會講演會に於て講演)

正員 永島菊三郎⁽¹⁾

On the Theory of Plasticity applied to the Hollow Cylinder and the Theory of Force Fits.

By Kikusaburô NAGASHIMA, Member

摘 要

内圧を受ける円筒の一部分が塑性變形を起した場合に對して「塑性域の体積は不變である」との假定を置いて問題を解いたところ、比較的容易に矛盾の無い結果が得られた。又円筒の強さに関する Cook 及び Robertson の實驗結果を塑性理論から吟味し、この實驗結果が從來良く材料破壊の法則の適否に對する實驗の根據とされてゐた事柄に就て批判を試みた。その結果この實驗結果はその目的に對しては不適當である事が解つた。尙円筒が外圧を受ける場合における一部分塑性變形の問題を解き、これ等の内圧及び外圧を受ける円筒に對する解から、焼嵌め及び力嵌めに於て円筒の一部分が塑性變形を起す場合に對する締代と直圧力との關係を明かにした。

1. 緒 言

内圧を受ける円筒の塑性理論は、既に中原博士⁽²⁾及び Nádai 氏⁽³⁾に依つて研究されてゐる。然し中原博士及び Nádai 氏は「塑性變形は体積不變の變形である」との假定から進んでゐる⁽⁴⁾。又中原博士は円筒の場合の略算式として斷面の面積が不變であるとして計算を進めてゐる場合もあるが、斯様にすれば軸方向の内力を省略して計算を進めなければ計算が困難と成る⁽⁵⁾。

筆者は一つの略算法として一部分塑性變形の問題を「塑性域の体積が不變である」との假定を置いて解いた。而して斯様な假定は嚴密には成立しないが、實測結果⁽⁶⁾から見れば斯様に假定しても大きな誤差は生じない場合が屢々存在する。

一般に焼嵌め又は力嵌めに於ては、一部分降伏又は一部分塑性變形の場合が多い。特に車輪の轢に軸を力嵌めする様な場合には、轢が一部分降伏状態となる事が多い。それで焼嵌め又は力嵌めに於て一部分降伏、又は一部分塑性變形の場合に對する計算式を、円筒の塑性理論の應用として求めた。

(1) 住友製鋼所 (2) 中原登治郎「鉛の機械的性質に就て(第5報)「新しき塑性理論」(本會誌第34卷昭和6年1562~1571頁)及び「軟鋼の塑性について」

(3) Nádai, A. Mechanics of the Plastic State of Matter, "Plasticity." (4) Nádai 氏は内圧を受ける円筒の一部分降伏の場合における内力分布状態を求めてゐるが變形を求めてゐないのでこの點は明かでないが一般理論からは斯様に考へられる。尙 Nádai 氏の塑性理論に關しては筆者「Nádai 氏の塑性理論に就て」に於て批判を試みて置いた

(5) 前掲「新しき塑性理論」では斯様な省略を行つてゐる

(6) T. Ishigaki, On the Change in the Hardness and the Density in Iron and Steel caused by Cold-Working. (Science Reports of the Tôhoku Imperial University, Series I, Vol. XV, No. 6, Dec. 1926)

2. 塑性理論に就て

(1) 内部摩擦説の採用

Nadai は降伏の条件としては Mises の式⁽⁷⁾

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_e^2 \dots\dots(1)$$

が一番良く W. Lode 及び Guest の実験結果⁽⁸⁾に一致すると述べてゐる。然し松村博士⁽⁹⁾は (1) 式よりも一層良く Lode 及び Guest の実験結果に一致する式を與へてゐる。然しこの式は松村博士自身が述べられてゐる様に、單なる實驗公式と見るべきものであつて、一般に塑性理論における限界點を與へる条件とするには不適當である。又 Nadai が云つてゐる様に、「Mises の式が Lode 及び Guest の實驗結果と良く一致する」のは $\sigma_3 = 0$ なる場合である。この場合における、Mises の式と内部摩擦説で $\phi = 3^\circ$ とした場合の限界點を與へる式とを圖示すれば、第 1 圖に示す様な線圖を得る。又 $\sigma_3 = -\frac{1}{2}\sigma_1$ 及び $\sigma_3 = -\sigma_1$ なる関係がある場合における同様の事柄を圖示すれば、第 2 圖及び第 3 圖の様に成る。これ等の圖に依り、 σ_3 が σ_1 に比較して相當大きく且符號反對なる値を有する場合には、Mises の式と内部摩擦説との相違は $\sigma_3 = 0$ の時程著しくない事が解る。厚肉円筒の場合には σ_3 は零乃至相當大なる絶對値を有する負の値を採るから内部摩擦説を採用しても、Mises の式を用いた場合に比較して大なる相違は生じない。

又外圧を受ける円筒の場合には、軸方向の内力は小さく殆ど零であつて切線方向及び半径方向の内力は共に負の値を有し、且それ等の大きさは大差ないものである。従つて第 1 圖の A/C' の間又はその附近であつて Mises の式に依る値と内部摩擦説に依る値とは大差が無い。

Nadai は回轉円板⁽¹⁰⁾の問題を取扱ふ場合には、(1) 式 ($\sigma_3 = 0$) が表はす楕円の弧の代りに直線を用ひ、B 點及び C 點の σ_1 の平均値を以て降伏點と

第 1 圖 $\sigma_3 = 0$ の場合 第 2 圖 $\sigma_3 = -\frac{1}{2}\sigma_1$ の場合 第 3 圖 $\sigma_3 = -\sigma_1$ の場合

第 4 圖

してゐる (第 4 圖参照)。單に降伏點における計算をなす場合にも Mises の式を用ふると計算が困難になるが、その上に中原博士⁽¹¹⁾が云はれてゐる様に、迂りの方向が決定されないの一般に塑性變形をなす場合の計算が出来ない。Nadai も歪硬化を受ける場合の円筒の計算⁽¹²⁾では、最大剪断應力説を使用してゐる。

(2) 内部摩擦説における ϕ の値

砂谷博士⁽¹³⁾に依れば主内力が $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ で且 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ なる関係がある場合には迂り傾向は次式で與へられる。

$$R_s = \frac{1}{2 \cos \phi} \{ \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi \} \dots\dots(2)$$

この迂り傾向 R_s が材料の眞の迂りに對する強さ R_{s0} に等しくなつた場合に迂りを生ずるのである。上式における ϕ は一般には材料に依つて變り、且同一材料でも歪硬化の程度に依つて變る値である⁽¹⁴⁾が、砂谷博士の研究結果では、迂り破壊を生ずる場合には如何なる材料に對しても 20° である⁽¹⁵⁾。然るに $\phi = 3^\circ$ とすれば良く實驗結果と一致する事が中原博士⁽¹⁵⁾に依つて研究されてゐる。本文の計算例では軟鋼の降伏の場合に對して $\phi = 3^\circ$ とした。

(3) 歪硬化を考へた時の塑性理論の基本式

引張試験結果の内力歪線圖 (第 5 圖) で AB 曲線が

$$\sigma_e = a \epsilon^n + \sigma_e \dots\dots(3)$$

で表はされる場合には塑性歪は次式で表はされる⁽¹⁶⁾。

$$\epsilon''_1 = k a^{-\frac{1}{n}} \left\{ \sigma_1 - \sigma_3 \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} - \sigma_e \right\}^{\frac{1}{n}} \dots\dots(4)$$

塑性變形が小さい場合には、AB は直線と見做す事が出来る。従つて

$$\epsilon''_1 = k a^{-1} \left\{ \sigma_1 - \sigma_3 \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} - \sigma_e \right\}$$

上式で k は實驗的に決定すべき値で

(7) Nadai, "Plasticity" 74 頁
(8) 同 67 頁 (9) 松村鶴造「結合應力の問題と設計公式」(本會誌第 32 巻昭和 5 年 187~190 頁)
(10) "Plasticity" 212 頁

(11) 前掲「新しき塑性理論」(12) "Plasticity" 201~203 頁 (13) C. Sunatani, Laws of Failure of Solid Bodies due to Stress (本會誌第 25 巻第 74 號, 大正 11 年 6 月 1~37 頁)
(14) "Plasticity" 62 頁 (15) 中原益治郎「軟鋼の塑性について」(第 1 報)

ある⁽¹⁶⁾。次の計算に於ては $k=1$ とした⁽¹⁷⁾。即ち

$$\varepsilon''_1 = a^{-1} \left\{ \sigma_1 - \sigma_3 \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} - \sigma_e \right\} \quad (5)$$

(4) 降伏状態となる場合の基本式

軟鋼の引張試験を行へば第6圖に示す様な内力歪線圖を得、同圖で A を降伏点とすれば OA 及び AB は夫々直線と見做す事が出来る。降伏状態に於ては次の様な関係が成立する。

第 5 圖

第 6 圖

$$\sigma_1 - \sigma_3 \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = \sigma_e \quad (6)$$

上式は又 (3) における A 点 (弾性限) に就ても同様に成立する。但しこの場合には σ_e は弾性限を意味する。

3. 内圧を受ける円筒の塑性理論 その1

「一般の場合」

(1) 内圧を受ける円筒の内面が初めて弾性限に達した場合の圧力。

今内径 $2r_i$ 、外径 $2r_o$ なる円筒の内面に p_i なる圧力が作用するものとし、且 σ_θ = 切線方向の内力 σ_r = 半径方向の内力 σ_z = 軸方向の内力

とすれば、 $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$ なる関係があるから

(6) 式に依り次の関係が成立する場合に円筒の内面が弾性限に達する。

$$\sigma_{\theta i} - \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \sigma_{r i} = \sigma_e \quad (7)$$

但し此處で $\sigma_{\theta i}$ 、 $\sigma_{r i}$ は夫々 σ_θ 、 σ_r の $r=r_i$ における値である。然るに内圧 p_i を受ける円筒の内面における内力は次の様に與へられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta i} &= p_i \frac{r_o^2 + r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \\ \sigma_{r i} &= -p_i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8) 式を (7) 式に代入すれば次式を得。

$$p_i = \frac{\sigma_e}{\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} + \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}} \quad (9)$$

此處で $n = r_o/r_i$ である。内圧を受ける円筒の内面が初めて弾性限に達した場合の圧力は (9) 式で表はされる。

(16) 前掲「新しき塑性理論」 (17) $k=1$ とするは Rudwik の式にも適合し、中原博士の鉛管の試験及び軟鋼の試験にもあつてゐる

(2) 内圧を受ける円筒の一部分が弾性限を越え他の部分は弾性限以下にある場合。

今弾性限以下にある部分 (弾性域と稱す) と弾性限を越えた部分 (塑性域と稱す) との境界の半径を r_g とし、半径 r_g における半径方向の内力を $\sigma_{r g}$ とする。

弾性域 $r_g \leq r \leq r_o$ に於ては切線方向の内力 σ_θ' 及び半径方向の内力 σ_r' は次の様に表はされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r' &= -\sigma_{r g} \frac{r_g^2}{r_o^2 - r_g^2} \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta' &= -\sigma_{r g} \frac{r_g^2}{r_o^2 - r_g^2} \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

塑性域、 $r_g \geq r \geq r_i$ における内力 σ_θ 及び σ_r を求めるには塑性歪に對しては (5) 式が成立するものとし、且塑性域の体積は不變であるとする。今 ε_θ 、 ε_z 及び ε_r を夫々切線方向、軸方向、半径方向の歪とすれば次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r) \right\} + \frac{1}{a} \left\{ \sigma_\theta - \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \sigma_r - \sigma_e \right\} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

第 7 圖

第 8 圖

此處で E は弾性係數、 μ はポアソン比である。尚上の ε_z の式における E 及び μ は一般には歪の函数であるが歪が小さい範囲内では常數と見做す事が出来る。實際に計算を行つて見るに歪は相當に小さい値であるから、略算式として上の様に置いて差支ないと考へられる。

次に ε_z を弾性域の z 方向の歪とし、且 $\varepsilon_z = \varepsilon_z = \text{常數}$ とすれば次の様に計算を進めることが出来る。

(11) の第1及び第2式より σ_z を消去して

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= -\mu \varepsilon_z + \frac{1}{E} \left\{ \sigma_\theta (1 - \mu^2) - \sigma_r (\mu + \mu^2) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{a} \left\{ \sigma_\theta - (1 - \lambda) \sigma_r - \sigma_e \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11')$$

此處で $\lambda = \frac{2 \sin \phi}{1 + \sin \phi}$

又体積不變の條件に於て歪の二次以上の項を省略すれば

$$\varepsilon_\theta + \varepsilon_z + \varepsilon_r = 0 \quad (12)$$

今半径方向の變位を u とすれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} &= -\varepsilon_z \\ \therefore u &= \frac{C_1}{r} - \frac{\varepsilon_z}{2} r \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

此處で C_1 は積分常數である。上式より ε_θ を求むれば

$$\varepsilon_\theta = \frac{C_1}{r^2} - \frac{\varepsilon_z}{2} \quad (14)$$

(11') 及び (14) 式より ε_θ を消去して σ_θ を求むれば

$$\sigma_\theta = Aa \frac{C_1}{r^2} + A\sigma_e - Aa\varepsilon_z \left(\frac{1}{2} - \mu \right) + B\sigma_r \dots (15)$$

となる。此處で A, B は次式の値を示すものである。

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{E}{a(1-\mu^2)+E}, \quad (0 < A < 1) \\ B &= \frac{a(\mu+\mu^2)+E(1-\lambda)}{a(1-\mu^2)+E}, \quad (0 < B < 1) \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

(15) 式を運動方程式 (17) に代入すれば (18) 式を得。

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \dots (17)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + (1-B)\frac{\sigma_r}{r} = \frac{A}{r} \left\{ \sigma_e - a \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \varepsilon_z \right\} + Aa \frac{C_1}{r^2} \dots (18)$$

(18) 式より σ_r を求むれば次式を得。

$$\sigma_r = \frac{C_2}{r^\beta} + \frac{A}{\beta} \left\{ \sigma_e - a \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \varepsilon_z \right\} - \frac{Aa}{2-\beta} \frac{C_1}{r^2} \dots (19)$$

此處で $\beta = 1-B$, C_2 は積分常数。 (15) 式に上式を代入し

$$\sigma_\theta = (1-\beta) \frac{C_2}{r^\beta} + \frac{A}{\beta} \left\{ \sigma_e - a \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \varepsilon_z \right\} + \frac{Aa}{2-\beta} \frac{C_1}{r^2} \dots (20)$$

次に境界の条件 $r=r_i$ に於て $\sigma_r = -p_i$ 及び $r=r_g$ に於て $\sigma_r = \sigma_{rg}$ に依り C_1 及び C_2 は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{2-\beta}{Aa} \frac{r_0^{2-\beta} \cdot r_i^{2-\beta}}{r_0^{2-\beta} - r_i^{2-\beta}} \left\{ p_i r_i^\beta + \sigma_{rg} r_g^\beta - \frac{A\sigma_e}{\beta} (r_g^\beta - r_i^\beta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{Aa}{\beta} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \varepsilon_z (r_g^\beta - r_i^\beta) \right\} \\ C_2 &= \frac{1}{r_g^{2-\beta} - r_i^{2-\beta}} \left\{ p_i r_i^2 + \sigma_{rg} r_g^2 - \frac{A\sigma_e}{\beta} (r_g^2 - r_i^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{Aa}{\beta} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \varepsilon_z (r_g^2 - r_i^2) \right\} \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

以上 依り σ_r , σ_θ 及び ε_θ が求められたことになる。次に (11) の第 2 式に (19) 及び (20) 式を代入すれば次式を得。

$$\sigma_z = \mu(2-\beta) \frac{C_2}{r^\beta} + 2\mu \frac{A\sigma_e}{\beta} + \left\{ E - 2\mu \frac{Aa}{\beta} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \right\} \varepsilon_z \dots (22)$$

又弾性域に於ては次式が成立する。

$$\sigma_z' = E\varepsilon_z - 2\mu \frac{r_g^2}{r_0^2 - r_g^2} \sigma_{rg} \dots (23)$$

z 方向の釣合ひの条件は焼嵌め又は力嵌めの場合には次の様である。

$$\int_{r_i}^{r_0} 2\pi r \sigma_z dr = 0 \dots (24)$$

[内面に水圧を受ける場合には (24) 式の右邊は $\pi r_i^2 p_i$ となる。]

(24) 式に (22) 及び (23) 式を代入すれば

$$\int_{r_i}^{r_0} 2r \left[\mu(2-\beta) \frac{C_2}{r^\beta} + 2\mu \frac{A\sigma_e}{\beta} + \left\{ E - 2\mu \frac{Aa}{\beta} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \right\} \varepsilon_z \right] dr \\ + \int_{r_0}^{r_g} 2r \left\{ E\varepsilon_z - 2\mu \frac{r_g^2}{r_0^2 - r_g^2} \sigma_{rg} \right\} dr = 0 \dots (24')$$

上式を積分し、 ε_z に就て解けば次式を得。

昭和 10 年 8 月]

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z = -\frac{2\mu}{E} \frac{r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} p_i \dots (25)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{内面に水圧を受ける場合には} \\ \varepsilon_z = \frac{p_i}{E} \frac{2r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \quad \text{となる。} \end{array} \right]$$

$r=r_g$ に於ては $\sigma_\theta' = \sigma_\theta$ 及び $\sigma_\theta - (1-\lambda)\sigma_r = \sigma_e$ が成立するを要する。従つて

$$\sigma_{rg} \left\{ \frac{r_0^2 + r_g^2}{r_0^2 - r_g^2} + \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \right\} = -\sigma_e \dots (26)$$

$$-\sigma_{rg} \frac{r_0^2 + r_g^2}{r_0^2 - r_g^2} = (1-\beta) \frac{C_2}{r_g^\beta} + \frac{A\sigma_e}{\beta} - \frac{Aa}{\beta} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \varepsilon_z \\ + \frac{Aa}{2-\beta} \frac{C_1}{r_g^2} \dots (27)$$

の 2 式より r_g 及び σ_{rg} が求められる。

(3) 円筒の外表面が弾性限に達した場合

円筒の外表面が丁度弾性限に達した場合には、(2) に於て $r_g = r_0$ 及び $\sigma_{rg} = 0$ とすれば良い。従つて

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z = -\frac{2\mu}{E} \frac{r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} p_i \dots (25)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{2-\beta}{Aa} \frac{r_0^{2-\beta} \cdot r_i^{2-\beta}}{r_0^{2-\beta} - r_i^{2-\beta}} \left\{ p_i r_i^\beta - \frac{A\sigma_e}{\beta} (r_0^\beta - r_i^\beta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{Aa}{\beta} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \varepsilon_z (r_0^\beta - r_i^\beta) \right\} \\ C_2 &= \frac{1}{r_0^{2-\beta} - r_i^{2-\beta}} \left\{ p_i r_i^2 - \frac{A\sigma_e}{\beta} (r_0^2 - r_i^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{Aa}{\beta} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \varepsilon_z (r_0^2 - r_i^2) \right\} \end{aligned} \right\} \dots (21')$$

又 $\sigma_{rg} = 0$ なるに依り (26) 式の代りに次式を用ふ。

$$(1-\beta) \frac{C_2}{r_0^\beta} + \frac{A\sigma_e}{\beta} - \frac{Aa}{\beta} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \varepsilon_z \\ + \frac{Aa}{2-\beta} \frac{C_1}{r_0^2} = \sigma_e \dots (20')$$

4. 内圧を受ける円筒の塑性理論 その 2

「降伏状態となる場合」

(1) 内圧を受ける円筒の内面が初めて降伏點に達した場合の圧力

この場合には 3, (1) と全く同様にして円筒の内面が初めて降伏點に達する場合の圧力は次式に依り求め得る。

$$p_i = \frac{\sigma_e}{\frac{n^2+1}{n^2-1} + \frac{1-\sin \phi}{1+\sin \phi}} \dots (9)$$

(2) 内圧を受ける円筒の一部が降伏状態となり他の部分は降伏點以下にある場合

弾性域 $r_g \leq r \leq r_0$ における内力は (10) 式に依つて與へられる。降伏域 $r_0 \geq r \geq r_i$ に於ては σ_θ と σ_r の間には次式が成立する。

$$\sigma_\theta - (1-\lambda)\sigma_r = \sigma_e \dots (6')$$

今 (17) の運動方程式に (6') 式を代入すれば、

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{r} \lambda = \frac{\sigma_e}{r}$$

上式を σ_r に就て解き且 $r=r_i$ に於て $\sigma_r=-p_i$ なる条件を入れる時には次式を得る。

$$\sigma_r = \frac{1}{\lambda} \left\{ \sigma_e - (\sigma_e + \lambda p_i) \frac{r_i^\lambda}{r^\lambda} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

従つて (6') 及び (28) 式より次式を得る。

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\lambda} \left\{ \sigma_e - (1-\lambda)(\sigma_e + \lambda p_i) \frac{r_i^\lambda}{r^\lambda} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

次に $r=r_g$ に於て $\sigma_r=\sigma_r'$ 及び $\sigma_\theta=\sigma_\theta'$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rg} &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \sigma_e - (\sigma_e - \lambda p_i) \frac{r_i^\lambda}{r_g^\lambda} \right\} \\ -\sigma_{rg} \frac{r_0^2 + r_g^2}{r_0^2 - r_g^2} &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \sigma_e - (1-\lambda)(\sigma_e + \lambda p_i) \frac{r_i^\lambda}{r_g^\lambda} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

を得、上式より r_g 及び σ_{rg} が求められる⁽¹⁸⁾。

3 と同様に (24) 式より $\varepsilon_r, \varepsilon_z$ を求むれば

$$\varepsilon_r = \varepsilon_z = -\frac{2\mu}{n^2-1} \frac{p_i}{E} \dots\dots\dots (31)$$

従つて σ_z 及び σ_z' は次式で與へられる。

$$\sigma_z = -\frac{2\mu}{n^2-1} p_i + \frac{\mu}{\lambda} \left\{ 2\sigma_e - (2-\lambda)(\sigma_e + \lambda p_i) \frac{r_i^\lambda}{r^\lambda} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

$$\sigma_z' = -\frac{2\mu}{n^2-1} p_i - 2\mu \sigma_{rg} \frac{n_g^2}{n^2 - n_g^2} \dots\dots\dots (33)$$

此處で $n=r_0/r_i$ 及び $n_g=r_g/r_i$ である。

塑性域の歪 ε_θ は 3 と同様に (14) 式で與へられるから

$r=r_g$ における ε_θ を $\varepsilon_{\theta g}$ とすれば

$$\varepsilon_{\theta g} = \frac{C_1}{r_g^2} - \frac{\varepsilon_z}{2}$$

上式より C_1 を求めこれを (14) 式に代入すれば次式を得る。

$$\varepsilon_{\theta i} = n_g^2 \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{\theta g} - \mu(\sigma_{rg} + \sigma_{rg}') \right\} + \frac{\varepsilon_z}{2} (n_g^2 - 1) \dots\dots\dots (34')$$

第 9 圖及び第 10 圖 円筒 ($n=2$) が内圧を受ける場合の n_g と p_i, σ_θ との関係及び p_i と $\sigma_\theta, \sigma_r, \sigma_z$ との関係

尚 ε_r は (12), (31) 及び (34) 式より求められる。

(3) 円筒の外面が降伏點に達した場合の圧力

円筒の外面が初めて降伏點に達した場合には $r_g=r_0$ とすれば良い。従つて (30) 式は $\sigma_{rg}=0$ 及び (35) 式の様になる。

(18) 本節における此處迄の計算は中原文治郎「軟鋼の塑性について」における計算を盛である

$$p_i = \frac{\sigma_e}{\lambda} (n^\lambda - 1) \dots\dots\dots (35)$$

(4) 計算例

$n=2$ の場合に (28), (29), (30) 及び (32) 式より n_g と σ_{rg} , $\sigma_{\theta g}$, σ_{zg} 及び p_i との関係を求め、これを圖示すれば第 9 圖の様になる。又 p_i と内力との関係を圖示すれば、第 10 圖の様になる。(9), (30) 及び (35) 式から p_i と n_g との関係を求むれば、第 11 圖に示す様に成る。同圖に依り p_i 及び n に依り n_g が如何に變化するか解る。

第 11 圖 円筒が内圧を受ける場合の降伏域の半径と圧力との関係

5. 円筒の強さに関する G. Cook 及び A. Robertson の實驗結果⁽¹⁹⁾に就て

内圧を受ける円筒の強さに関する實驗として屢々引用されてゐる⁽²⁰⁾ Cook 及び Robertson の實驗結果を塑性理論から吟味して見る。

Cook 及び Robertson は軟鋼製円筒が内圧を受ける場合に、円筒内面が初めて降伏状態に達する點を實驗的に求むる方法に就て、次の様に述べてゐる。「円筒の内面における降伏點を決定するために實施し得る唯一の方法は、円筒外径の弾性的伸びを測定する方法である。円筒内の總ての内力が弾性限以下にある場合には、円筒の各部における變形は内圧に比例する。然るに、円筒内面で降伏が發生し初めると、内力の分布状態は變つて斯様な関係は最早成立しない。それ故に伸びを測定する円筒の外部は未だ弾性限以下にあつても、内圧と直径の伸びとの関係を示す曲線を作り、この曲線が直線

(19) G. Cook and A. Robertson, The Strength of Thick Hollow Cylinders under Internal Pressure. (Engng. 1911, Vol. 92, p. 786-789).

(20) A. Moley, Strength of Materials, O. Mohr; Technische Mechanik. Sunatani; Laws of Failure of Solid Bodies due to Stress (前掲) 小野正著材料力学及び山本孝明「圧入嵌合に就て」本會誌第 31 卷昭和 3 年 13-38 頁)等に引用されてゐる

から離れる点を以て円筒内面が降伏点に達した点とする事が出来る。」斯様な考へに依つて實驗的に求めた内圧と外径の伸びとの関係を示す曲線は第12圖に示す様である。然るに内圧を受ける円筒の一部分が降伏状態にある場合の外径の伸びは、(2)に依り次の様に與へられる。

$$\frac{u_0}{r_0} = e_{00} = \frac{1}{E} \left\{ \sigma'_{00} - \mu \sigma'_{20} \right\}$$

此處で σ'_{00} 及び σ'_{20} は (10) 及び (33) 式に依り次の様に表はされる。

$$\sigma'_{00} = -\sigma_{rg} \frac{2n_g^2}{n_g^2 - n_g^2}$$

$$\sigma'_{20} = \frac{p_i}{n^2 - 1} (1 - 2\mu) - 2\mu \sigma_{rg} \frac{n_g^2}{n_g^2 - n_g^2}$$

但しこの場合は内面に水圧が作用する場合であるから

$$e_2 = \frac{p_i}{E} \frac{2}{n^2 - 1} \left(\frac{1}{2} - \mu \right)$$

円筒番號	$n = r_0/r_i$
No. 1	1.35
No. 12	1.79
No. 19	2.45
No. 27	3.65

第12圖 内圧と外径の伸びとの関係

となり、(33)式は少しく變り σ'_{20} は上式の様になる。今例として、 $n=1.5$, $n=2$ 及び $n=3$ の場合に就て u_0 と p_i との関係を求むれば、第13圖に示す $O_1C_1D_1$, $O_2C_2D_2$ 及び $O_3C_3D_3$ の様な曲線を得。但し同圖で p_i を内圧、 e_{00} を外径における $\left(\frac{u}{r}\right)$ を表はすものとする。尙本計算に於ては $\phi=3^\circ$, $\mu=0.3$ とした。この圖から「円筒の内面が初めて降伏状態に達した點に於て p_i と e_{00} との関係は直線的關係から曲線的關係に移るが、その變化は極めて徐々に起り、この點を實驗的に決定する事は困難であらう。」と云ふ事が解る。又第13圖に於て曲線 AB は Cook 及び Robertson の實驗結果を示し、 OC 曲線は (9) 式に依る値を示すものである。今 $n=1.5$ の場合に就て見るに、實驗的に A_1 に相當する點即ち D_1 點を求めたのである。同様に $n=2$ 及び $n=3$ の場合には夫々 D_2 點及び D_3 點を求めたと云ふ事になる。従つて實驗的に求めた内圧と外径の伸びとの関係が直線的關係から離れる點は C_1 , C_2 , C_3 の様な點ではなく D_1 , D_2 , D_3 の様な點であると云ひ得る。第13圖の $O_1C_1D_1$, $O_2C_2D_2$, $O_3C_3D_3$ 曲線と第12圖の曲線とを比較すれば、實驗的には D_1 , D_2 , D_3 の様な點を求める事になり易いのが解る。斯様に實驗的に求めたと考へられる D_1 , D_2 , D_3 點に於ては、内面に近い部分は既に降伏状態に達してゐる。 $n=1.5$, $n=2$ 及び $n=3$ の場合における n_g と p_i との関係を第11圖より求め、これ等を第13圖に記入すれば F_1G_1 , F_2G_2 , F_3G_3 の様になる。これ等の曲線から D_1 , D_2 , D_3 點に相當する内圧に對す n_g を求むれば、何れも $n_g \approx 1.1$ となる。

以上要するに G. Cook 及び A. Robertson の實驗は、昭和10年8月]

性理論より論ずれば適切な實驗ではないと云ふ事が出来る。即ち本實驗方法に依れば A_1C_1 の様に大きい相違を極めて小さい D_1D_1' の様な量に依つて決定せねばならぬ。従つて内面が初めて降伏状態に達した點を決定する事は無理である事が解る。又以上は内部摩擦説に於て $\phi=3^\circ$ とすれば實驗結

第13圖 Cook 及び Robertson の實驗結果と計算結果との比較

果と一致すると云ふ事の證明にはならないが、 $\phi=3^\circ$ としても少しの矛盾もなく實驗結果を説明する事が出来る。

(附記) 此處に吟味した Cook 及び Robertson の實驗結果では、降伏點としては下位降伏點(引張試験)を採つてゐる。然るに Cook はその後の論文⁽²¹⁾に於て上位降伏點と下位降伏點とを考へれば最大剪斷應力説を用ひて相當に良く内圧を受ける円筒の實驗結果を説明出来ると主張してゐる。この Cook の論文に就ては、種々の議論もある事と思ふが、これは本節における筆者の主張を強めるものと考へられる。

6. 外圧を受ける円筒の塑性理論 その1 「一般の場合」

第14圖

第15圖

(1) 外圧を受ける円筒が初めて弾性限に達する條件
内径 $2r_i$, 外径 $2r_0$ なる円筒が外圧 p_0 を受ける場合の内力は次の様に與へられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= -\frac{p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

(21) G. Cook, The Upper and Lower Yield Points in Steel exposed to Non-Uniform Distribution of Stress. (Engng. 1931, Vol. 132, p. 343-345.)

及び $\sigma_z = 0$

軸方向にも水圧を受ける場合には

$$\sigma_z = -\frac{p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_i^2}$$

従つて内力の大きさの順序は $\sigma_z > \sigma_r > \sigma_\theta$ であるから、(6) 式に依り弾性限に達する条件は次の様になる。

$$\sigma_\theta = -\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \sigma_e \quad \dots\dots\dots (7')$$

従つて σ_θ の絶対値が最大なる所が初めに弾性限に達する。

今 $r = r_i$ に於て (7') 式が成立するとすれば (7') 及び (36) 式から

$$p_0 = \frac{n^2 - 1}{2n^2} \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \sigma_e \quad \dots\dots\dots (37)$$

を得、上式に依つて外圧を受ける円筒の内面が初めて弾性限に達する場合の外圧が與へられる。

(2) 外圧を受ける円筒の一部分が塑性歪を起し他の部分は弾性限以下にある場合。

(1) に於て円筒が外圧のみを受ける場合にも、内圧を受ける場合と同様に円筒の内面が最初に弾性限に達する事が解つた。次に円筒の内面に近い部分が弾性限を越えて塑性變形を起し、その外側の部分は弾性限以下にある場合を考へる。

弾性域 $r_g \leq r \leq r_0$ においては σ_r' 及び σ_θ' は次の様に表はされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r' &= -\frac{r_g^2 \sigma_{rg} + r_0^2 p_0}{r_0^2 - r_g^2} + \frac{(\sigma_{rg} + p_0) r_g^2 r_0^2}{(r_0^2 - r_g^2) r^2} \\ \sigma_\theta' &= -\frac{r_g^2 \sigma_{rg} + r_0^2 p_0}{r_0^2 - r_g^2} - \frac{(\sigma_{rg} + p_0) r_g^2 r_0^2}{(r_0^2 - r_g^2) r^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

塑性域 $r_g \geq r \geq r_i$ における内力は次の様にして求める。

3, (2) と同様に次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_z - \mu (\sigma_r + \sigma_\theta) \right\} + \frac{1}{a} \left\{ \sigma_z - \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \sigma_\theta - \sigma_g \right\} \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_r - \mu (\sigma_z + \sigma_\theta) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

又 $\varepsilon_z = \varepsilon_z =$ 常數とし (39) の第 1 式より σ_z を求むれば、

$$\sigma_z = \frac{aE}{E+a} \varepsilon_z + \frac{a\mu}{E+a} \sigma_r + \frac{a\mu + E(1-\lambda)}{E+a} \sigma_\theta + \frac{E}{E+a} \sigma_g \quad \dots\dots\dots (40)$$

(40) 式と (39) の第 2 式より σ_z を消去すれば、

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \left(1 - \frac{a\mu^2}{E+a} \right) \frac{\sigma_r}{E} - \left\{ 1 + \frac{a\mu + E(1-\lambda)}{E+a} \right\} \frac{\mu}{E} \sigma_\theta \\ &\quad - \frac{\mu}{E+a} \sigma_g - \frac{a\mu}{E+a} \varepsilon_z \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

ε_r は又 (13) 式から次の様に與へられる。

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = -\frac{C_1}{r^2} - \frac{\varepsilon_z}{2}$$

上式と (41) 式とから ε_r を消去すれば

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{r^2} + \frac{\varepsilon_z}{2} - \frac{a\mu}{E+a} \varepsilon_z + \left(1 - \frac{a\mu^2}{E+a} \right) \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\mu}{E+a} \sigma_g \\ - \left\{ 1 + \frac{a\mu + E(1-\lambda)}{E+a} \right\} \frac{\mu}{E} \sigma_\theta = 0 \end{aligned}$$

を得。今

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 / \left\{ \frac{\mu}{E} \left(1 + \frac{a\mu + E(1-\lambda)}{E+a} \right) \right\} \\ A_2 &= A_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{a\mu}{E+a} \right) \\ A_3 &= A_1 \frac{\mu}{E+a} \\ A_4 &= A_1 \left(1 - \frac{a\mu^2}{E+a} \right) \frac{1}{E} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (42)$$

とすれば、 σ_θ は次の様に表はされる。

$$\sigma_\theta = A_1 C_1 \frac{1}{r^2} + A_2 \varepsilon_z - A_3 \sigma_g + A_4 \sigma_r \quad \dots\dots\dots (43)$$

(43) 式を (17) の運動方程式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{dr} + (1 - A_4) \frac{\sigma_r}{r} &= \frac{A_1 C_1}{r^3} + \frac{1}{r} (A_2 \varepsilon_z - A_3 \sigma_g) \\ \therefore \sigma_r &= \frac{C_2}{r^a} - \frac{A_1}{2-a} \frac{C_1}{r^2} + \frac{A_2}{a} \varepsilon_z - \frac{A_3}{a} \sigma_g \quad \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

此處に $a = 1 - A_4$, $C_2 =$ 積分常數である。

(43) 式と (44) 式とから σ_r を消去すれば、次式を得る。

$$\sigma_\theta = A_4 \frac{C_2}{r^a} + \frac{A_1}{2-a} \frac{C_1}{r^2} + \frac{A_2}{a} \varepsilon_z - \frac{A_3}{a} \sigma_g \quad \dots\dots\dots (45)$$

次に境界の條件 $r = r_i$ に於て $\sigma_r = 0$ 及び $r = r_g$ に於て $\sigma_r = \sigma_{rg}$ を用ひ (44) 式の C_1, C_2 を求むれば次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{2-a}{A_1} \frac{r_g^{2-a} \cdot r_i^{2-a}}{r_g^{2-a} - r_i^{2-a}} \left\{ \sigma_{rg} r_g^a - \frac{1}{a} (A_2 \varepsilon_z - A_3 \sigma_g) (r_g^a - r_i^a) \right\} \\ C_2 &= \frac{1}{r_g^{2-a} - r_i^{2-a}} \left\{ \sigma_{rg} r_g^2 - \frac{1}{a} (A_2 \varepsilon_z - A_3 \sigma_g) (r_g^2 - r_i^2) \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (46)$$

(44), (45) 式を (40) 式に代入すれば次式を得る。

$$\sigma_z = \frac{B_1}{r^2} + \frac{B_2}{r^a} + B_3 \varepsilon_z + B_4 \sigma_g \quad \dots\dots\dots (40')$$

此處で

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{E(1+\lambda)}{E+a} \frac{A_1}{2-a} C_1 \\ B_2 &= \frac{1}{E+a} \{ a\mu(1+A_4) + E(1+\lambda) \} C_2 \\ B_3 &= \frac{1}{E+a} \left[\left\{ a\mu + E(1+\lambda) \right\} \frac{A_2}{a} + aE \right] \\ B_4 &= \frac{1}{E+a} \left[E - \{ 2a\mu + E(1+\lambda) \} \frac{A_3}{a} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (47)$$

依つて (24) 式は次の様になる。

$$\begin{aligned} \int_{r_i}^{r_g} \{ B_1 r^{2-a} + B_2 r^{-a} + B_3 \varepsilon_z + B_4 \sigma_g \} 2r dr \\ + \int_{r_g}^{r_0} \left\{ E \varepsilon_z - \frac{2\mu}{r_0^2 - r_g^2} (r_g^2 \sigma_{rg} + r_0^2 p_0) \right\} 2r dr = 0 \end{aligned}$$

上式を積分し (48) 式を得、同式より $\varepsilon_z (= \varepsilon_z)$ が求められる。

$$\begin{aligned} 2B_1 \log \frac{r_g}{r_i} + \frac{2}{2-a} B_2 (r_g^{2-a} - r_i^{2-a}) + (B_3 \varepsilon_z + B_4 \sigma_g) (r_g^2 - r_i^2) \\ + E \varepsilon_z (r_0^2 - r_g^2) - 2\mu (r_g^2 \sigma_{rg} + r_0^2 p_0) = 0 \quad \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

尚 σ_{rg} 及び r_g を求むるには次の条件を用ひる。 $r=r_g$ に於て $\sigma_\theta=\sigma_\theta'$ 及び

$$\sigma_z - \frac{1-\sin \phi}{1+\sin \phi} \sigma_\theta = \sigma_e \quad \dots\dots\dots(49)$$

以上に依つて、内力及び ε_z が求められた事になる。尚 ε_θ は (14) 式より求め得。

(3) 円筒の外表面が初めて弾性限に達する場合

外圧を受ける円筒の外表面が初めて弾性限に達し、円筒全体が塑性変形を起す場合には、(2) の計算に於て

$$r_g=r_0 \quad \text{及び} \quad \sigma_{rg}=-p_0$$

とすれば良い。

7. 外圧を受ける円筒の塑性理論 その 2

「降伏状態となる場合」

(1) 外圧を受ける円筒の内表面が初めて降伏点に達する条件

円筒が外圧を受け内表面が初めて降伏点に達する場合の圧力は 6. (1) と全く同様にして次式で與へられる。

$$p_0 = \frac{n^2-1}{2n^2} \frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e \quad \dots\dots\dots(37)$$

(2) 外圧を受ける円筒の一部分が降伏状態にあつて他の部分は降伏点以下にある場合

弾性域 $r_g \leq r \leq r_0$ に於ては σ_r' 及び σ_θ' は (38) 式で與へられる。

降伏域 $r_g \geq r \geq r_i$ に於ては (49) 式が成立する。又 ε_z'' を z 方向の塑性歪とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta) \} + \varepsilon_z'' \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \{ \sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z) \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(39')$$

次に $\varepsilon_z = \varepsilon_z = \text{常數}$ とすれば、6. (2) と同様に

$$\varepsilon_r = -\frac{C_1}{r^2} - \frac{\varepsilon_z}{2}$$

上式と (39') の第 2 式から ε_r を消去すれば、

$$\frac{C_1}{r^2} + \frac{\varepsilon_z}{2} + \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_z - \frac{\mu}{E} \sigma_\theta = 0$$

上式と (49) 式より σ_θ を求むれば、

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\mu(2-\lambda)} \left(\sigma_r + \frac{EC_1}{r^2} + \frac{E\varepsilon_z}{2} - \mu\sigma_e \right) \quad \dots\dots\dots(50)$$

(50) 式を (17) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{\mu(2-\lambda)} \right\} &= \frac{EC_1}{\mu(2-\lambda)} r^{-3} \\ &+ \frac{1}{r} \frac{1}{\mu(2-\lambda)} \left(\frac{E\varepsilon_z}{2} - \mu\sigma_e \right) \end{aligned}$$

上式より σ_r を求むれば次の様になる。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_2 r^h - \frac{C_1 E}{1+\mu(2-\lambda)} \frac{1}{r^2} + \frac{\mu}{1-\mu(2-\lambda)} \sigma_e \\ &- \frac{E}{1-\mu(2-\lambda)} \frac{\varepsilon_z}{2} \quad \dots\dots\dots(51) \end{aligned}$$

$$\text{此處で} \quad h = \frac{1}{\mu(2-\lambda)} - 1$$

(50) 式に (51) 式を代入して

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{C_2}{\mu(2-\lambda)} r^h + \frac{C_1 E}{1+\mu(2-\lambda)} \frac{1}{r^2} + \frac{\mu}{1-\mu(2-\lambda)} \sigma_e \\ &- \frac{E}{1-\mu(2-\lambda)} \frac{\varepsilon_z}{2} \quad \dots\dots\dots(52) \end{aligned}$$

$r=r_g$ に於て $\sigma_r=\sigma_{rg}$ 及び $r=r_i$ に於て $\sigma_r=0$ なる条件を (51) 式に入る時には C_1 及び C_2 を求め得。即ち

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1+\mu(2-\lambda)}{E} \frac{r_g^{2+h} \cdot r_i^{2+h}}{r_g^{2+h} - r_i^{2+h}} \left\{ \sigma_{rg} r_g^{-h} - \frac{r_g^{-h} - r_i^{-h}}{1-\mu(2-\lambda)} \left(\mu\sigma_e - \frac{E\varepsilon_z}{2} \right) \right\} \\ C_2 &= \frac{1}{r_g^{2+h} - r_i^{2+h}} \left\{ \sigma_{rg} r_g^2 - \frac{r_g^2 - r_i^2}{1-\mu(2-\lambda)} \left(\mu\sigma_e - \frac{E\varepsilon_z}{2} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(53)$$

次に (49) 式に (52) 式を代入すれば、 σ_e が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1-\lambda}{\mu(2-\lambda)} C_2 r^h + \frac{E(1-\lambda)}{1+\mu(2-\lambda)} \frac{C_1}{r^2} \\ &+ \frac{1-\mu}{1-\mu(2-\lambda)} \sigma_e - \frac{1-\lambda}{1-\mu(2-\lambda)} \frac{E\varepsilon_z}{2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(54)$$

(54) 式を用ふれば (24) 式は次の様に成る。

$$\begin{aligned} \int_{r_i}^{r_0} \left\{ \frac{1-\lambda}{\mu(2-\lambda)} C_2 r^h + \frac{E(1-\lambda)}{1+\mu(2-\lambda)} \frac{C_1}{r^2} + \frac{1-\mu}{1-\mu(2-\lambda)} \sigma_e - \frac{1-\lambda}{1-\mu(2-\lambda)} \frac{E\varepsilon_z}{2} \right\} 2r dr \\ + \int_{r_g}^{r_0} \left\{ E\varepsilon_z - 2\mu \frac{r_g^2 \sigma_{rg} + r_0^2 p_0}{r_0^2 - r_g^2} \right\} 2r dr = 0 \end{aligned}$$

上式から σ_e を求むれば、次の様になる。

$$E\varepsilon_z = E\varepsilon_z = C_3 \sigma_{rg} + C_4 \sigma_e + C_5 p_0 \quad \dots\dots\dots(55)$$

此處で C_3, C_4, C_5 は夫々次の様に表はされる。

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= \frac{n_g^2 \left\{ 2\mu - \frac{2(1-\lambda)}{1+\mu(2-\lambda)} - 2(1-\lambda) \frac{\log n_g}{n_g^{2+h}-1} \right\}}{1+\mu(2-\lambda)} \frac{n_g^2-1}{2} - \frac{1-\lambda}{1-\mu(2-\lambda)} \frac{\log n_g}{n_g^{2+h}-1} \frac{n_g^2-1}{n_g^2+n^2-n_g^2} \\ C_4 &= \frac{2(1-\lambda)}{1+\mu(2-\lambda)} \frac{\mu(n_g^2-1)}{1-\mu(2-\lambda)} \frac{(1-\mu)(n_g^2-1)}{1-\mu(2-\lambda)} \\ &- \frac{2(1-\lambda)\mu}{1-\mu(2-\lambda)} \frac{\log n_g}{n_g^{2+h}-1} \frac{n_g^2-1}{n_g^2} \\ C_5 &= \frac{2\mu n^2}{\dots\dots\dots} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(55')$$

従つて σ_e' は次の様に與へられる。

$$\sigma_e' = \left(C_3 - \frac{2\mu}{n^2-n_g^2} n_g^2 \right) \sigma_{rg} + C_4 \sigma_e + \left(C_5 - \frac{2\mu}{n^2-n_g^2} n^2 \right) p_0 \quad (56)$$

以上に依り $\varepsilon_z, \sigma_\theta, \sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta', \sigma_r'$ 及び σ_e' が求められた。但し σ_{rg} 及び r_g は次の境界の条件から求める。

昭和 10 年 8 月]

$$r=r_g \text{ に於て } \sigma_\theta=\sigma_\theta' \text{ 及び } \sigma_z=\sigma_z' \dots\dots\dots(57)$$

$$\text{弾性域の變形 } e_\theta \text{ は } e_\theta = \frac{1}{E} \{ \sigma_\theta' - \mu(\sigma_r' + \sigma_z') \}$$

$$\text{降伏域の變形 } \varepsilon_\theta \text{ は } \varepsilon_\theta = \frac{C_1}{r^2} - \frac{\varepsilon_s}{2}$$

より夫々求められる。

(3) 円筒の外面が降伏點に達する場合

円筒の外面が初めて降伏點に達する場合には (2) の計算で

$$r_g=r_0 \text{ 及び } \sigma_{rg}=-p_0$$

とすれば良い。但しこの場合には (57) 式の条件の代りに

$$\frac{C_1}{r_0^2} - \frac{\varepsilon_s}{2} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{\theta 0} - \mu(\sigma_{r 0} - p_0) \} \dots\dots\dots(58)$$

なる条件を用ひこれより p_0 を求める。

(4) 計算例

$n=2$ の場合 (38), (51), (52), (53), (54) 及び (55) 式から n_g と p_0 , σ_{sg} , σ_{rg} , $\sigma_{\theta g}$ 及び $\sigma_{\theta 0}$ との関係を求むれば、第 16 圖に示す様な結果を得る。又 p_0 と σ_{sg} , σ_{rg} , $\sigma_{\theta g}$ 及び $\sigma_{\theta 0}$ との関係を圖示すれば、第 17 圖のようになる。本圖に依り一般に σ_{sg} は小さい値である事が解る。

第 16 圖及び第 17 圖 円筒 ($n=2$) が外圧を受ける場合の n_g と p_0 , σ_g との関係及び p_0 と σ_g , σ_0 との関係

(5) $\sigma_z=0$ と假定した場合

(24) 式が成立する場合には $\sigma_z=0$ としても外圧を受ける円筒の一部分降伏の場合には大なる誤差を生じない事は、(4) に示した例から明かである。特に撓曲め及び力嵌めの様な場合には、円筒の一部分が降伏するのみで大部分は降伏點以下にあるから、斯様な省略を行つて差支ない。

(49) 式で $\sigma_z=0$ とすれば降伏の條件は次のようになる。

$$\sigma_\theta = -\frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e \dots\dots\dots(59)$$

従つて (17) 式は次の様になる。

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{r} = -\frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \frac{\sigma_e}{r}$$

上式より σ_r を求むれば

$$\sigma_r = -\frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e - \frac{C_1}{r} \dots\dots\dots(60)$$

此處で C_1 は積分常數である。上式に境界條件

$$r=r_i \text{ に於て } \sigma_r=0$$

を入れる時には、 C_1 が求められる。

$$C_1 = -\frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e \cdot r_i$$

$$\therefore \sigma_r = -\frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e \left(1 - \frac{r_i}{r} \right) \dots\dots\dots(61)$$

$$\sigma_{rg} = -\frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e \left(1 - \frac{1}{n_g} \right) \dots\dots\dots(62)$$

次に、 $r=r_g$ に於て $\sigma_\theta'=\sigma_\theta$ なる条件により次の式を得。

$$\frac{r_0^2 + r_g^2}{r_0^2 - r_g^2} \sigma_{rg} + \frac{2r_0^2}{r_0^2 - r_g^2} p_0 = \frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e$$

上式と (62) 式とより σ_{rg} を消去して p_0 を求むれば、

$$p_0 = \frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e \left\{ \frac{n^2 - n_g^2}{2n^2} + \frac{n^2 + n_g^2}{2n^2} \frac{n_g - 1}{n_g} \right\} \dots\dots\dots(63)$$

上式より p_0 が與へられる場合には、 n_g 即ち r_g が求められる。尚弾性域の變形は次式で表はされる。

$$\left. \begin{aligned} e_\theta &= \frac{1}{E} \{ \sigma_\theta' - \mu \sigma_r' \} \\ e_z &= -\frac{\mu}{E} \{ \sigma_\theta' + \sigma_r' \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(64)$$

降伏域の變形は次の様にして求められる。

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \{ \sigma_r - \mu \sigma_\theta \}$$

上式に (59) 及び (61) 式を代入すれば

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e \left\{ \frac{r_i}{r} - (1-\mu) \right\}$$

然るに $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$ なるに依り

$$u = \frac{1}{E} \frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e r_i \log r - \frac{1}{E} \frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e (1-\mu) r + C$$

$$\text{従つて } \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

$$= \frac{1}{E} \frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e \frac{r_i}{r} \log r - \frac{1}{E} \frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e (1-\mu) + \frac{C}{r}$$

$r=r_g$ に於ては次式が成立するを要する。

$$\varepsilon_{\theta g} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta g} - \mu \sigma_{rg})$$

これから C を求め上の ε_θ の式に代入すれば、次式を得る。

$$\varepsilon_\theta = -\frac{1}{E} \frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \sigma_e \left\{ \mu \frac{r_i}{r} + (1-\mu) + \frac{r_i}{r} \log \frac{r_g}{r} \right\} \dots\dots\dots(65)$$

(6) 計算例

$n=1.2, 1.5, 2, 2.5, 3$ 及び 4 の場合における p_0 と n_g との関係を (63) 式より求め、これを圖示すれば、第 18 圖のようになる。本圖と第 11 圖とを比較すれば、円筒が内圧を受ける場合と外圧を受ける場合とにおける相違が解る。

第 18 圖 円筒が外圧を受ける場合の降伏域の半径と圧力との関係

8. 外圧を受ける円柱の塑性理論

(1) 外圧を受ける円柱が初めて弾性限に達する条件
円周上に外圧 p_0 を受け且軸方向には何等外力を受けない
円柱の内力は次の様に表はされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta = \sigma_r = -p_0 \\ \sigma_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

斯様な内力状態にある場合には弾性限に達する条件は (49) 式に依り次の様になる。

$$p_0 = \sigma_y \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (67)$$

(2) 弾性限を越えた場合

弾性限を越えた後に歪硬化を受ける場合の z 方向の歪は (39) の第 1 式で表はされる。尚この場合には、一般塑性理論⁽²²⁾ に従つて「塑性變形は体積不変の變形である」とする。然る時は塑性歪に相當する半径方向の變位を w'' とすれば

$$w'' = \frac{C_1}{r} - \frac{\epsilon_z''}{2} r$$

然るに $r=0$ に於て $w''=0$ なるを要する。従つて

$$C_1 = 0, \quad w'' = -\frac{\epsilon_z''}{2} r$$

$$\epsilon_r'' = \epsilon_\theta'' = -\frac{\epsilon_z''}{2}$$

然るに上式が成立するためには次式が成立するを要する⁽²²⁾。

$$\sigma_r = \sigma_\theta \quad (68)$$

上式を (39) の第 1 式に代入すれば次式を得る。

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - 2\mu\sigma_\theta \} + \frac{1}{a} \{ \sigma_z - (1-\lambda)\sigma_\theta - \sigma_e \} \quad (69)$$

次に (17) 式に (68) 式を代入すれば

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 0$$

を得、従つて上式より σ_r を求め、且 $r=r_0$ に於て $\sigma_r = -p_0$ なる条件を用ふれば、次の様になる。

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -p_0 \quad (68')$$

$\epsilon_z =$ 常數とすれば (69) 及び (68') 式より $\sigma_z =$ 常數 を得、(24) 式を満足するためには次式が成立するを要する。

$$\sigma_z = 0 \quad (70)$$

以上に依り内力が求められたが斯様な場合における歪は一般塑性理論に依り次の様に與へられる。

$$\epsilon_z = \frac{2\mu}{E} p_0 + \frac{1}{a} \{ (1-\lambda)p_0 - \sigma_e \} \quad (69')$$

$$\epsilon_\theta = \epsilon_r = -\frac{1-\mu}{E} p_0 - \frac{1}{2a} \{ (1-\lambda)p_0 - \sigma_e \} \quad (71)$$

(3) 降伏状態となる場合

この場合にも (2) と同様にして

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -p_0 \quad \text{及び} \quad \sigma_z = 0$$

を得。又歪は次の様に表はされる。

$$\epsilon_z = \frac{2\mu}{E} p_0 + \epsilon_{ty}'' \quad (72)$$

$$\epsilon_\theta = \epsilon_r = -\frac{1-\mu}{E} p_0 - \frac{\epsilon_{ty}''}{2} \quad (73)$$

此處で ϵ_{ty}'' は引張試験における降伏點の伸びである。故にこの場合には (67) 式を満足する外圧に於て降伏が始まり、降伏點における歪が $\frac{1}{2}\epsilon_{ty}''$ に達する迄は同じ圧力で降伏する事が解る。

9. 焼嵌め及び力嵌めに関する計算式

(1) 一般の場合

内圧を受ける円筒の一部分が弾性限を越えて塑性歪を起してゐる場合における内圧と内径の變化との關係は、3 の計算式から求められる。今これ等の式から求められる p_i と $\epsilon_{\theta i}$ との關係を

$$\epsilon_{\theta i} = f_1(p_i) \quad (74)$$

とする。又外圧を受ける円筒の場合には p_0 と $\epsilon_{\theta 0}$ との關係は 6 に示した計算に依つて求められる。この關係を次の様に表はす。

$$\epsilon_{\theta 0} = \varphi_1(p_0) \quad (75)$$

焼嵌め又は力嵌めにおける内側円筒の外径を d_{10} とし外側円筒の内径を d_{2i} とすれば、一般に締代は次式で表はされる。

$$\epsilon = \frac{d_{10} - d_{2i}}{d_{10}} \quad (76)$$

然るに焼嵌め又は力嵌めに於ては

u_{2i} = 外側円筒の内径における半径方向の變位

u_{10} = 内側円筒の外径における半径方向の變位

とすれば、次式が成立するを要する。

$$u_{2i} - u_{10} = \frac{1}{2}(d_{10} - d_{2i}) \quad \text{及び} \quad p_0 = p_i (=p \text{ とす}) \quad (77)$$

然るに

$$u_{2i} - u_{10} = \frac{d_{2i}}{2} \epsilon_{\theta i} - \frac{d_{10}}{2} \epsilon_{\theta 0} \cong \frac{d_{10}}{2} (\epsilon_{\theta i} - \epsilon_{\theta 0})$$

故に、焼嵌め又は力嵌めに於て、円筒の一部分が塑性歪を起

(22) 前掲「新しき塑性理論」

す場合における締代と直圧力との関係は次式で表はされる。

$$\varepsilon = f_1(p) - \varphi_1(p) \dots\dots\dots (78)$$

従つて円筒内に生ずる内力が全部計算することが出来る。

(2) 降伏状態となる場合

内圧又は外圧を受ける円筒の一部分が降伏状態となる場合には、4 又は 7 に示した式に依り夫々 p_i と ε_{0i} 又は p_0 と ε_{00} との関係が求め得る。これ等の関係を (1) と同様に

$$\varepsilon_{0i} = f_y(p_i) \dots\dots\dots (79)$$

及び

$$\varepsilon_{00} = \varphi_y(p_0) \dots\dots\dots (80)$$

とすれば、焼嵌め又は力嵌めに依つて生ずる直圧力は次の式で與へられる。

第 20 圖 円筒 ($n=2$) の外側に他の円筒を焼嵌め又は力嵌めする場合の締代と直圧力 p との関係

第 21 圖 2 箇の円筒を互に焼嵌め又は力嵌めした場合の内力分布状態

$$\varepsilon = f_y(p) - \varphi_y(p) \dots\dots\dots (81)$$

(3) 計算例

今例として $n=2$ なる円筒を n の値が 1.2 乃至 4 なる円筒の内側に焼嵌め又は力嵌めされる場合に生ずる直圧力と締代との関係を圖示せば、第 20 圖のようになる。従つてこの場合の内力は夫々計算する事が出来る。内力分布状態の一例を示せば、第 21 圖の様である。同様に円柱の外側に円筒を焼嵌め又は力嵌めする場合の ε と p との関係は第 22 圖の様になり、この場合の内力分布状態の一例を圖示すれば第 23 圖の様である。これ等の圖に依り降伏状態に達すれば、直圧力が如何に變化するかが明かである。

第 22 圖 円柱の外側に円筒を焼嵌め又は力嵌めする場合の締代 ε と直圧力との関係

第 23 圖 円柱の外側に円筒 ($n=2$) を焼嵌め又は力嵌めする場合の内力分布状態

10. 結 び

- (1) 円筒の一部分塑性變形又は一部分降伏の場合對して一假定を置いて問題を解いた。
- (2) 円筒の強さに関する Cook 及び Robertson の實驗結果を塑性理論より吟味したところ、本實驗方法はその目的に對して適切でない事が明かになった。
- (3) 塑性理論を用ひて、撓め及び力嵌めに関する計算式を求めた。その結果円筒の一部分が塑性變形を起す場

合における締代と直圧力との關係及びその場合の内力分布状態が明かにされた。

終りに本研究を行ふに當り御懇切な御指導を賜りました東北帝大の砂谷先生及び大阪帝大の中原先生、並に本文を草するに當り割切なる御助言を賜りました鉄道大臣官房研究所の池田博士に對し厚く感謝の意を表す。又絶えず御激勵と御指導を賜りました住友製鋼所荒木専務取締役、並に本研究達成のために種々の御便宜を與へられた住友製鋼所の職員各位に對し厚く感謝の意を表す。

二元冷凍サイクルの理論成績係数に就て (最大成績係数の圖式決定法)

正 員 藤 田 保 太 郎⁽⁴⁾

On Theoretical Coefficient of Performance of Binary Refrigerating Cycle.

(Graphical Determination of Maximum Coefficient of Performance)

By Yasutarô FUJITA, Member

1. 緒 言

近來工業界の諸方面で著しい低温度が要求されるに伴ふてその條件を満足する冷凍機が作動する温度範囲は益々廣められつゝある。従つて一層經濟的に冷凍の目的を達せんとする方法に関する研究は盛に行はれ、一つの冷媒に依るものに就ては既に幾多の熱力学的サイクルが案出され又改善されて居る。成績係

数を増大する今一つの方法として適當な二つの冷媒を組合はせて用ひる二元サイクルが擧げられるが、これに関する研究は理論的にも又實驗的にも比較的乏しい。

第 1 圖に示す通り第 1 冷媒液の膨脹蒸發によつて圧縮された第 2 冷媒蒸気を凝結させ、所要の冷凍目的は低温蒸發器内で第 2 冷媒の蒸發に依つて遂げられる。

本論文に於ては一般に與へられた温度條件に従つて適當に撰ばれた 2 つの冷媒を組合はせて二元サイクルを

第 2 a 圖

(1) 臺南高等工業學校

昭和 10 年 8 月]

第 1 圖

つくる場合にその成績係数を最大ならしむる中間温度と最大係數値とを見出す便法として創案した著者の圖式近似法を叙述し、更にこの方法は單一冷媒の 2 段膨脹圧縮サイクルにも適用される事を説き、最も普通に知られた冷媒 CO_2 と NH_3 を選び三つのサイクルに就て同一温度條件の下にその最大成績係数が如何に相違するかを究め、併せて

圧力並に圧縮比に就ても言及する。

2. 式の誘導

高温サイクル、低温サイクル何れも圧縮機は乾燥飽和状態の蒸気を吸ひ込み理論的斷熱圧縮を行ひ全サイクルの中間温度となる第 1 冷媒の蒸發温度と第 2 冷媒の凝結温度とは相等的いものと假定する。

第 2 圖 (a) 及び (c) 並に第 3 圖 (a) 及び (c) は夫々第 1 圖に相當する二元サイクルを表はす温度—エントロピ並に圧力—エントルピ線圖で、次の記號を用ひること

第 2 c 圖