の場合の切削力を正確に測定するためには双物を出るだけ強固に取り付ける事を必要とする。油圧式双物動力計を用いる時は切削に際して双物の振動多く従つて双先は欠け易く正確な結果を得る事困難である。

(2) 依つて新しく SSN 式光学的双物動力計を考案製作し、それに依つて垂直切削力及びその切削中に起る変化を正確に測定する事を得た。

(3) 軟鋼材の切削に於ては炭化タングステン双物は、高速鋼双物の如く急激に切削力が上昇する点は見出されない。切削力は時間と共に増加せず、双先が欠けるために反つて減少する場合もある。

(4) 軟鋼材の切削中に生ずる削屑の形状には大体 3 種類あつて、始めは 1 本の長い帯状を呈し、次に長い螺旋状となり最後に細かい渦状のものに変化する。

(5) 軟鋼材の切削に際しては帯状の削屑から螺旋状に変わる時期を双物の第 1 壽命、最後の細かい渦状の削屑が出る時期を以て双物の第 2 壽命と名附けた。例へば切削速度 90 m/mn に於て切削の深さ 2.0 mm, 送り 0.8 mm の時、第 1 壽命はタンガロイ SB にて 20 mn, タンガロイ SA にて

16 mn, ウィディア NIA にて 10 mn, となる。又第 2 壽命はタンガロイ SB にて 140 mn, タンガロイ SA にて 80 mn, ウィディア NIA にて 126 mn となる。

(6) 各切削速度についての結果を綜合すれば軟鋼材の切削に於ては、第 1 壽命に就てはタンガロイ双物はウィディア双物に優り、第 2 壽命に就てはタンガロイ SB, ウィディア NIA 共に大差は無い。

(7) 鑄鉄材の不連続或は衝撃的切削に於ては、タンガロイ SB はウィディア NIA に比して磨耗が多い。

(8) 鑄鉄材の連続切削に於ては、タンガロイ O はウィディア O より優良である。

(9) SSN 式双物動力計に依つて溝附鑄鉄材の不連続或は衝撃的切削に際して切削力を精密に測定した結果、双先は特に大なる衝撃を受けない事が明かとなつた。

(10) 炭化タングステン双物を用ひ高速度切削を行ふ場合には、切削熱によつて双物は膨脹し、切削の深さは送りと共に自然に増加するために工作物の寸法が不同となる恐れがある。(因に本研究は文部省科学研究奨励費に據つて行つたものであることを附記する)。

門型架構解法に就ての一考察

(昭和 10 年 2 月 13 日 第 268 回講演會に於て講演 機械學會誌 第 38 卷 第 217 號及び第 219 號にて質疑應答あり)

正 員 長 元 龜 久 男⁽¹⁾

On one Analysis for Simple Portal

By Kikuo NAGAMOTO, Member

緒 言

門型起重機橋型運搬機等の荷役機械の設計に際し門型架構の解法について従來の最小働の理に依らず中澤盛直著⁽²⁾「梁の半図式的解き方」にて述べられた梁の理論を應用して解けば總括して初等代数を以て極めて簡単に取扱はることを知つた。

1. 基本理論

即ち梁に就ての理論を再録すれば断面均一等質なる梁が外力を受けて歪を起した時 E = 從彈性係数 I = 断面の慣性モーメント A_x = 原点より x の距離に至る間の曲げモーメント線図の面積 $\bar{x} = A_x$ の重心距離を原点より測りたるものとし梁軸上の一点における傾斜 i_A 撓み y_A 及び A を原点、梁軸を x 軸とした曲げモーメント式 $M_x = f(x)$ を知る時は梁軸上位意の点における傾斜 i_x 及び撓み y_x は次式で求められる。

第 1 圖

$$EI i_x = EI i_A - A_x \dots\dots\dots (1)$$

$$EI y_x = EI y_A + EI i_A x - A_x (x - \bar{x}) \dots\dots\dots (2)$$

$$= EI i_A x - A_x (x - \bar{x}) \dots\dots\dots (2)'$$

$y_A = 0$ なる時

梁軸上 l を離る 2 点 AB の撓み $y_A y_B$ が既知なる時はこれ等の点の傾斜 $i_A i_B$ は次式にて求められる

$$EI i_A = \frac{1}{l} \{ EI (y_B - y_A) + A_l (l - \bar{x}) \} \dots\dots (3)$$

$y_B = y_A$ なる時は

$$EI i_A = \frac{A_l (l - \bar{x})}{l} \dots\dots\dots (3)'$$

$$EI i_B = \frac{1}{l} \{ EI (y_A - y_B) + A_l \bar{x} \} \dots\dots\dots (4)$$

(1) 東京石川島造船所 (2) 機械學會誌 第 101 号 大正 14 年 9 月

$y_A = y_B$ なる時は

$$EI i_B = \frac{A_1 \bar{x}}{l} \dots\dots\dots (4)'$$

普通に取扱ふ曲げモーメント線図は三角形(第3図)又は三角形の集合梯形(第4図)抛物線形(第5図)なるを以て曲げモーメント線図を荷重と見做した時の反動力は次の諸式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{h}{6}(l+b) \\ R_B &= \frac{h}{6}(l+a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{l}{6}(2a+b) \\ R_B &= \frac{l}{6}(a+2b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$y = cx^n \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \text{面積 } ABC &= \int_0^x cx^n dx \\ &= \frac{cx^{n+1}}{n+1} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{重心の距離 } BE &= \frac{x}{n+2} \\ &\dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

今此處に一つの剛節門型を考へ支点が磨擦のない轉子で出来てゐるとし勝手な垂直荷重に依りて支点の轉子は或る変位をする。その変位を水平推力を加へて元の位置に復せしめたのが、鉸脚門型と考へることが出来る。更にこの場合支点における角変位をモーメントを加へ、元の位置に復せしめたのが、固定脚門型と考へることが出来る。斯様な考を以て前記理論を應用すれば、極めて簡単に解くことが出来る。

2. 基本門型への應用

E =縦弾性係数、 I_1, I_2 =各々柱の断面の慣性モーメント、 I_3 =梁の断面の慣性モーメント、 A =荷重に依る曲げモーメント線図の面積、 i =傾斜、 δ =撓み、 X =支点における水平推力、 V =支点における垂直反動力、 M =支点におけるモーメント、 l =径間、 h =高さとし鉸脚門型固定脚門型1個のピンを有する鉸脚門型(鉸脚を有する片門型として取扱ふ)及び1個のピンを有する固定脚門型を解いて見よう。

(1) 垂直荷重をもつ鉸脚門型(第6図)

$$\begin{aligned} i_B &= \frac{A(l-\bar{x})}{EI_2}, & i_C &= -\frac{A\bar{x}}{EI_2} \\ \delta_a &= \frac{A(l-\bar{x})h}{EI_2} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\delta_a = \frac{A\bar{x}h}{EI_2} \dots\dots\dots (2)$$

$$\delta_a + \delta_a = \frac{A(l-\bar{x})h}{EI_2} + \frac{A\bar{x}h}{EI_2} = \frac{Ah}{EI_2} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{2}{3} \frac{Xh^3}{EI_1} + \frac{Xh^2l}{EI_2} = \frac{Ah}{EI_2} \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{I_2h}{I_1l}, & \frac{Ah}{EI_2} &= \frac{Xh^2l}{EI_2} \left(\frac{2}{3}\xi + 1 \right) \\ X &= \frac{A}{hl} \frac{3}{2\xi + 3} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

これを従來の最小働の理に依りて調べてみれば

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X} dx = 0$$

$$\begin{aligned} \text{脚柱 } AB \text{ の曲げモーメント} &= \\ -Xx \frac{\partial M}{\partial X} &= -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{梁 } BC \text{ の曲げモーメント} &= \\ M_0 - Xh \frac{\partial M}{\partial X} &= -h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{脚柱 } CD \text{ の曲げモーメント} &= \\ Xx \frac{\partial M}{\partial X} &= -x \end{aligned}$$

脚柱 AB に就て歪エネルギーの X に就て偏微分したものは

$$\frac{X}{EI_1} \int_0^h x^2 dx = \frac{Xh^3}{3EI_1}$$

脚柱 CD に就ても同様に

$$\frac{X}{EI_1} \int_0^h x^2 dx = \frac{Xh^3}{3EI_1}$$

梁 BC に就ても同様に

$$\begin{aligned} -\frac{h}{EI_2} \int_0^l M_0 dx + \frac{Xh^2}{EI_2} \int_0^l dx \\ -\frac{Ah}{EI_2} + \frac{Xh^2l}{EI_2} \end{aligned}$$

$$\frac{Xh^3}{3EI_1} + \frac{Xh^3}{3EI_1} - \frac{Ah}{EI_2} + \frac{Xh^2l}{EI_2} = 0$$

$$\frac{2}{3} \frac{Xh^3}{EI_1} + \frac{Xh^2l}{EI_2} = \frac{Ah}{EI_2}$$

(4) 式と全く同じ結果が得られる。

(2) 頂点に水平荷重をもつ鉸脚門型(第7図)

$$\left. \begin{aligned} H_a = H_d &= \frac{P}{2} \\ V_a = V_d &= \frac{P}{2} \frac{h}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$M_B = M_C = \frac{Ph}{2}$$

$$EI_2 i_B = EI_2 i_C = \frac{Phl}{12} \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \delta_a = \delta_d &= \frac{Ph^3}{6EI_1} + \frac{Ph^2l}{12EI_2}, & \xi &= \frac{I_2h}{I_1l} \\ &= \frac{Ph^2l}{12EI_2} (2\xi + 1) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i_A = i_D &= \frac{H_a h^2}{2EI_1} + \frac{l}{6EI_2} (2M_B - M_C) \\
 &= \frac{Ph^2}{4EI_1} + \frac{Phl}{12EI_2} \quad \xi = \frac{I_2 h}{I_1 l} \\
 &= \frac{Phl}{12EI_2} (3\xi + 1) \dots\dots\dots (9)
 \end{aligned}$$

(3) 垂直荷重をもつ固定脚門型 (第8図)

$$\begin{aligned}
 \delta_a &= \left(\frac{Xh^3}{3EI_1} + \frac{Xh^2 l}{2EI_2} \right) - \left(\frac{M_a h^2}{2EI_1} + \frac{hl(2M_a + M_d)}{6EI_2} \right) \\
 \delta_d &= \left(\frac{Xh^3}{3EI_1} + \frac{Xh^2 l}{2EI_2} \right) - \left(\frac{M_d h^2}{2EI_1} + \frac{hl(2M_d + M_a)}{6EI_2} \right) \\
 \delta_a + \delta_d &= \left(\frac{2Xh^3}{3EI_1} + \frac{Xhl}{EI_2} \right) - \left(\frac{h^2(M_a + M_d)}{2EI_1} + \frac{3hl(M_a + M_d)}{6EI_2} \right) \\
 &\quad \xi = I_2 h / I_1 l \\
 &= \frac{Xh^2 l}{EI_2} \left(\frac{2}{3} \xi + 1 \right) - \frac{(M_a + M_d)hl}{2EI_2} (\xi + 1) \\
 \text{これを } Ah/EI_2 \text{ に等しく置けば} \\
 \frac{Ah}{EI_2} &= \frac{Xh^2 l}{EI_2} \left(\frac{2}{3} \xi + 1 \right) - \frac{(M_a + M_d)hl}{2EI_2} (\xi + 1) \\
 A &= Xhl \left(\frac{2}{3} \xi + 1 \right) - \frac{l}{2} (M_a + M_d) (\xi + 1) \dots\dots\dots (i)
 \end{aligned}$$

第 7 図

第 8 図

A, D 端に於て X, M_a , M_d に依る内方傾斜は

$$\begin{aligned}
 i_A &= \left(\frac{Xh^2}{2EI_1} + \frac{Xhl}{2EI_2} \right) - \left\{ \frac{M_a h}{EI_1} + \frac{l(2M_a + M_d)}{6EI_2} \right\} \\
 i_D &= \left(\frac{Xh^2}{2EI_1} + \frac{Xhl}{2EI_2} \right) - \left\{ \frac{M_d h}{EI_1} + \frac{l(2M_d + M_a)}{6EI_2} \right\} \\
 \frac{A(l-\bar{x})}{lEI_2} &= \left(\frac{Xh^2}{2EI_1} + \frac{Xhl}{2EI_2} \right) - \left\{ \frac{M_a h}{EI_1} + \frac{l(2M_a + M_d)}{6EI_2} \right\} \\
 \frac{A\bar{x}}{lEI_2} &= \left(\frac{Xh^2}{2EI_1} + \frac{Xhl}{2EI_2} \right) - \left\{ \frac{M_d h}{EI_1} + \frac{l(2M_d + M_a)}{6EI_2} \right\} \\
 \frac{A(l-\bar{x})}{l} &= \frac{Xhl}{2} (\xi + 1) - l \left\{ M_a \xi + \frac{1}{6} (2M_a + M_d) \right\} \dots\dots (ii)
 \end{aligned}$$

$$\frac{A\bar{x}}{l} = \frac{Xhl}{2} (\xi + 1) - l \left\{ M_d \xi + \frac{1}{6} (2M_d + M_a) \right\} \dots\dots (iii)$$

$$X = \frac{A}{hl} \frac{3}{\xi + 2} \dots\dots\dots (10)$$

$$M_a = \frac{A}{l} \left\{ \frac{3(2\xi - l)}{l(6\xi + 1)} + \frac{1}{\xi + 2} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$M_d = \frac{A}{l} \left\{ \frac{1}{\xi + 2} - \frac{3}{l} \frac{(2\xi - l)}{(6\xi + 1)} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

これを従来の最小働の理に依りて調べてみれば

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X} dx = 0 \quad \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_a} dx = 0$$

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_d} dx = 0$$

脚柱 A, B の曲げモーメント = $M_a - Xx$

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -x \quad \frac{\partial M}{\partial M_a} = 1$$

梁 BC の曲げモーメント = $M_0 + \left(M_a + \frac{M_d - M_a x}{l} \right) - Xh$

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -h \quad \frac{\partial M}{\partial M_a} = \left(1 - \frac{x}{l} \right) \quad \frac{\partial M}{\partial M_d} = \frac{x}{l}$$

脚柱 C, D の曲げモーメント = $M_d - Xx$

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -x \quad \frac{\partial M}{\partial M_d} = 1$$

脚柱 A, B に就ての歪エネルギーの X について偏微分したものは

$$\begin{aligned}
 \frac{M_a}{EI_1} \int_0^h -x dx + \frac{X}{EI_1} \int_0^h x^2 dx \\
 - \frac{M_a h^2}{2EI_1} + \frac{Xh^3}{3EI_1}
 \end{aligned}$$

脚柱 A, B に就ての歪エネルギーの M_a に就て偏微分したものは

$$\begin{aligned}
 \int_0^h \frac{M_a - Xx}{EI_1} dx &= \frac{M_a}{EI_1} \int_0^h dx - \frac{X}{EI_1} \int_0^h x dx \\
 &= \frac{M_a h}{EI_1} - \frac{Xh^2}{2EI_1}
 \end{aligned}$$

梁 B, C に就ての歪エネルギーの X に就て偏微分したものは

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{EI_2} \int_0^l \left(M_0 + M_a \left(1 - \frac{x}{l} \right) + M_d \frac{x}{l} - Xh \right) - h dx \\
 &- \frac{h}{EI_2} \int_0^l M_0 dx - \frac{M_a h}{EI_2} \int_0^l dx + \frac{M_d h}{lEI_2} \int_0^l x dx \\
 &- \frac{M_d h}{lEI_2} \int_0^l x dx + \frac{Xh^2}{EI_2} \int_0^l dx = - \frac{h}{EI_2} \int_0^l M_0 dx - \frac{M_a hl}{2EI_2} \\
 &- \frac{M_d hl}{2EI_2} + \frac{Xhl}{EI_2}
 \end{aligned}$$

梁 BC に就ての歪エネルギーの M_a に就て偏微分したものは

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{EI_2} \int_0^l \left(M_0 + M_a \left(1 - \frac{x}{l} \right) + M_d \frac{x}{l} - Xh \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx \\
 &\frac{1}{EI_2} \int_0^l M_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^l M_a \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx \\
 &+ \frac{1}{EI_2} \int_0^l M_d \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx - \frac{1}{EI_2} \int_0^l Xh \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx \\
 &\frac{1}{EI_2} \int_0^l M_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx + \frac{M_d l}{3EI_2} + \frac{M_d l}{6EI_2} - \frac{Xhl}{2EI_2}
 \end{aligned}$$

梁 BC に就ての歪エネルギーの M_d に就て偏微分したものは

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{EI_2} \int_0^l \left(M_0 + M_a \left(1 - \frac{x}{l} \right) + M_d \frac{x}{l} - Xh \right) \frac{x}{l} dx \\
 &\frac{1}{EI_2} \int_0^l M_0 \frac{x}{l} dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^l M_a \left(1 - \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l} dx \\
 &+ \frac{1}{EI_2} \int_0^l M_d \frac{x^2}{l^2} dx - \frac{1}{EI_2} \int_0^l Xh \frac{x}{l} dx \\
 &\frac{1}{EI_2} \int_0^l M_0 \frac{x}{l} dx + \frac{M_a l}{6EI_2} + \frac{M_d l}{3EI_2} - \frac{Xhl}{2EI_2}
 \end{aligned}$$

脚柱 C, D に就ての歪エネルギーの X に就て偏微分したものは

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{EI_1} \int_0^h (M_d - Xx) - x dx = - \frac{M_d}{EI_1} \int_0^h x dx \\
 &+ \frac{x}{EI_1} \int_0^h x^2 dx - \frac{M_d h^2}{2EI_1} + \frac{Xh^3}{3EI_1}
 \end{aligned}$$

脚柱 CD に就ての歪エネルギーの M_d に就て偏微分したものは

$$\frac{1}{EI_1} \int_0^h (M_d - Xx) dx = \frac{M_d}{EI_1} \int_0^h dx - \frac{x}{EI_1} \int_0^h x dx$$

$$\frac{M_d h}{EI_1} - \frac{Xh^2}{2EI_1}$$

歪エネルギーの X に就て偏微分したものの総和は

$$\frac{2Xh^3}{3EI_1} + \frac{Xh^2 l}{EI_2} - \frac{M_d h^2}{2EI_1} + \frac{M_a h l}{2EI_2} - \frac{M_d h^2}{2EI_1} - \frac{M_d h l}{2EI_2}$$

$$- \frac{h}{EI_2} \int_0^l M_0 dx = 0 \quad \dots\dots(i)$$

歪エネルギーの M_a に就て偏微分したものの総和は

$$- \frac{Xh^2}{2EI_1} - \frac{Xhl}{2EI_2} + \frac{M_a h}{EI_1} + \frac{M_a l}{3EI_2} + \frac{M_d l}{6EI_2}$$

$$+ \frac{1}{EI_2} \int_0^l M_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = 0 \quad \dots\dots(ii)$$

歪エネルギーの M_d に就て偏微分したものの総和は

$$- \frac{Xh^2}{2EI_1} - \frac{Xhl}{2EI_2} + \frac{M_a l}{6EI_2} + \frac{M_d h}{EI_1} + \frac{M_d l}{3EI_2}$$

$$+ \frac{1}{EI_2} \int_0^l M_0 \frac{x}{l} dx = 0 \quad \dots\dots(iii)$$

上式を整理すれば

$$2Xh \left(\frac{2}{3} \frac{hI_2}{I_1} + l \right) - M_a \left(\frac{hI_2}{I_1} + l \right)$$

$$- M_d \left(\frac{hI_2}{I_1} + l \right) = 2 \int_0^l M_0 dx \quad \dots\dots(i)'$$

$$\frac{Xh}{2} \left(\frac{hI_2}{I_1} + l \right) - M_a \left(\frac{hI_2}{I_1} + \frac{l}{3} \right)$$

$$- M_d \frac{l}{6} = \int_0^l M_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx \quad \dots\dots(ii)'$$

$$\frac{Xh}{2} \left(\frac{hI_2}{I_1} + l \right) - M_a \frac{l}{6}$$

$$- M_d \left(\frac{hI_2}{I_1} + \frac{l}{3} \right) = \int_0^l M_0 \frac{x}{l} dx \quad \dots\dots(iii)'$$

$\xi = I_2 h / I_1 l$ と置いて簡単にすれば

$$2Xhl \left(\frac{2}{3} \xi + 1 \right) - M_a l (\xi + 1) + M_d l (\xi + 1) = 2A \quad \dots\dots(i)''$$

$$\frac{Xhl}{2} (\xi + 1) - l \left\{ M_a \xi + \frac{1}{6} (2M_a + M_d) \right\} = \frac{A(l + \bar{x})}{l} \quad \dots\dots(ii)''$$

$$\frac{Xhl}{2} (\xi + 1) - l \left\{ M_d \xi + \frac{1}{6} (2M_d + M_a) \right\} = \frac{A\bar{x}}{l} \quad \dots\dots(iii)''$$

前に計算せしものと全く同じ結果を得る。

(4) 頂点に水平荷重をもつ固定脚門型 (第9図)

$$\left. \begin{aligned} H_a &= H_d = \frac{P}{2} \\ M_a &= M_d = M \\ V_a &= V_d = V \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(13)$$

固定端のモーメントで生ずる A 点の傾斜は

$$\frac{Mh}{EI_1} + \frac{l}{6EI_2} (2M - M) = \frac{Ml}{6EI_2} (6\xi + 1)$$

これを (9) 式に等しく置けば

$$\frac{Phl}{12EI_2} (3\xi + 1) = \frac{Ml}{6EI_2} (6\xi + 1)$$

昭和10年11月]

$$M = \frac{Ph}{2} \frac{3\xi + 1}{6\xi + 1} \quad \dots\dots(14)$$

$$M_B = 0 = \frac{Ph}{l} - M - \frac{Vl}{2}$$

$$V = \frac{Ph}{l} - \frac{2M}{l} = \frac{Ph}{l} \left\{ 1 - \frac{3\xi + 1}{6\xi + 1} \right\} = \frac{Ph}{l} \frac{3\xi}{6\xi + 1} \quad \dots\dots(15)$$

$$\delta_A = \delta_D = \frac{Mh^2}{2EI_1} + \frac{Mhl}{6EI_2} = \frac{Mhl}{6EI_2} (3\xi + 1)$$

$$\delta_B = \delta_C = \frac{Ph^2 l}{12EI_2} (2\xi + 1) - \frac{Mhl}{6EI_2} (3\xi + 1)$$

$$= \frac{Ph^3}{12EI_1} \frac{3\xi + 2}{6\xi + 1} \quad \dots\dots(16)$$

M を不静定としこれを従来の最小働きの理に依りて調べて

$$\text{みれば} \quad \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_a} dx = 0$$

$$\text{脚柱 } AB \text{ の曲げモーメント} = \frac{P}{2} x - M, \quad \frac{\partial M}{\partial M_a} = -1$$

$$\text{梁 } BC \text{ の曲げモーメント} = \frac{P}{2} h \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{M}{l} \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

$$= \frac{Ph}{2} - \frac{Ph}{l} x - M + \frac{2M}{l} x$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_a} = -1 + \frac{2}{l} x$$

脚柱 A, B に就ての歪エネルギーの M_a に就て偏微分したものは

$$\frac{1}{EI_1} \int_0^h \left(\frac{P}{2} x - M \right) - 1 dx$$

$$= \frac{1}{EI_1} \int_0^h \frac{P}{2} x - dx$$

$$+ \frac{1}{EI_1} \int_0^h M dx = -\frac{Ph^2}{4EI_1} + \frac{Mh}{EI_1}$$

梁 BC に就ての歪エネルギーの M_a に就て偏微分したものは

$$\frac{1}{EI_2} \int_0^{l/2} \left\{ \frac{Ph}{2} - \frac{Ph}{l} x - M + \frac{2M}{l} x \right\} \left\{ -1 + \frac{2x}{l} \right\} dx$$

$$= \frac{I}{EI_2} \int_0^{l/2} \frac{Ph}{2} \left\{ -1 + \frac{2x}{l} \right\} dx - \frac{1}{EI_2} \int_0^{l/2} \frac{Ph}{l} x \left\{ -1 + \frac{2x}{l} \right\} dx$$

$$- \frac{1}{EI_2} \int_0^{l/2} M \left\{ -1 + \frac{2x}{l} \right\} dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^{l/2} \frac{2M}{l} x \left\{ -1 + \frac{2x}{l} \right\} dx$$

$$= -\frac{Phl}{12EI_2} + \frac{Ml}{6EI_2}$$

歪エネルギーの M_a に就て偏微分したものの総和は

$$-\frac{Ph^2}{4EI_1} + \frac{Mh}{EI_1} - \frac{Phl}{12EI_2} + \frac{Ml}{6EI_2} = 0$$

$$M \left(\frac{h}{EI_1} + \frac{l}{6EI_2} \right) = \frac{Ph}{4} \left\{ \frac{h}{EI_1} + \frac{l}{3EI_2} \right\}$$

$$M = \frac{Ph}{4} \frac{\frac{h}{EI_1} + \frac{l}{3EI_2}}{\frac{h}{EI_1} + \frac{l}{6EI_2}} = \frac{Ph}{4} \frac{\frac{h}{I_1} + \frac{l}{3I_2}}{\frac{h}{I_1} + \frac{l}{6I_2}}$$

$$\xi = I_2 h / I_1 l \text{ と置けば} = \frac{Ph}{2} \frac{3\xi + 1}{6\xi + 1}$$

前に計算せしものと全く同じ M が求まれば V は静定的

に求まるが今度は V を不静定として最小働の理に依りて調べてみれば

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V} dx = 0$$

梁 BC の曲げモーメント $= Vx$ $\frac{\partial M}{\partial V} = x$

脚柱 AB の曲げモーメント $= \frac{Vl}{2} - \frac{P}{2}x$, $\frac{\partial M}{\partial V} = \frac{l}{2}$

梁 BC に就ての歪エネルギーの V に就て偏微分したものは

$$\frac{1}{EI_2} \int_0^{l/2} Vx^2 dx = \frac{Vl^3}{24EI_2}$$

脚柱 AB に就て歪エネルギーの V に就て偏微分したものは

$$\frac{1}{EI_1} \int_0^h \left\{ V \frac{l^2}{4} - \frac{Plx}{4} \right\} dx = \frac{Vl^2h}{4EI_1} + \frac{Ph^2l}{8EI_1}$$

歪エネルギーの V に就て偏微分したものの総和は

$$\frac{Vl^3}{24EI_2} + \frac{Vl^2h}{4EI_1} - \frac{Ph^2}{8EI_1} = 0$$

第 10 図

$$V = \frac{Ph}{l \left\{ \frac{l}{3I_2h} + 2 \right\}}$$

$$= \frac{Ph}{l} \left\{ \frac{3I_2h}{I_1} \right\}$$

$\xi = I_2h/I_1$ と置けば

$$= \frac{Ph}{l} \frac{3\xi}{6\xi+1}$$

前に計算せしものと全く同じである。

(5) 垂直荷重をもち 1 個のピンを有する鉸脚門型 (第 10 図) これは片門型鉸脚として取扱い計算してみれば

$$i_B = \frac{A(l-\bar{x})}{lEI_2}, \quad i_C = \frac{A\bar{x}}{lEI_2}$$

$$\frac{A\bar{x}h}{lEI_2} = \frac{Xh^3}{3EI_1} + \frac{Xh^2l}{3EI_2}$$

$$\xi = I_2h/I_1l$$

$$= \frac{Xh^2l}{3EI_2} (\xi+1)$$

$$A = \frac{Xhl^2}{3\bar{x}} (\xi+1) \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$X = \frac{A}{hl^2} \frac{3\bar{x}}{\xi+1} \quad \dots\dots\dots (18)$$

これを従来の最小働の理によりて調べてみれば

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X} dx = 0$$

脚柱 CD の曲げモーメント $= -Xx$ $\frac{\partial M}{\partial X} = -x$

脚柱 CD の歪エネルギーの X に就て偏微分したものは

$$\frac{X}{EI_1} \int_0^h x^2 dx = \frac{Xh^3}{3EI_1}$$

梁 BC の曲げモーメント $= M_0 - \frac{Xh}{l}x$, $\frac{\partial M}{\partial X} = -\frac{h}{l}x$

梁 BC の歪エネルギーの X に就て偏微分したものは

$$\frac{1}{EI_2} \int_0^l \left(M_0 - \frac{Xh}{l}x \right) - \frac{h}{l}x dx$$

$$= -\frac{l}{EI_2} \int_0^l M_0 x dx + \frac{Xh^2}{l^2 EI_2} \int_0^l x^2 dx$$

$$= -\frac{hA\bar{x}}{lEI_2} + \frac{Xh^2l}{3EI_2}$$

歪エネルギーの X に就て偏微分したものの総和は

$$\frac{Xh^3}{3EI_1} + \frac{Xh^2l}{3EI_2} - \frac{A\bar{x}h}{lEI_2} = 0$$

$$\frac{Xh^2l}{3EI_2} (\xi+1) - \frac{A\bar{x}h}{lEI_2} = 0$$

$$X = \frac{A}{hl^2} \frac{3\bar{x}}{\xi+1}$$

前に計算せしものと全く同じである。

(6) 頂点に水平荷重をもち 1 個のピンを有する鉸脚門型 (第 11 図)。

これは片門型鉸脚として計算してみれば

$$H_d = P \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$V_d = \frac{Ph}{l} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$i_B = \frac{Phl}{6EI_2}, \quad i_C = \frac{Phl}{3EI_2} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\delta_d = \frac{Ph^3}{3EI_1} + \frac{Ph^2l}{3EI_2} = \frac{Ph^2l}{3EI_2} (\xi+1) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$i_D = \frac{Ph^2}{2EI_1} + \frac{Phl}{3EI_2} = \frac{Phl}{3EI_2} \left(\frac{3}{2}\xi+1 \right) \quad \dots\dots\dots (23)$$

(7) 垂直荷重をもち 1 個のピンを有する固定脚門型 (第 12 図)。

第 12 図

$$\frac{Ah\bar{x}}{lEI_2} = \left(\frac{Xh^3}{3EI_1} + \frac{Xh^2l}{3EI_2} \right) - \left(\frac{M_d h^2}{2EI_1} + \frac{M_d h l}{3EI_2} \right)$$

$$A = \frac{Xhl^2}{3\bar{x}} (\xi+1) - \frac{M_d l^2}{6\bar{x}} (3\xi+2) \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$\frac{A\bar{x}}{lEI_2} = \left(\frac{Xh^2}{2EI_1} + \frac{Xhl}{3EI_2} \right) - \left(\frac{M_d h}{EI_1} + \frac{M_d l}{3EI_2} \right)$$

$$A = \frac{Xhl}{6\bar{x}} (3\xi+2) - \frac{M_d l}{3\bar{x}} (3\xi+1) \quad \dots\dots\dots (ii)$$

$$X = \frac{3M_d}{h} \quad \dots\dots\dots (iii)$$

$$M_d = \frac{2A\bar{x}}{l^2 \left(\xi - \frac{4}{3} \right)} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$X = \frac{6A\bar{x}}{hl^2 \left(\xi - \frac{4}{3} \right)} \quad \dots\dots\dots (25)$$

これを従来の最小働の理に依りて調べてみれば

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X} dx = 0$$

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_d} dx = 0$$

脚柱 C, D の曲げモーメント $= M_d - Xx$

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -x, \quad \frac{\partial M}{\partial M_d} = 1$$

梁 B, C の曲げモーメント $= M_0 + M_d \frac{x}{l} - \frac{Xh}{l}x$

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -\frac{h}{l}x, \quad \frac{\partial M}{\partial M_d} = \frac{x}{l}$$

脚柱 C, D の歪エネルギーの X に就て偏微分したものは

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI_1} \int_0^h (M_d - Xx) \cdot x dx &= -\frac{M_d}{EI_1} \int_0^h x dx + \frac{X}{EI_1} \int_0^h x^2 dx \\ &= -\frac{M_d h^2}{2EI_1} + \frac{Xh^3}{3EI_1} \end{aligned}$$

脚柱 C, D の歪エネルギーの M_d に就て偏微分したものは

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI_1} \int_0^h (M_d - Xx) dx &= \frac{M_d}{EI_1} \int_0^h dx - \frac{X}{EI_1} \int_0^h x dx \\ &= \frac{M_d h}{EI_1} - \frac{Xh^2}{2EI_1} \end{aligned}$$

梁 B, C に就ての歪エネルギーの X に就て偏微分したものは

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI_2} \int_0^l \left(M_0 + M_d \frac{x}{l} - \frac{Xh}{l}x \right) \cdot \frac{h}{l} x dx \\ - \frac{h}{lEI_2} \int_0^l M_0 x dx - \frac{M_d h}{l^2 EI_2} \int_0^l x^2 dx \\ + \frac{Xh^2}{l^2 EI_2} \int_0^l x^2 dx &= -\frac{Ah\bar{x}}{lEI_2} - \frac{M_d hl}{3EI_2} + \frac{Xh^2 l}{3EI_2} \end{aligned}$$

梁 B, C に就ての歪エネルギーの M_d に就て偏微分したものは

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI_2} \int_0^l \left(M_0 + M_d \frac{x}{l} - \frac{Xh}{l}x \right) \frac{x}{l} dx \\ \frac{1}{lEI_2} \int_0^l M_0 x dx + \frac{M_d}{l^2 EI_2} \int_0^l x^2 dx - \frac{Xh}{l^2 EI_2} \int_0^l x^2 dx \\ \frac{A\bar{x}}{lEI_2} + \frac{M_d l}{3EI_2} - \frac{Xhl}{3EI_2} \end{aligned}$$

歪エネルギーの X に就て偏微分したものの総和は

$$\begin{aligned} -\frac{Ah\bar{x}}{lEI_2} - \frac{M_d hl}{3EI_2} + \frac{Xh^2 l}{3EI_2} - \frac{M_d h^2}{2EI_1} + \frac{Xh^3}{3EI_1} \\ \frac{Ah\bar{x}}{lEI_2} = \left(\frac{Xh^3}{3EI_1} + \frac{Xh^2 l}{3EI_2} \right) - \left(\frac{M_d h^2}{2EI_1} + \frac{M_d hl}{3EI_2} \right) \dots\dots(i) \end{aligned}$$

歪エネルギーの M_d に就て偏微分したものの総和は

$$\begin{aligned} \frac{M_d h}{EI_1} + \frac{Xh^2}{2EI_1} + \frac{A\bar{x}}{lEI_2} + \frac{M_d l}{3EI_2} - \frac{Xhl}{3EI_2} \\ \frac{A\bar{x}}{lEI_2} = \left(\frac{Xh^2}{2EI_1} + \frac{Xhl}{3EI_2} \right) - \left(\frac{M_d h}{EI_1} + \frac{M_d l}{3EI_2} \right) \dots\dots(ii) \end{aligned}$$

即ち前に計算したものと全く同じである。

(8) 頂点に水平荷重をもち 1 個のピンを有する固定脚門型 (第 13 図)。

水平反動力に依りて生ずる傾斜を固定端におけるモーメントに依りて生ずる傾斜に等しく置けば

$$\begin{aligned} \frac{M_d h}{EI_1} + \frac{M_d l}{3EI_2} = \frac{Xh^2}{2EI_1} + \frac{Xhl}{3EI_2} \\ \frac{M_d h}{EI_1} + \frac{M_d l}{3EI_2} - \frac{Xh^2}{2EI_1} - \frac{Xhl}{3EI_2} = 0 \dots\dots(i) \end{aligned}$$

撓み δ_B を撓み δ_C に等しく置けば

$$\begin{aligned} \frac{Xh^3}{3EI_1} + \frac{Xh^2 l}{3EI_2} - \left(\frac{M_d h^2}{2EI_1} + \frac{M_d hl}{3EI_2} \right) = \frac{(P-X)h^3}{3EI_3} \\ \frac{Xh^3}{3EI_1} + \frac{Xh^2 l}{3EI_2} - \frac{M_d h^2}{2EI_1} - \frac{M_d hl}{3EI_2} - \frac{(P-X)h^3}{3EI_3} = 0 \dots\dots(ii) \end{aligned}$$

$$M_d = X \frac{h \left(\frac{3}{2}\xi + 1 \right)}{3\xi + 1} \dots\dots(iii)$$

$$X = \frac{Ph}{I_3 \left\{ \frac{l(\xi+1)}{I_2} - \frac{l(\frac{3}{2}\xi+1)^2}{(3\xi+1)I_2} + \frac{h}{I_3} \right\}} \dots\dots(26)$$

M_d は (iii) によりて直ちに求むることを得

$$M_d = (P-X)h \dots\dots(27)$$

これを従来最小働きの理によりて調べてみれば

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X} dx = 0$$

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_d} dx = 0$$

脚柱 A, B の曲げモーメント

$$= (P-X) \frac{x}{h} \quad \frac{\partial M}{\partial X} = -\frac{x}{h}$$

梁 B, C の曲げモーメント

$$= M_d \frac{x}{l} - X \frac{h}{l}x \quad \frac{\partial M}{\partial X} = -\frac{h}{l}x$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_d} = \frac{x}{l}$$

脚柱 C, D の曲げモーメント

$$= M_d - Xx \quad \frac{\partial M}{\partial X} = -x$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_d} = 1$$

第 13 図

脚柱 A, B に就ての歪エネルギーの X に就て偏微分したものは

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI_3} \int_0^h (P-X) \frac{x}{h} \cdot \frac{x}{h} dx &= -\frac{P}{h^2 EI_3} \int_0^h x^2 dx \\ + \frac{X}{h^2 EI_3} \int_0^h x^2 dx &= -\frac{Ph}{3EI_3} + \frac{Xh}{3EI_3} = -\frac{(P-X)h}{3EI_3} \end{aligned}$$

梁 B, C に就ての歪エネルギーの X に就て偏微分したものは

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI_2} \int_0^l \left(M_d \frac{x}{l} - X \frac{h}{l}x \right) \cdot \frac{h}{l} x dx \\ = -\frac{M_d h}{l^2 EI_2} \int_0^l x^2 dx + \frac{Xh^2}{l^2 EI_2} \int_0^l x^2 dx \\ = -\frac{M_d hl}{3EI_2} + \frac{Xh^2 l}{3EI_2} \end{aligned}$$

梁 B, C に就ての歪エネルギーの M_d に就て偏微分したものは

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI_2} \int_0^l \left(M_d \frac{x}{l} - X \frac{h}{l}x \right) \frac{x}{l} dx \\ = \frac{M_d}{l^2 EI_2} \int_0^l x^2 dx - \frac{Xh}{l^2 EI_2} \int_0^l x^2 dx \\ = \frac{M_d l}{3EI_2} - \frac{Xhl}{3EI_2} \end{aligned}$$

脚柱 C, D に就ての歪エネルギーの X に就て偏微分したものは

$$\frac{1}{EI_1} \int_0^h (M_d - Xx) - x dx = \frac{M_d}{EI_1} \int_0^h -x dx - \frac{X}{EI_1} \int_0^h x^2 dx$$

$$= \frac{M_d h^2}{2EI_1} + \frac{Xh^3}{3EI_1}$$

脚柱 C, D に就ての歪エネルギーの M_d に就て偏微分したものは

$$\frac{1}{EI_1} \int_0^h (M_d - Xx) dx = \frac{M_d}{EI_1} \int_0^h dx - \frac{X}{EI_1} \int_0^h x dx$$

$$= \frac{M_d h}{EI_1} - \frac{Xh^2}{2EI_1}$$

歪エネルギーの X に就て偏微分したものの総和は

$$-\frac{M_d h l}{3EI_2} + \frac{Xh^2 l}{3EI_2} - \frac{M_d h^2}{2EI_1} + \frac{Xh^3}{3EI_1} - \frac{(P-X)h^3}{3EI_3} = 0 \dots (i)$$

歪エネルギーの M_d に就て偏微分したものの総和は

$$\frac{M_d l}{3EI_2} - \frac{Xh l}{3EI_2} + \frac{M_d h}{EI_1} - \frac{Xh^2}{2EI_1} = 0 \dots (ii)$$

前に計算せしものと全く同じである。

本問題は直接内力及び剪断力の影響は省略し曲げモーメントの影響についてのみ論じてゐる。終りにのぞみ本問題研究にあたつて御指導と御鞭撻下された中澤盛直技師に厚く御禮申上げる。

ボギー車の振動 (第2報)

(昭和 10 年 2 月 16 日 神戸地方講演會に於て講演)

正員

森

植⁽¹⁾

On the Vibrations of Bogie Railway Carriage

By Tei MORI, Member

摘 要

第1報⁽²⁾の続報として、ボギー車の各部に減衰摩擦力が作用するものとして自己振動及び強制振動を考へ、理論的に求めた最大振幅と実験から得たものとを比較して見た。

第3章 減衰自己振動

第1章⁽²⁾では、ボギー車の自己振動を論じたが、各部の減衰摩擦力を無視してゐる。本章では、減衰摩擦力⁽³⁾を考へに入れて自己振動を考へて見る。

ボギー車に作用する減衰摩擦力は、枕ばねの板の間及び揺枕釣とピンとの間の摩擦、枕ばね及び釣合ばねの材料の内部摩擦、空気摩擦等に分けられる。これ等の内、枕ばねの板の間及び揺枕釣とピンとの間には、はじめの間は油が塗つてあつてその間の摩擦は、速度に比例し、時を経て油気がなくなれば、速度に無関係で垂直圧力に比例するやうになる。材料内部の摩擦及び空気摩擦は、速度に比例するものである。

それで、ボギー車の場合、揺枕釣、枕ばね及び釣合ばねにかかる荷重の減衰摩擦力は、速度に比例すると見て差支へあるまい。

今、 μ を減衰摩擦力の大きさを表はす正の常数とすれば、減衰摩擦力 F は、常に速度 v と反対の方向を有するを以て、減衰摩擦力と速度との関係は、次の様に表はされる。

$$F = -\mu v \dots (103)$$

第1章第3節 (29) 式⁽²⁾に就つて、振動の微分方程式を、次の如く書き得る。

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y}_2 + M\ddot{y}_3 + 2Ky_2 &= Y_2 \\ (Ma^2 + Ib^2)\ddot{\phi} + (Mac + Id^2)\ddot{\phi}_2 \\ &+ (-Mh_3a + Ib)\ddot{\phi}_3 = \Psi \\ (Mac + Id^2)\ddot{\phi} + (Mc^2 + Id^2)\ddot{\phi}_2 \\ &+ (-Mh_3c + Id)\ddot{\phi}_3 + 2Ka_1^2\phi_2 = \Phi_2 \\ M\ddot{y}_2 + (M+m)\ddot{y}_3 + 2ky_3 &= Y_3 \\ (-Mh_3a + Ib)\ddot{\phi} + (-Mh_3c + Id)\ddot{\phi}_2 \\ &+ (Mh_3^2 + I + mh_3'^2 + i)\ddot{\phi}_3 + 2ka_3^2\phi_3 = \Phi_3 \end{aligned} \right\} \dots (104)$$

今 R = 揺枕釣ピンの半径

μ = 枕ばねにかゝる荷重の垂直方向の減衰摩擦係数

μ' = 釣合ばねにかゝる荷重の垂直方向の減衰摩擦係数

μ_1 = 揺枕釣にかゝる荷重の水平方向の減衰摩擦係数

μ_2 = 枕ばねにかゝる荷重の水平方向の減衰摩擦係数

μ_3 = 釣合ばねにかゝる荷重の水平方向の減衰摩擦係数

とすれば、一般座標 y_2, ϕ, ϕ_2, y_3 及び ϕ_3 方向の一般力 Y は次の様に表はされる。

$$\left. \begin{aligned} Y_2 &= -\mu \dot{y}_2 \\ \Psi &= \Psi_1 - \mu_1 R^2 \dot{\phi} \end{aligned} \right\}$$

[第1巻第5號]

(1) 日立製作所 (元京阪電気鐵道株式会社)
第1巻 第2號 ボギー車の振動 (第1報)
Vibration Problems in Engineering.

(2) 機械学会論文集
(3) Timoshenko,