機械学会論文集

井口 笹村 記念 號

第 I 卷 第 4 號

昭和 10 年 10 月

降伏點附近における軟鋼の變形及び應力分布

(昭和 10 年 3 月 22 日 井口記念講演會に於て講演)

正員 湯 淺 龜 一⁽¹⁾

Formänderung und Spannungsverteilung in der Nähe der Streckgrenze bei Flußstahl

von Kameichi YUASA, Mitglied

摘 要

本研究は昭和 7 年の暮に著手し、その一部は昭和 9 年 2 月の獨逸雜誌⁽²⁾に發表してある。降伏點を通過しつつある間における軟鋼棒の塑性變形機構と應力分布とに就て考察し、振りに對する軟鋼の塑性變形機構には棒の軸に沿つて發達するものの他に軸に向つて數條の楔形をなして發達するものがあり⁽³⁾、後者の場合には第 2 回目の楔形塑性變形部は最初の部分間の約中央に現はれ、降伏現象が終るまでは振れ角が軸に沿つて不規則分布即ち不安定變形を呈するが、その後には安定した變形を示す事を實證してある。尚厚さの異なる數種の圓筒形試験片を用ひて實驗し、G. Cook の假定⁽⁴⁾は實驗結果に一致しない事を證明してゐる。Cook の假定の正否は實質丸棒試験片に依る實驗結果を示す荷重變形線圖から判斷する事は困難であるが、圓筒形試験片を用ひて實驗すると容易に判斷する事が出来る。

1. 引 張 り

軟鋼丸棒に引張り、振り及び曲げ作用を與へると、一般に夫々第 1 圖の線圖 A, B 及び C の様な荷重變形線圖が得ら

第 1 圖

軟鋼棒の引張荷重歪 ($P-\varepsilon$)、振りモーメント振れ角 ($T-\theta$) 及び曲げモーメント曲率 ($M-\nu$) 圖

れる。引張試験の場合には、荷重が上降伏點 Y に達すると試験片平行部の或る部分に急激塑性變形が現はれ、引張應力は上降伏應力 $\sigma_y = P_y/A$ (歪で云へば $\varepsilon_y = \sigma_y/E$) から下降伏

應力 $\sigma' = P'/A$ (歪で云へば ε_0) まで急激に下る。その殘餘の部分では $\varepsilon_y = \sigma'/E$ なる弾性歪から ε_0 なる歪まで急激に變形する (第 2 圖)。茲に A は試験片の横斷面積、E はヤング係數で ε_0 は塑性引張歪の終りに相當する歪である。第 3

第 2 圖 降伏點における引張歪の飛躍的發達の説明圖

第 3 圖

引張塑性變形發達の經路を示す歪模様 (第 4 圖参照)

圖の寫眞 A 及び B は夫々第 4 圖の線圖 1 及び 2 まで平均引張歪を與へた時の歪模様を示し、塑性變形が試験片の軸に沿つて發達する事を實證してゐる。

(1) 東京帝國大学. (2) Arch. f. d. Eisenhüttenwesen 7. Heft 8, Febr. 1934. (3) 中西不二夫, 機械學會誌第 208 號, 昭和 9 年 8 月. (4) G. Cook, Engng. 132 (1931) p. 343/45.

2. 振 り

振り試験に於ては第1圖のA及びBの二種類の振りモーメント振れ角($T-\theta$)圖が得られる(3)(4)(5)。線圖Aの様に上降伏點に於て急激塑性變形が現はれる場合には歪模様即ち塑性變形は第5圖に示す様に試験片の軸に沿つて發達するものと想像され、この場合には振りモーメントが上降伏點に

第4圖 軟鋼丸棒の引張荷重歪圖(第3圖参照)

達して最初塑性變形を呈する部分に於ては外皮振り應力は

$$\tau_y = \frac{2T_y}{\pi r_a^3(1-k^4)}$$

$$\text{から } \tau' = \frac{3T'}{2\pi r_a^3(1-k^3)}$$

まで急激に變り、剪斷歪は $\gamma_y = \tau_y/G$ なる弾性歪から γ_e なる塑性歪の終りまで急變すると考へられる(第6圖)。併しこの場合に如何なる経路をとつて γ_y から γ_e に至るかは全く不明である。茲に r_a は試験片の外徑、 r_i は内徑で $k = r_i/r_a$ であり T_y 及び T' は夫々上及び下降伏振りモーメントである。最初塑性變形を示した以外の部分に於てはその外皮に於て $\gamma_g = \tau_g/G$ (應力で云へば

$$\tau_g = 2T'/[\pi r_a^3(1-k^4)])$$

なる弾性歪から γ_e

(應力で云へば

$$\tau' = 3T'/[2\pi r_a^3(1-k^3)])$$

なる塑性歪にかは

る。

次に振りモーメント振れ角圖が第1圖のBの如き形狀を示す試験片に於ては歪模様即ち塑性變形

は數條の楔形をなして棒の軸に向つて發達する(第7圖a)。振れ變形が更に進むに連れ、最初約等間隔に現はれた楔形變形部aの約中間に次の塑性變形bが現はれる。第8圖はこの種の振れ變形を呈する軟鋼に関する歪模様の寫眞圖である。

著者は 0.14% C, 0.57% M_n , 0.05% P, 0.05% S を含む軟鋼丸棒を約 970°C で 30 分間焼鈍し外徑 37 mm, 平行部の長さ 180 mm, 内徑が夫々 0, 18 mm, 24 mm 及び 30 mm

第5圖

振り試験片の軸に沿つて發達する歪模様の假想圖

第6圖

第7圖

振り試験片の軸に向つて發達する楔形歪模様の假想圖

第8圖

なる4種の圓筒形試験片を造り(第9圖)、これを靜かに振り、鏡式振れ測定器(標點間距離 150 mm)で降伏點附近における振れ角と振りモーメントとの關係を精密に測定した。第1表及び第10圖はその試験結果である。但し第10圖の横座標には試験片平行部 1 cm 當りの平均振れ角 θ をとり、縦座標には上降伏振りモーメント T_y に対する振りモーメント T の比をとつてある。

第11圖は最も薄い圓筒形試験片第6號に就て降伏點附近で荷重を8回繰返し行つた試験結果を示す振りモーメント振れ角圖であり、圖中に荷重の繰返し回数と試験期日とを記入して

ある。第12圖は以上の各繰返し試験後に試験片平行部の長さに沿つて測定して得た振れ角の分布狀態を示す線圖である。即ち試験片平行部の表面に於て軸に平行して1本の細線を引きこれに直交し且 1 cm 宛の間隔を有す

第9圖 振り試験片の寸法、單位、cm

第1表 第9及び14圖の圓筒形試験片に関する振り試験結果

試験片番號	r_a mm	r_i mm	$k = \frac{r_i}{r_a}$	$\tau_y = \frac{3T_y}{\pi r_a^3(1-k^4)}$ kg/cm ²	$\tau' = \frac{3T'}{2\pi r_a^3(1-k^3)}$ kg/cm ²	$\mu = \frac{\tau'}{\tau_y} = \frac{3}{4} \frac{1-k^4}{1-k^3} \frac{T'}{T_y}$
1	18.50	0	0	1,483	1,022	0.690
2	18.50	9	0.487	1,462	1,068	0.731
3	18.41	12	0.649	1,452	1,097	0.755
4	18.50	15	0.811	1,300	1,010	0.777
5	18.45	15	0.811	1,370	1,010	0.738
6	18.25	15	0.822	1,380	1,010	0.733
7	18.00	0	0	1,430	1,000	0.700
8	10.04	0	0	1,530	1,010	0.661

る短細線 16 本を引く。斯くして得た標點の左端標點 O に對する捩れ角を各線返し荷重後に測定して畫いたものである。

第 10 圖 各種寸法の圓筒形試験片に對する捩りモーメント
捩れ角線圖

第 11 圖 試験片第 6 號の繰返し捩りモーメント
捩れ角線圖

第 12 圖
試験片第 6 號の平行部に沿つて
の捩れ角の分布圖

する繰返し捩りモーメント捩れ角圖であり、第 15 圖はその標點距離 10 cm 間における捩れ角の分布状態を示す線圖である。第 12 及び 15 圖に依り變形が上降伏點を過ぎ下降伏點を進む間では試験片の軸に沿つての捩れ角の分布は不規則であ

昭和 10 年 10 月

るが純塑性變形を終つて安定捩れを呈する變形の分布を示す最後の線圖は何れも O 點を通る直線となつてゐる。

第 13 圖 試験片第 8 號の繰返し捩り
モーメント捩れ角線圖

第 14 圖 細い捩り試験片第 8 號、寸法、cm

第 15 圖
試験片第 8 號の
平行部に沿つて
の捩れ角の分布

第 16 圖
試験片の平行部に沿つ
ての捩れ角の分布圖

第 13 圖
は直径 20
mm なる細
い實質丸棒
試験片 (第
14 圖) に関

圖は $02'2''$ となり、
第 5 回の繰返し捩り
後には $05'5''$ とな
る(5)。

第 10 圖に破線で
示した線圖 $OAHB$

及び第 17 圖の 5 本の線圖は G. Cook の假定に依つて畫いたものであるが著者の實驗結果と餘程相違してゐる。この相違は薄肉圓筒形試験片に於て特に著しい。G. Cook は塑性變形に對しても Bernoulli-Euler の假定を使用し、試験片各部

第 17 圖

各種寸法の圓筒形試験片に對する
($\frac{T}{T_y} - \frac{\theta}{\theta_y}$) 線圖、G. Cook の假
定に依る

捩りモー
メント
捩れ角圖
が第 1 圖
A の如き
急激變形
の形狀を
示し塑性
變形が試
験片の軸
に沿つて
進むなら
ば捩れ角

の分布圖は第 12
及び 15 圖の代り
に、例へば第 16 圖
のようになるべきで
ある。この場合には
第 1 回の捩りの
ときに試験片標點
間の左端部 1 cm
間だけに塑性變形
が生じ右方の殘部
には弾性變形が生
じ捩れ角の分布圖
は $01'1''$ となり、
第 2 回の捩りでは
次の 1 cm 間に新
らしい塑性變形が
生じ捩れ角の分布

分における剪断應力剪断歪圖は第 6 圖の OYC 線をとり安定してゐるとした。従つて塑性變形は棒の外表から軸に向つて同軸圓筒状をなして進むものと考え第 18 圖の如き應力分布を示して計算し實質丸棒試験片のみに就て實驗してゐる⁽⁶⁾。

第 18 圖

圓筒形軸における捩り應力の分布圖、G. Cook の假定に依る

第 21 圖

第 24 圖

二の字形断面を有する梁に於ける曲げ應力の分布圖、G. Cook の假定に依る

軸圓筒状をなして發達せず、又軸に沿つて進んでも來ないで數條の楔形をなして發達し、捩りモーメント捩れ角線圖は大體に於て第 1 圖の B の如き形を示してゐる。

不安定な塑性變形をしつゝある部分の應力分布を計算することは無理な仕事であらうが著者は次の様に假想して實驗式を導いて見た。塑性變形を呈した楔部の外皮の所では $\tau_y = 2T_y / [\pi r_a^3 (1 - k^4)]$ に相當する弾性歪 $\gamma_y = \tau_y / G$ から、塑性變形の終りに相當する歪 γ_c より小さい歪 $\gamma_p < \gamma_c$ まで變形し、内部では $\gamma_c < \gamma_y$ なる弾性歪から $\gamma_p' < \gamma_c$ なる塑性歪ま

第 19 圖

第 22 圖

各種寸法の圓輪及び二の字形断面を有する梁に関する $(\frac{M}{M_y} - \frac{\gamma}{\gamma_y})$ 線圖、G. Cook の假定に依る

第 25 圖 梁における歪模様

併しこの場合には、歪模様は試験片の外周から軸に向つて同

で急激に變形する(第 19 圖)。尚捩りモーメント捩れ角圖は第 20 圖の様に、傾斜を異にする 4 本の直線 OA, BC, CD, DE と 1 本の曲線 AB から成るものと假定し、平均捩れ角 θ が曲線 AB 上の點に相當してゐる間に生ずる塑性變形楔

第 20 圖

第 23 圖

圓筒形断面を有する梁における曲げ應力の分布圖、G. Cook の假定に依る

(第 7 圖の a 及び b 部)を集めたものが第 21 圖にハッチングを付けた部分に相當し、この部分が断面の中心に於て挟む角を ϕ とする。又塑性變形をした部分には $\tau' = 3T' / [2\pi r_a^3 (1 - k^3)]$ なる一定剪断應力が作用し、弾性變形を呈してゐる部分では塑性變形部と接する附近では複雑した應力分布をしてゐるのであらうが簡單のため普通の弾性的應力分布を呈してゐるものと假定し、第 21 圖の τ_y は $\tau_y = 2T_y / [\pi r_a^3 (1 - k^4)]$ であるとする尚第 20 圖に於て $\theta = \theta_1$ になつたとき試験片の標點間全部が塑性變形を呈するとして次の様な實驗式を考へて見た。

$$\phi = 2\pi \left(\frac{\theta'}{\theta_1} \right)^n \quad (1)$$

茲に θ_1' は實驗結果から求め得られるもので n は定數である。又捩れ角が θ_1 から θ_2 に進む間は試験片中には一定剪断應力 τ' が作用するものとすれば 捩りモーメント T と捩

(6) 東京帝國大学工学部紀要第 29 冊第 9 號 225 頁。

れ角 θ' の間には次の如き平衡式が成立する。

$$\begin{aligned} T &= \int_{r_i}^{r_a} \tau' \rho^2 d\rho + \int_{r_i}^{r_a} \tau \rho^2 (2\pi - \varphi) d\rho \\ &= 2\pi \left(\frac{\theta'}{\theta_1'} \right)^n \tau' \int_{r_i}^{r_a} \rho^2 d\rho + 2\pi \left\{ 1 - \left(\frac{\theta'}{\theta_1'} \right)^n \right\} \frac{\tau_y}{r_a} \int_{r_i}^{r_a} \rho^3 d\rho \\ &= \frac{2}{3} \pi r_a^3 (1 - k^3) \tau' \left(\frac{\theta'}{\theta_1'} \right)^n + \frac{1}{2} \pi r_a^3 (1 - k^4) \tau_y \left\{ 1 - \left(\frac{\theta'}{\theta_1'} \right)^n \right\}, \\ \text{或は} \quad \frac{T}{T_y} &= \frac{T}{\pi r_a^3 (1 - k^4) \tau_y} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\theta'}{\theta_1'} \right)^n \right\} + \frac{4}{3} \frac{1 - k^3}{1 - k^4} \cdot \frac{\tau'}{\tau_y} \left(\frac{\theta'}{\theta_1'} \right)^n, \\ \text{或は} \quad \frac{T}{T_y} &= 1 - \left\{ 1 - \frac{4}{3} \frac{1 - k^3}{1 - k^4} \mu \right\} \left(\frac{\theta'}{\theta_1'} \right)^n \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

茲に μ は下降伏剪断應力 τ' と上降伏剪断應力 τ_y との比、即ち $\mu = \tau'/\tau_y$ である。第 10 圖に鎖線で示した線圖は公式

(2) に $n=0.3$ と置いて畫いたものであるが $n=0.3$ としたのとは何の意味を有しない。

3. 曲 げ

第 22 圖の 5 本の實線線圖及び 5 本の破線線圖は夫々輪形及び二の字形截面を有する梁に關し G. Cook の假定を使用して畫き出した曲げモーメント曲率 ($T-\nu$) 線圖である⁽⁶⁾。この場合には塑性變形部は梁の上下兩表面から中立面に向つてこれに平行する平面で發達し第 23 圖及び第 24 圖の如き應力分布を保つて變形するものと假定してあるが、矩形截面を有する梁では第 25 圖に示す様な歪模様が現はれる事は周知の事實である。この圖の塑性變形部には下降伏曲げ應力 σ' なる一定應力が作用し、塑性變形部に接する附近の彈性變形部には複雑した應力分布が行はれてゐるであらう。

近似式に関する考察 一二

(昭和 10 年 3 月 22 日 井口記念講演會に於て講演)

正 員 砂 谷 智 導⁽¹⁾

Notes on Empirical Formulae

By Chidô SUNATANI, Member

摘 要

從來實驗式又は近似式の選定に用ひられてゐる所謂最小自乗法は、ガウスの誤差法則に基づくものではなく、一つの近似法に過ぎないこと、近似法としては平均差の最小なるものを最近似式とする方法が吾人の常識に最適なること及び一般形における最近似式の圖式解法を説き、尙最近似式の代數學的選定には最小自乗法が必要であること並に近似法は從來の展開方法よりも廣い意義の又は近似度のより高い展開を可能ならしめることなどを論じてゐる。

緒 言

實驗式の實驗常數の決定は、從來直線方程式に導かれ得るものにありては、所謂最小自乗法によりてなされてゐるが任意形實驗式については未だ具体的方法が示されてゐないやうである。尙かやうな際は最小自乗法を適用することの論據が未だ判明してゐないやうである。

又 1 價函數の展開は、從來はテーラー方法、直交函數の級數或は積分方程式に據る級數等によりてなされてゐるが、任意 1 價函數を任意多項式 (各項が任意形函數であり而も他項との間に何等の關係を必要としない意味の一般形多項式) への展開についても未だ具體的論究がなされてゐないやうである。

本論文は實驗式の實驗常數の決定並に 1 價函數の展開に關し、両者の一般形の場合を主眼に少しく考察を試みたものである。

(1) 東北帝國大學。

昭和 10 年 10 月

近似式における所謂最小自乗法に就て

從來任意 1 價函數 $f(x)$ を他の任意形の 1 價函數 $\phi(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ を以て最近似的に表はさんとする際並に一群の實驗結果 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_s, y_s)$ が示す x, y 間の關係を一つの實驗式 $y = \phi(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ を以て最近似的に表はさんとする際に所謂最小自乗法が用ひられてゐる。即ち f, ϕ 間或は y, ϕ 間における差の自乗の總和 (下記 ε , 但し $a \sim b$ は ϕ, f 近似の所要領域) を最小ならしむるやうに、次變數 (或は實驗常數) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を決定すればよいことが唱へられてゐる。

$$\begin{aligned} \text{函數式の場合: } \varepsilon &= \int_a^b [f(x) - \phi(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)]^2 dx, \\ \text{實驗式の場合: } \varepsilon &= \sum_{i=1}^s [y_i - \phi(x_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)]^2 \end{aligned} \quad \dots\dots (1)$$

而してこの最小自乗法は、普通誤差確率論 (ガウスの誤差法則) に基づくとせられてゐるやうであるが、その論據は未だ