$$\frac{1}{EI_1} \int_0^h (M_d - Xx) - x dx = \frac{M_d}{EI_1} \int_0^h -x dx - \frac{X}{EI_1} \int_0^h x^2 dx$$

$$= \frac{M_d h^2}{2EI_1} + \frac{Xh^3}{3EI_1}$$

脚柱 C, D に就ての歪エネルギーの M_d に就て偏微分したものは

$$\frac{1}{EI_1} \int_0^h (M_d - Xx) dx = \frac{M_d}{EI_1} \int_0^h dx - \frac{X}{EI_1} \int_0^h x dx$$

$$= \frac{M_d h}{EI_1} - \frac{Xh^2}{2EI_1}$$

歪エネルギーの X に就て偏微分したものの総和は

$$-\frac{M_d h l}{3EI_2} + \frac{Xh^2 l}{3EI_2} - \frac{M_d h^2}{2EI_1} + \frac{Xh^3}{3EI_1} - \frac{(P-X)h^3}{3EI_3} = 0 \dots (i)$$

歪エネルギーの M_d に就て偏微分したものの総和は

$$\frac{M_d l}{3EI_2} - \frac{Xh l}{3EI_2} + \frac{M_d h}{EI_1} - \frac{Xh^2}{2EI_1} = 0 \dots (ii)$$

前に計算せしものと全く同じである。

本問題は直接内力及び剪断力の影響は省略し曲げモーメントの影響についてのみ論じてゐる。終りにのぞみ本問題研究にあたつて御指導と御鞭撻下された中澤盛直技師に厚く御禮申上げる。

ボギー車の振動 (第2報)

(昭和 10 年 2 月 16 日 神戸地方講演會に於て講演)

正員

森

植⁽¹⁾

On the Vibrations of Bogie Railway Carriage

By Tei MORI, Member

摘 要

第1報⁽²⁾の続報として、ボギー車の各部に減衰摩擦力が作用するものとして自己振動及び強制振動を考へ、理論的に求めた最大振幅と実験から得たものとを比較して見た。

第3章 減衰自己振動

第1章⁽²⁾では、ボギー車の自己振動を論じたが、各部の減衰摩擦力を無視してゐる。本章では、減衰摩擦力⁽³⁾を考へに入れて自己振動を考へて見る。

ボギー車に作用する減衰摩擦力は、枕ばねの板の間及び揺枕釣とピンとの間の摩擦、枕ばね及び釣合ばねの材料の内部摩擦、空気摩擦等に分けられる。これ等の内、枕ばねの板の間及び揺枕釣とピンとの間には、はじめの間は油が塗つてあつてその間の摩擦は、速度に比例し、時を経て油気がなくなれば、速度に無関係で垂直圧力に比例するやうになる。材料内部の摩擦及び空気摩擦は、速度に比例するものである。

それで、ボギー車の場合、揺枕釣、枕ばね及び釣合ばねにかかる荷重の減衰摩擦力は、速度に比例すると見て差支へるまい。

今、 μ を減衰摩擦力の大きさを表はす正の常数とすれば、減衰摩擦力 F は、常に速度 v と反対の方向を有するを以て、減衰摩擦力と速度との関係は、次の様に表はされる。

$$F = -\mu v \dots (103)$$

第1章第3節 (29) 式⁽²⁾に就つて、振動の微分方程式を、次の如く書き得る。

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y}_2 + M\ddot{y}_3 + 2Ky_2 &= Y_2 \\ (Ma^2 + Ib^2)\ddot{\phi} + (Mac + Id^2)\ddot{\phi}_2 \\ &+ (-Mh_3a + Ib)\ddot{\phi}_3 = \Psi \\ (Mac + Id^2)\ddot{\phi} + (Mc^2 + Id^2)\ddot{\phi}_2 \\ &+ (-Mh_3c + Id)\ddot{\phi}_3 + 2Ka_1^2\phi_2 = \Phi_2 \\ M\ddot{y}_2 + (M+m)\ddot{y}_3 + 2ky_3 &= Y_3 \\ (-Mh_3a + Ib)\ddot{\phi} + (-Mh_3c + Id)\ddot{\phi}_2 \\ &+ (Mh_3^2 + I + mh_3'^2 + i)\ddot{\phi}_3 + 2ka_3^2\phi_3 = \Phi_3 \end{aligned} \right\} \dots (104)$$

今 R = 揺枕釣ピンの半径

μ = 枕ばねにかゝる荷重の垂直方向の減衰摩擦係数

μ' = 釣合ばねにかゝる荷重の垂直方向の減衰摩擦係数

μ_1 = 揺枕釣にかゝる荷重の水平方向の減衰摩擦係数

μ_2 = 枕ばねにかゝる荷重の水平方向の減衰摩擦係数

μ_3 = 釣合ばねにかゝる荷重の水平方向の減衰摩擦係数

とすれば、一般座標 y_2, ϕ, ϕ_2, y_3 及び ϕ_3 方向の一般力 Y は次の様に表はされる。

$$\left. \begin{aligned} Y_2 &= -\mu\dot{y}_2 \\ \Psi &= \Psi_1 - \mu_1 R^2 \dot{\phi} \end{aligned} \right\}$$

[第1巻第5號]

(1) 日立製作所 (元京阪電気鐵道株式会社)
第1巻 第2號 ボギー車の振動 (第1報)
Vibration Problems in Engineering.

(2) 機械学会論文集
(3) Timoshenko,

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2 &= -\mu_2 a_1^2 \dot{\phi}_2 \\ Y_3 &= -\mu' \dot{y}_3 \\ \Phi_3 &= -\mu_3 a_3^2 \dot{\phi}_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (105)$$

尚、この内で、 Ψ_1 は第1章第3節 (33) 式⁽²⁾ により

$$\Psi_1 = -Mge\varphi \dots\dots\dots (106)$$

f, j は (35)⁽²⁾ 式により

$$\left. \begin{aligned} f &= 2Ka_1^2/Mg \\ j &= 2ka_3^2/Mg \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (107)$$

であるから、(105) 式、(106) 式及び (107) 式の関係を (104) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y}_2 + M\ddot{y}_3 + 2Ky_2 &= -\mu\dot{y}_2 \\ M\ddot{y}_2 + (M+m)\ddot{y}_3 + 2ky_3 &= -\mu'\dot{y}_3 \\ (Ma^2 + Ib^2)\ddot{\phi} + (Mac + Id)\ddot{\phi}_2 \\ &+ (-Mh_3a + Ib)\ddot{\phi}_3 = -Mge\varphi - \mu_1 R^2 \dot{\phi} \\ (Mac + Id)\ddot{\phi} + (Mc^2 + Id^2)\ddot{\phi}_2 \\ &+ (-Mh_3c + Id)\ddot{\phi}_3 + Mgf\phi_2 = -\mu_2 a_1^2 \dot{\phi}_2 \\ (-Mh_3a + Ib)\ddot{\phi} + (-Mh_3c + Id)\ddot{\phi}_2 \\ &+ (Mh_3^2 + I + mh_3^2 + i)\ddot{\phi}_3 + Mgj\phi_3 \\ &= -\mu_3 a_3^2 \dot{\phi}_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (108)$$

となる。即ち減衰振動の場合にも上下動と左右動とは、独立になる。

第1節 上下動

(108) 式を変形した。

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y}_2 + \mu\dot{y}_2 + 2Ky_2 + M\ddot{y}_3 &= 0 \\ M\ddot{y}_2 + (M+m)\ddot{y}_3 + \mu'\dot{y}_3 + 2ky_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (110)$$

を解くのに

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= Ae^{\sigma t} \\ y_3 &= Be^{\sigma t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (111)$$

とおき、(110) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} (M\sigma^2 + \mu\sigma + 2K)A + M\sigma^2 B &= 0 \\ M\sigma^2 A + \{(M+m)\sigma^2 + \mu'\sigma + 2k\}B &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (112)$$

なる関係を得る。(112) 式が恒等的に成立するためには、

$$(M\sigma^2 + \mu\sigma + 2K)\{(M+m)\sigma^2 + \mu'\sigma + 2k\} - M^2\sigma^4 = 0 \dots\dots (113)$$

なる関係がなければならない。(113) 式から σ を解けば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\delta_1 + iq_1, & \sigma_2 &= -\delta_2 + iq_2 \\ \sigma_1' &= -\delta_1 - iq_1, & \sigma_2' &= -\delta_2 - iq_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (114)$$

の四つの根を得る。即ち (110) 式の一般解は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= A_1' e^{(-\delta_1 + iq_1)t} + A_1'' e^{(-\delta_1 - iq_1)t} \\ &+ A_2' e^{(-\delta_2 + iq_2)t} + A_2'' e^{(-\delta_2 - iq_2)t} \\ y_3 &= B_1' e^{(-\delta_1 + iq_1)t} + B_1'' e^{(-\delta_1 - iq_1)t} \\ &+ B_2' e^{(-\delta_2 + iq_2)t} + B_2'' e^{(-\delta_2 - iq_2)t} \end{aligned} \right\} \dots\dots (115)$$

(115) 式を纏れば

昭和10年11月]

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= e^{-\delta_1 t} \{ (A_1' + A_1'') \cos q_1 t + i(A_1' - A_1'') \sin q_1 t \} \\ &+ e^{-\delta_2 t} \{ (A_2' + A_2'') \cos q_2 t + i(A_2' - A_2'') \sin q_2 t \} \\ y_3 &= e^{-\delta_1 t} \{ (B_1' + B_1'') \cos q_1 t + i(B_1' - B_1'') \sin q_1 t \} \\ &+ e^{-\delta_2 t} \{ (B_2' + B_2'') \cos q_2 t + i(B_2' - B_2'') \sin q_2 t \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (116)$$

となる。然るに y_2 及び y_3 は実数なるを以て A, B, a 及び β を定数とし

$$\left. \begin{aligned} A' + A'' &= A \sin a, & i(A' - A'') &= A \cos a \\ B' + B'' &= B \sin \beta, & i(B' - B'') &= B \cos \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots (117)$$

なる様に A, B, a 及び β を定めれば (116) 式は

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + a_1) + A_2 e^{-\delta_2 t} \sin(q_2 t + a_2) \\ y_3 &= B_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + \beta_1) + B_2 e^{-\delta_2 t} \sin(q_2 t + \beta_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots (118)$$

なる形になる。又 (117) 式から次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} B/A &= (\cos a + i \sin a) B' / (\cos \beta + i \sin \beta) A' \\ &= (\cos a - i \sin a) B'' / (\cos \beta - i \sin \beta) A'' \end{aligned} \right\} \dots\dots (119)$$

而して A' と B' , A'' と B'' の関係は (112) 式から

$$\left. \begin{aligned} B'/A' &= (M\sigma^2 + \mu\sigma + 2K) / (-M\sigma^2) \\ &= \{ M(\delta^2 - q^2) - \mu\delta + 2K - i(2M\delta q - \mu q) \} / \\ &\quad \{ -M(\delta^2 - q^2) + 2iM\delta q \} \\ B''/A'' &= (M\sigma'^2 + \mu\sigma' + 2K) / (-M\sigma'^2) \\ &= \{ M(\delta^2 - q^2) - \mu\delta + 2K + i(2M\delta q - \mu q) \} / \\ &\quad \{ -M(\delta^2 - q^2) - 2iM\delta q \} \end{aligned} \right\} \dots\dots (120)$$

となる。故に (120) 式を (119) 式に代入して

$$\left. \begin{aligned} \{ M(\delta^2 - q^2) - \mu\delta + 2K - i(2M\delta q - \mu q) \} (\cos a + i \sin a) / \\ \{ -M(\delta^2 - q^2) + 2iM\delta q \} (\cos \beta + i \sin \beta) \\ = \{ M(\delta^2 - q^2) - \mu\delta + 2K + i(2M\delta q - \mu q) \} (\cos a - i \sin a) / \\ \{ -M(\delta^2 - q^2) - 2iM\delta q \} (\cos \beta - i \sin \beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots (121)$$

なる関係を得る。故に、(121) 式から a と β との関係を求めれば次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} (\tan a - \tan \beta) / (1 + \tan a \tan \beta) &= \tan(a - \beta) \\ &= [-M(\delta^2 - q^2)(2M\delta q - \mu q) \\ &\quad + 2M\delta q \{ M(\delta^2 - q^2) - \mu\delta + 2K \}] / \\ &\quad [-M(\delta^2 - q^2) \{ M(\delta^2 - q^2) - \mu\delta + 2K \} \\ &\quad - 2M\delta q (2M\delta q - \mu q)] \end{aligned} \right\} \dots\dots (122)$$

或は (122) 式から

$$\left. \begin{aligned} \beta &= a - \tan^{-1} \{ [-M(\delta^2 - q^2)(2M\delta q - \mu q) \\ &\quad + 2M\delta q \{ M(\delta^2 - q^2) - \mu\delta + 2K \}] / \\ &\quad [-M(\delta^2 - q^2) \{ M(\delta^2 - q^2) - \mu\delta + 2K \} \\ &\quad - 2M\delta q (2M\delta q - \mu q)] \} \end{aligned} \right\} \dots\dots (123)$$

とおける。即ち (119) 式は (123) 式を用ひて

$$\left. \begin{aligned} B/A &= \{ M(\delta^2 - q^2) - \mu\delta + 2K \\ &\quad - i(2M\delta q - \mu q) \} (\cos a + i \sin a) / \\ &\quad [\{ -M(\delta^2 - q^2) + 2iM\delta q \} \{ \cos(a - a') \\ &\quad + i \sin(a - a') \}] \\ &= I \end{aligned} \right\} \dots\dots (124)$$

とおき、展開して実数と虚数とを別々に考へれば

$$\left. \begin{aligned} & \{M(\delta^2 - q^2)l \sin a' + 2M\delta ql \cos a' + 2M\delta q \\ & \quad - \mu q\} \tan a - 2M\delta ql \sin a' \\ & \quad + M(\delta^2 - q^2)l \cos a' + M(\delta^2 - q^2) \\ & \quad - \mu\delta + 2K = 0 \\ & \{-2M\delta ql \sin a' + M(\delta^2 - q^2)l \cos a' + M(\delta^2 - q^2) \\ & \quad - \mu\delta + 2K\} \tan a - \{M(\delta^2 - q^2)l \sin a' \\ & \quad + 2M\delta ql \cos a' + 2M\delta q - \mu q\} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (125)$$

なる関係を得る。(125) 式が同時に成り立つためには

$$\left. \begin{aligned} & -2M\delta ql \sin a' + M(\delta^2 - q^2)l \cos a' \\ & \quad + M(\delta^2 - q^2) - \mu\delta + 2K = 0 \\ & M(\delta^2 - q^2)l \sin a' + 2M\delta ql \cos a' \\ & \quad + 2M\delta q - \mu q = 0 \end{aligned} \right\} \dots (126)$$

なる関係がなければならない。(126) 式から l を求めると

$$\begin{aligned} l &= \{M(\delta^2 - q^2) - \mu\delta + 2K\} / \{2M\delta q \sin a' - M(\delta^2 - q^2) \cos a'\} \\ &= \{-2M\delta q + \mu q\} / \{M(\delta^2 - q^2) \sin a' + 2M\delta q \cos a'\} \end{aligned} \dots (127)$$

なる値を得る。故に、(123) 式及び (124) 式を (118) 式に代入すれば、(110) 式の一般解として

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + a_1) + A_2 e^{-\delta_2 t} \sin(q_2 t + a_2) \\ y_3 &= l_1 A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + a_1 - a'_1) \\ & \quad + l_2 A_2 e^{-\delta_2 t} \sin(q_2 t + a_2 - a'_2) \end{aligned} \right\} \dots (128)$$

を得る。ここに任意常数 A_1 , A_2 , a_1 及び a_2 は環境条件によつて決定せられる値である。環境条件として

$$t=0 \text{ のとき } y_2 = y_{20}, \quad y_3 = y_{30} \dots (129)$$

$$a_1 = a_2 = \pi/2 \dots (130)$$

とすれば (129) 式及び (130) 式の関係 (128) 式に代入して

$$\left. \begin{aligned} y_{20} &= A_1 + A_2 \\ y_{30} &= l_1 A_1 \cos a'_1 + l_2 A_2 \cos a'_2 \end{aligned} \right\} \dots (131)$$

を得。これから A_1 及び A_2 を求めれば

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= (y_{20} l_2 \cos a'_2 - y_{30}) / (l_2 \cos a'_2 - l_1 \cos a'_1) \\ A_2 &= (y_{30} - y_{20} l_1 \cos a'_1) / (l_2 \cos a'_2 - l_1 \cos a'_1) \end{aligned} \right\} \dots (132)$$

なる関係を得る。(130) 式及び (132) 式の値を (128) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= (y_{20} l_2 \cos a'_2 - y_{30}) e^{-\delta_1 t} \cos q_1 t / \\ & \quad (l_2 \cos a'_2 - l_1 \cos a'_1) \\ & \quad + (y_{30} - y_{20} l_1 \cos a'_1) e^{-\delta_2 t} \cos q_2 t / \\ & \quad (l_2 \cos a'_2 - l_1 \cos a'_1) \\ y_3 &= (y_{20} l_2 \cos a'_2 - y_{30}) l_1 e^{-\delta_1 t} \cos(q_1 t - a'_1) / \\ & \quad (l_2 \cos a'_2 - l_1 \cos a'_1) \\ & \quad + (y_{30} - y_{20} l_1 \cos a'_1) l_2 e^{-\delta_2 t} \cos(q_2 t - a'_2) / \\ & \quad (l_2 \cos a'_2 - l_1 \cos a'_1) \end{aligned} \right\} \dots (133)$$

となり、減衰自己振動の上下動は、2 種類の振動の集合せるものであつて、その振動週期は (113) 式及び (114) 式を用ひて

$$T_1 = 2\pi/q_1, \quad T_2 = 2\pi/q_2 \dots (134)$$

となる。

第 2 節 左右動

(109) を変形した

$$\left. \begin{aligned} & (Ma^2 + Ib^2)\ddot{\phi} + \mu_1 R^2 \ddot{\phi} + Mge\varphi \\ & \quad + (Mac + Ibd)\ddot{\phi}_2 + (-Mh_3 a + Ib)\ddot{\phi}_3 = 0 \\ & (Mac + Ibd)\ddot{\phi} + (Mc^2 + Id^2)\ddot{\phi}_2 \\ & \quad + \mu_2 a_1^2 \ddot{\phi}_2 + Mgf\phi_2 + (-Mh_3 c + Id)\ddot{\phi}_3 = 0 \\ & (-Mh_3 a + Ib)\ddot{\phi} + (-Mh_3 c + Id)\ddot{\phi}_2 \\ & \quad + (Mh_3^2 + I + mh_3'^2 + i)\ddot{\phi}_3 + \mu_3 a_3^2 \ddot{\phi}_3 \\ & \quad + Mgf\phi_3 = 0 \end{aligned} \right\} \dots (135)$$

を解くのに、

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= Ae^{\sigma t} \\ \phi_2 &= Be^{\sigma t} \\ \phi_3 &= Ce^{\sigma t} \end{aligned} \right\} \dots (136)$$

とおき、(135) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} & \{(Ma^2 + Ib^2)\sigma^2 + \mu_1 R^2 \sigma + Mge\} A \\ & \quad + (Mac + Ibd)\sigma^2 B + (-Mh_3 a + Ib)\sigma^2 C = 0 \\ & (Mac + Ibd)\sigma^2 A + \{(Mc^2 + Id^2)\sigma^2 + \mu_2 a_1^2 \sigma \\ & \quad + Mgf\} B + (-Mh_3 c + Id)\sigma^2 C = 0 \\ & (-Mh_3 a + Ib)\sigma^2 A + (-Mh_3 c + Id)\sigma^2 B \\ & \quad + \{(Mh_3^2 + I + mh_3'^2 + i)\sigma^2 + \mu_3 a_3^2 \sigma \\ & \quad + Mgf\} C = 0 \end{aligned} \right\} \dots (137)$$

なる関係を得る。(137) 式が恒等的に成立するためには

$$\begin{vmatrix} (Ma^2 + Ib^2)\sigma^2 + \mu_1 R^2 \sigma + Mge & (Mac + Ibd)\sigma^2 & (-Mh_3 a + Ib)\sigma^2 \\ (Mac + Ibd)\sigma^2 & (Mc^2 + Id^2)\sigma^2 + \mu_2 a_1^2 \sigma + Mgf & (-Mh_3 c + Id)\sigma^2 \\ (-Mh_3 a + Ib)\sigma^2 & (-Mh_3 c + Id)\sigma^2 & (Mh_3^2 + I + mh_3'^2 + i)\sigma^2 + \mu_3 a_3^2 \sigma + Mgf \end{vmatrix} = 0 \dots (138)$$

なる関係がなければならない。(138) 式から σ を解けば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\delta_1 + iq_1, \quad \sigma_2 = -\delta_2 + iq_2, \quad \sigma_3 = -\delta_3 + iq_3 \\ \sigma'_1 &= -\delta_1 - iq_1, \quad \sigma'_2 = -\delta_2 - iq_2, \quad \sigma'_3 = -\delta_3 - iq_3 \end{aligned} \right\} \dots (139)$$

の六つの根を得る。即ち (135) 式の一般解は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A_1' e^{(-\delta_1 + iq_1)t} + A_1'' e^{(-\delta_1 - iq_1)t} + A_2' e^{(-\delta_2 + iq_2)t} \\ & \quad + A_2'' e^{(-\delta_2 - iq_2)t} + A_3' e^{(-\delta_3 + iq_3)t} + A_3'' e^{(-\delta_3 - iq_3)t} \\ \phi_2 &= B_1' e^{(-\delta_1 + iq_1)t} + B_1'' e^{(-\delta_1 - iq_1)t} + B_2' e^{(-\delta_2 + iq_2)t} \\ & \quad + B_2'' e^{(-\delta_2 - iq_2)t} + B_3' e^{(-\delta_3 + iq_3)t} + B_3'' e^{(-\delta_3 - iq_3)t} \\ \phi_3 &= C_1' e^{(-\delta_1 + iq_1)t} + C_1'' e^{(-\delta_1 - iq_1)t} + C_2' e^{(-\delta_2 + iq_2)t} \\ & \quad + C_2'' e^{(-\delta_2 - iq_2)t} + C_3' e^{(-\delta_3 + iq_3)t} + C_3'' e^{(-\delta_3 - iq_3)t} \end{aligned} \right\} \dots (140)$$

(140) 式を纏れば

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= e^{-\delta_1 t} \{(A_1' + A_1'') \cos q_1 t + i(A_1' - A_1'') \sin q_1 t\} \\ & \quad + e^{-\delta_2 t} \{(A_2' + A_2'') \cos q_2 t + i(A_2' - A_2'') \sin q_2 t\} \\ & \quad + e^{-\delta_3 t} \{(A_3' + A_3'') \cos q_3 t + i(A_3' - A_3'') \sin q_3 t\} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_2 &= e^{-\delta_1 t} \{ (B_1' + B_1'') \cos q_1 t + i(B_1' - B_1'') \sin q_1 t \} \\
 &\quad + e^{-\delta_2 t} \{ (B_2' + B_2'') \cos q_2 t + i(B_2' - B_2'') \sin q_2 t \} \\
 &\quad + e^{-\delta_3 t} \{ (B_3' + B_3'') \cos q_3 t + i(B_3' - B_3'') \sin q_3 t \} \\
 \phi_3 &= e^{-\delta_1 t} \{ (C_1' + C_1'') \cos q_1 t + i(C_1' - C_1'') \sin q_1 t \} \\
 &\quad + e^{-\delta_2 t} \{ (C_2' + C_2'') \cos q_2 t + i(C_2' - C_2'') \sin q_2 t \} \\
 &\quad + e^{-\delta_3 t} \{ (C_3' + C_3'') \cos q_3 t + i(C_3' - C_3'') \sin q_3 t \}
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots\dots(141)$$

となる。然るに φ , ϕ_2 及び ϕ_3 は実数なるを以て A , B , C , α , β 及び γ を実数とし

$$\left. \begin{aligned}
 A' + A'' &= A \sin \alpha, & i(A' - A'') &= A \cos \alpha \\
 B' + B'' &= B \sin \beta, & i(B' - B'') &= B \cos \beta \\
 C' + C'' &= C \sin \gamma, & i(C' - C'') &= C \cos \gamma
 \end{aligned} \right\} \dots(142)$$

なる様に A , B , C , α , β 及び γ を定めれば (141) 式は

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi &= A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + \alpha_1) + A_2 e^{-\delta_2 t} \sin(q_2 t + \alpha_2) \\
 &\quad + A_3 e^{-\delta_3 t} \sin(q_3 t + \alpha_3) \\
 \phi_2 &= B_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + \beta_1) + B_2 e^{-\delta_2 t} \sin(q_2 t + \beta_2) \\
 &\quad + B_3 e^{-\delta_3 t} \sin(q_3 t + \beta_3) \\
 \phi_3 &= C_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + \gamma_1) + C_2 e^{-\delta_2 t} \sin(q_2 t + \gamma_2) \\
 &\quad + C_3 e^{-\delta_3 t} \sin(q_3 t + \gamma_3)
 \end{aligned} \right\} \dots(143)$$

なる形になる。又 (142) 式から次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 B/A &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) B' / (\cos \beta + i \sin \beta) A' \\
 &= (\cos \alpha - i \sin \alpha) B'' / (\cos \beta - i \sin \beta) A''
 \end{aligned} \right\} \dots(144)$$

而して A' と B' , A'' と B'' の関係は (137) 式から

$$\left. \begin{aligned}
 B'/A' &= \{ MI(ad-bc)(a+h_3b)(-\delta+iq)^2 \\
 &\quad + \mu_1 R^2(-Mh_3c+Id)(-\delta+iq) \\
 &\quad + Mge(-Mh_3c+Id) \} / \\
 &\quad \{ MI(bc-ad)(c+h_3d)(-\delta+iq)^2 \\
 &\quad + \mu_2 a_1^2(-Mh_3a+Ib)(-\delta+iq) \\
 &\quad + Mgf(-Mh_3a+Ib) \} \\
 &= (c'+id')/(a'+ib') \\
 B''/A'' &= \{ MI(ad-bc)(a+h_3b)(-\delta-iq)^2 \\
 &\quad + \mu_1 R^2(-Mh_3c+Id)(-\delta-iq) \\
 &\quad + Mge(-Mh_3c+Id) \} / \\
 &\quad \{ MI(bc-ad)(c+h_3d)(-\delta-iq)^2 \\
 &\quad + \mu_2 a_1^2(-Mh_3a+Ib)(-\delta-iq) \\
 &\quad + Mgf(-Mh_3a+Ib) \} \\
 &= (c'-id')/(a'-ib')
 \end{aligned} \right\} \dots(145)$$

となるから、(145) 式を (144) 式に代入して

$$\begin{aligned}
 (c'+id')(\cos \alpha + i \sin \alpha)/(a'+ib')(\cos \beta + i \sin \beta) \\
 = (c'-id')(\cos \alpha - i \sin \alpha)/(a'-ib')(\cos \beta - i \sin \beta) \dots(146)
 \end{aligned}$$

なる関係を得る。故に (146) 式から α と β の関係を求めれば次の様になる。

$$\begin{aligned}
 (\tan \alpha - \tan \beta)/(1 + \tan \alpha \tan \beta) &= \tan(\alpha - \beta) \\
 &= (a'd' - b'c')/(a'c' + b'd') \dots\dots\dots(147)
 \end{aligned}$$

或は (147) 式から

$$\beta = \alpha - \tan^{-1} \{ (a'd' - b'c')/(a'c' + b'd') \} = \alpha - \alpha' \dots(148)$$

とおける。同様に (142) 式から

$$\left. \begin{aligned}
 C/A &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) C' / (\cos \gamma + i \sin \gamma) A' \\
 &= (\cos \alpha - i \sin \alpha) C'' / (\cos \gamma - i \sin \gamma) A''
 \end{aligned} \right\} \dots(149)$$

なる関係を得る。又一方 A' と C' , A'' と C'' の関係は (137) 式から

$$\left. \begin{aligned}
 C'/A' &= [MI(ad-bc)^2(-\delta+iq)^4 \\
 &\quad + \{ \mu_2 a_1^2(Ma^2+Ib^2) + \mu_1 R^2(Mc^2+Id^2) \} \\
 &\quad (-\delta+iq)^3 + Mg\{e(Mc^2+Id^2) \\
 &\quad + f(Ma^2+Ib^2) + \mu_1 \mu_2 R^2 a_1^2\}(-\delta+iq)^2 \\
 &\quad + Mg\{e\mu_2 a_1^2 + f\mu_1 R^2\}(-\delta+iq) + M^2 g^2 ef] / \\
 &\quad \{ MI(bc-ad)(c+h_3d)(-\delta+iq)^2 \\
 &\quad + \mu_2 a_1^2(-Mh_3a+Ib)(-\delta+iq) \\
 &\quad + Mgf(-Mh_3a+Ib) \}(-\delta+iq)^2 \\
 &= (e'+if')/(-a'-ib') \\
 C''/A'' &= [MI(ad-bc)^2(-\delta-iq)^4 \\
 &\quad + \{ \mu_2 a_1^2(Ma^2+Ib^2) + \mu_1 R^2(Mc^2+Id^2) \} \\
 &\quad (-\delta-iq)^3 + Mg\{e(Mc^2+Id^2) \\
 &\quad + f(Ma^2+Ib^2) + \mu_1 \mu_2 R^2 a_1^2\}(-\delta-iq)^2 \\
 &\quad + Mg\{e\mu_2 a_1^2 + f\mu_1 R^2\}(-\delta-iq) + M^2 g^2 ef] / \\
 &\quad \{ MI(bc-ad)(c+h_3d)(-\delta-iq)^2 \\
 &\quad + \mu_2 a_1^2(-Mh_3a+Ib)(-\delta-iq) \\
 &\quad + Mgf(-Mh_3a+Ib) \}(-\delta-iq)^2 \\
 &= (e'-if')/(-a'+ib')
 \end{aligned} \right\} \dots(150)$$

となるから (150) 式の値を (149) 式に代入して

$$\begin{aligned}
 (\cos \alpha + i \sin \alpha)(e'+if')/(\cos \gamma + i \sin \gamma)(-a'-ib') \\
 = (\cos \alpha - i \sin \alpha)(e'-if')/(\cos \gamma - i \sin \gamma)(-a'+ib') \\
 \dots\dots\dots(151)
 \end{aligned}$$

なる関係を得る。故に (151) 式から α と γ の関係を求めれば次の様になる。

$$\begin{aligned}
 (\tan \alpha - \tan \gamma)/(1 + \tan \alpha \tan \gamma) &= \tan(\alpha - \gamma) \\
 &= (b'e' - a'f')/(a'e' + b'f') \dots\dots\dots(152)
 \end{aligned}$$

或は (152) 式から

$$\gamma = \alpha - \tan^{-1} \{ (b'e' - a'f')/(a'e' + b'f') \} = \alpha - \alpha'' \dots(153)$$

となる。又 (144) 或は (145) 式及び (148) 式を用ひて

$$\left. \begin{aligned}
 B/A &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(c'+id') / \\
 &\quad \{ \cos(\alpha - \alpha') + i \sin(\alpha - \alpha') \} (a'+ib') \\
 &= m
 \end{aligned} \right\} \dots(154)$$

とおき、展開して、実数と虚数とについて考へれば

$$\left. \begin{aligned}
 (ma' \sin \alpha' - mb' \cos \alpha' + d') \tan \alpha \\
 + mb' \sin \alpha' + ma' \cos \alpha' - c' &= 0 \\
 (mb' \sin \alpha' + ma' \cos \alpha' - c') \tan \alpha \\
 - ma' \sin \alpha' + mb' \cos \alpha' - d' &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots(155)$$

なる関係を得る。(155) 式の関係が同時に成り立つためには

$$\left. \begin{aligned} ma' \sin a' - mb' \cos a' + d' &= 0 \\ mb' \sin a' + ma' \cos a' - c' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (156)$$

なる関係がなければならぬ。(156) 式から m を求めると

$$\left. \begin{aligned} m &= -d'/(a' \sin a' - b' \cos a') \\ &= c'/(b' \sin a' + a' \cos a') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (157)$$

なる値を得る。

次に同様にして (149) 式は (150) 式及び (153) 式を用ひて

$$\left. \begin{aligned} C/A &= (\cos a + i \sin a)(e' + i f') / \\ &\quad \{ \cos(a - a'') + i \sin(a - a'') \} (-a' - i b') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (158)$$

$$= n$$

とおき、展開して実数と虚数とについて考へれば

$$\left. \begin{aligned} n &= f' / (-a' \sin a'' + b' \cos a'') \\ &= -e' / (b' \sin a'' + a' \cos a'') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (159)$$

なる値を得る。故に (148) 式、(153) (154) 式及び (158) 式の関係を (143) 式に代入すれば (135) 式の一般解として

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + a_1) + A_2 e^{-\delta_2 t} \sin(q_2 t + a_2) \\ &\quad + A_3 e^{-\delta_3 t} \sin(q_3 t + a_3) \\ \phi_2 &= m_1 A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + a_1 - a_1'') \\ &\quad + m_2 A_2 e^{-\delta_2 t} \sin(q_2 t + a_2 - a_2'') \\ &\quad + m_3 A_3 e^{-\delta_3 t} \sin(q_3 t + a_3 - a_3'') \\ \phi_3 &= n_1 A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + a_1 - a_1'') \\ &\quad + n_2 A_2 e^{-\delta_2 t} \sin(q_2 t + a_2 - a_2'') \\ &\quad + n_3 A_3 e^{-\delta_3 t} \sin(q_3 t + a_3 - a_3'') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (160)$$

を得る。ここに任意常数 A_1, A_2, A_3, a_1, a_2 及び a_3 は環境条件によつて、決定せられる値である。環境条件として

$$t=0 \text{ のとき } \varphi = \varphi_0, \quad \phi_2 = \phi_{20}, \quad \phi_3 = \phi_{30} \dots\dots\dots (161)$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = \pi/2 \dots\dots\dots (162)$$

とすれば (161) 式及び (162) 式の関係を (160) 式に入れて

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= A_1 + A_2 + A_3 \\ \phi_{20} &= m_1 A_1 \cos a_1' + m_2 A_2 \cos a_2' + m_3 A_3 \cos a_3' \\ \phi_{30} &= n_1 A_1 \cos a_1'' + n_2 A_2 \cos a_2'' + n_3 A_3 \cos a_3'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (163)$$

となり、これから A_1, A_2 及び A_3 を求めれば

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \{ \varphi_0 (m_2 n_3 \cos a_2' \cos a_3'' - m_3 n_2 \cos a_3' \cos a_2'') \\ &\quad + \phi_{20} (n_2 \cos a_2'' - n_3 \cos a_3'') \\ &\quad + \phi_{30} (m_3 \cos a_3' - m_2 \cos a_2') \} / \\ &\quad (m_2 n_3 \cos a_2' \cos a_3'' - m_3 n_2 \cos a_3' \cos a_2'' \\ &\quad + m_3 n_1 \cos a_3' \cos a_1'' - m_1 n_3 \cos a_1' \cos a_3'' \\ &\quad + m_1 n_2 \cos a_1' \cos a_2'' - m_2 n_1 \cos a_2' \cos a_1'') \\ A_2 &= \{ \varphi_0 (m_3 n_1 \cos a_3' \cos a_1'' - m_1 n_3 \cos a_1' \cos a_3'') \\ &\quad + \phi_{20} (n_3 \cos a_3'' - n_1 \cos a_1'') \\ &\quad + \phi_{30} (m_1 \cos a_1' - m_3 \cos a_3') \} / \\ &\quad (m_2 n_3 \cos a_2' \cos a_3'' - m_3 n_2 \cos a_3' \cos a_2'' \\ &\quad + m_3 n_1 \cos a_3' \cos a_1'' - m_1 n_3 \cos a_1' \cos a_3'' \\ &\quad + m_1 n_2 \cos a_1' \cos a_2'' - m_2 n_1 \cos a_2' \cos a_1'') \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= \{ \varphi_0 (m_1 n_2 \cos a_1' \cos a_2'' - m_2 n_1 \cos a_2' \cos a_1'') \\ &\quad + \phi_{20} (n_1 \cos a_1'' - n_2 \cos a_2'') \\ &\quad + \phi_{30} (m_2 \cos a_2' - m_1 \cos a_1') \} / \\ &\quad (m_2 n_3 \cos a_2' \cos a_3'' - m_3 n_2 \cos a_3' \cos a_2'' \\ &\quad + m_3 n_1 \cos a_3' \cos a_1'' - m_1 n_3 \cos a_1' \cos a_3'' \\ &\quad + m_1 n_2 \cos a_1' \cos a_2'' - m_2 n_1 \cos a_2' \cos a_1'') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (164)$$

なる関係を得る。(162) 式及び (164) 式の関係を (160) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= [\{ \varphi_0 (m_2 n_3 \cos a_2' \cos a_3'' - m_3 n_2 \cos a_3' \cos a_2'') \\ &\quad + \varphi_{20} (n_2 \cos a_2'' - n_3 \cos a_3'') + \phi_{30} (m_3 \cos a_3' \\ &\quad - m_2 \cos a_2') \} e^{-\delta_1 t} \cos q_1 t + \{ \varphi_0 (m_3 n_1 \cos a_3' \cos a_1'' \\ &\quad - m_1 n_3 \cos a_1' \cos a_3'') + \phi_{20} (n_3 \cos a_3'' - n_1 \cos a_1'') \\ &\quad + \phi_{30} (m_1 \cos a_1' - m_3 \cos a_3') \} e^{-\delta_2 t} \cos q_2 t \\ &\quad + \{ \varphi_0 (m_1 n_2 \cos a_1' \cos a_2'' - m_2 n_1 \cos a_2' \cos a_1'') \\ &\quad + \phi_{20} (n_1 \cos a_1'' - n_2 \cos a_2'') + \phi_{30} (m_2 \cos a_2' \\ &\quad - m_1 \cos a_1') \} e^{-\delta_3 t} \cos q_3 t] / (m_2 n_3 \cos a_2' \cos a_3'' \\ &\quad - m_3 n_2 \cos a_3' \cos a_2'' + m_3 n_1 \cos a_3' \cos a_1'' \\ &\quad - m_1 n_3 \cos a_1' \cos a_3'' + m_1 n_2 \cos a_1' \cos a_2'' \\ &\quad - m_2 n_1 \cos a_2' \cos a_1'') \\ \phi_2 &= [\{ \varphi_0 (m_2 n_3 \cos a_2' \cos a_3'' - m_3 n_2 \cos a_3' \cos a_2'') \\ &\quad + \varphi_{20} (n_2 \cos a_2'' - n_3 \cos a_3'') + \phi_{30} (m_3 \cos a_3' \\ &\quad - m_2 \cos a_2') \} m_1 e^{-\delta_1 t} \cos(q_1 t - a_1'') \\ &\quad + \{ \varphi_0 (m_3 n_1 \cos a_3' \cos a_1'' - m_1 n_3 \cos a_1' \cos a_3'') \\ &\quad + \varphi_{20} (n_3 \cos a_3'' - n_1 \cos a_1'') + \phi_{30} (m_1 \cos a_1' \\ &\quad - m_3 \cos a_3') \} m_2 e^{-\delta_2 t} \cos(q_2 t - a_2'') \\ &\quad + \{ \varphi_0 (m_1 n_2 \cos a_1' \cos a_2'' - m_2 n_1 \cos a_2' \cos a_1'') \\ &\quad + \phi_{20} (n_1 \cos a_1'' - n_2 \cos a_2'') + \phi_{30} (m_2 \cos a_2' \\ &\quad - m_1 \cos a_1') \} m_3 e^{-\delta_3 t} \cos(q_3 t - a_3'')] / \\ &\quad (m_2 n_3 \cos a_2' \cos a_3'' - m_3 n_2 \cos a_3' \cos a_2'' \\ &\quad + m_3 n_1 \cos a_3' \cos a_1'' - m_1 n_3 \cos a_1' \cos a_3'' \\ &\quad + m_1 n_2 \cos a_1' \cos a_2'' - m_2 n_1 \cos a_2' \cos a_1'') \\ \phi_3 &= [\{ \varphi_0 (m_2 n_3 \cos a_2' \cos a_3'' - m_3 n_2 \cos a_3' \cos a_2'') \\ &\quad + \varphi_{20} (n_2 \cos a_2'' - n_3 \cos a_3'') + \phi_{30} (m_3 \cos a_3' \\ &\quad - m_2 \cos a_2') \} n_1 e^{-\delta_1 t} \cos(q_1 t - a_1'') \\ &\quad + \{ \varphi_0 (m_3 n_1 \cos a_3' \cos a_1'' - m_1 n_3 \cos a_1' \cos a_3'') \\ &\quad + \varphi_{20} (n_3 \cos a_3'' - n_1 \cos a_1'') + \phi_{30} (m_1 \cos a_1' \\ &\quad - m_3 \cos a_3') \} m_2 e^{-\delta_2 t} \cos(q_2 t - a_2'') \\ &\quad + \{ \varphi_0 (m_1 n_2 \cos a_1' \cos a_2'' - m_2 n_1 \cos a_2' \cos a_1'') \\ &\quad + \phi_{20} (n_1 \cos a_1'' - n_2 \cos a_2'') + \phi_{30} (m_2 \cos a_2' \\ &\quad - m_1 \cos a_1') \} n_3 e^{-\delta_3 t} \cos(q_3 t - a_3'')] / \\ &\quad (m_2 n_3 \cos a_2' \cos a_3'' - m_3 n_2 \cos a_3' \cos a_2'' \\ &\quad + m_3 n_1 \cos a_3' \cos a_1'' - m_1 n_3 \cos a_1' \cos a_3'' \\ &\quad + m_1 n_2 \cos a_1' \cos a_2'' - m_2 n_1 \cos a_2' \cos a_1'') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (165)$$

となり減衰自己振動の左右動は、3 種類の振動の集合せるものであつて、その振動週期は (138) 式及び (139) 式を用ひて

$$T_1 = 2\pi/q_1, \quad T_2 = 2\pi/q_2, \quad T_3 = 2\pi/q_3 \dots\dots\dots (166)$$

となる。

第4章 減衰強制振動

第2章⁽²⁾では、ボギー車の強制振動を論じたが、各部の減衰摩擦力を無視してゐる。本章では減衰摩擦力を考へ入れて強制振動を考へて見る。第3章において、減衰自己振動は上下動と左右動とは、独立してゐることが分つたから、強制振動の場合にも、上下動と左右動とは別々に考へる。この場合も各部の減衰摩擦力は、第3章におけると同様に速度に比例するものとする。

第1節 上下動

第2章第1節⁽²⁾におけると同じ符号を用ひて同様にすれば、釣合ばねの下端の垂直方向の変位は、(67)式により

$$(c+c') \sin(2\pi Vt/l) \dots\dots\dots (167)$$

となる。(110)式に於て、ばねの伸縮が上の値だけを変更させると見てよいから、振動の微分方程式は、次のごとく書き得る。

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y}_2 + \mu\dot{y}_2 + 2Ky_2 + M\ddot{y}_3 &= 0 \\ M\ddot{y}_2 + (M+m)\ddot{y}_3 + \mu'\dot{y}_3 + 2ky_3 &= 2k(c+c') \sin(2\pi Vt/l) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (168)$$

この微分方程式の一般解を求めんとするには、同解は(110)式の一般解(128)式に、(168)式の特解を加へなければならぬ。今 y_2 及び y_3 を回転ベクトル Y_2 及び Y_3 に轉換すれば、(168)式は、次の如く変形される。

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{Y}_2 + \mu\dot{Y}_2 + 2KY_2 + M\ddot{Y}_3 &= 0 \\ M\ddot{Y}_2 + (M+m)\ddot{Y}_3 + \mu'\dot{Y}_3 + 2kY_3 &= 2k(c+c')e^{i(2\pi Vt/l)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (169)$$

(169)式の特解を求めるのに

$$Y_2 = A_4 e^{i(2\pi Vt/l)}, \quad Y_3 = B_4 e^{i(2\pi Vt/l)} \dots\dots\dots (170)$$

において、(169)式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \{-M(2\pi V/l)^2 + i\mu(2\pi V/l) + 2K\}A_4 - M(2\pi V/l)^2 B_4 &= 0 \\ -M(2\pi V/l)^2 A_4 + \{- (M+m)(2\pi V/l)^2 \\ + i\mu'(2\pi V/l) + 2k\}B_4 &= 2k(c+c') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (171)$$

なる関係を得る。(171)式から A_4 及び B_4 を求め、

$$\left. \begin{aligned} A_4 &= 2k(c+c')M(2\pi V/l)^2 / [Mm(2\pi V/l)^4 - i\{(M+m)\mu \\ &\quad + M\mu'\}(2\pi V/l)^3 - 2\{kM + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\} \\ &\quad (2\pi V/l)^2 + i(2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l) + 4kK] \\ &= 2k(c+c')L_1/L_0 \\ B_4 &= 2k(c+c')\{-M(2\pi V/l)^2 + i\mu(2\pi V/l) + 2K\} / \\ &\quad [Mm(2\pi V/l)^4 - i\{(M+m)\mu + M\mu'\}(2\pi V/l)^3 \\ &\quad - 2\{kM + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^2 \\ &\quad + i(2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l) + 4kK] \\ &= 2k(c+c')L_2/L_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (172)$$

とおき、(170)式に代入して

$$\left. \begin{aligned} Y_2 &= 2k(c+c')L_1 e^{i(2\pi Vt/l)} / L_0 \\ Y_3 &= 2k(c+c')L_2 e^{i(2\pi Vt/l)} / L_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (173)$$

昭和10年11月]

を得る。こゝに於てベクトル Y_2 及び Y_3 をスカラー y_2 及び y_3 に戻せば

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= A_4 \sin(2\pi Vt/l + \alpha_4) \\ y_3 &= B_4 \sin(2\pi Vt/l + \beta_4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (174)$$

なる形で表はされる。(174)式中 A_4 及び B_4 は、ベクトル A_4 及び B_4 の絶対値であつて、

$$\left. \begin{aligned} A_4 &= |A_4| = 2k(c+c') L_1 / |L_0| \\ &= 2k(c+c')M(2\pi V/l)^2 / \sqrt{[Mm(2\pi V/l)^4 - 2\{kM \\ &\quad + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^3 + \{-(M+m)\mu - M\mu'\} \\ &\quad (2\pi V/l)^2 + (2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l)]^2} \\ B_4 &= |B_4| = 2k(c+c') L_2 / |L_0| \\ &= 2k(c+c') \sqrt{\{-M(2\pi V/l)^2 + 2K\}^2 + \mu^2(2\pi V/l)^2} / \\ &\quad \sqrt{[Mm(2\pi V/l)^4 - 2\{kM + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\} \\ &\quad (2\pi V/l)^3 + 4kK]^2 + \{-(M+m)\mu - M\mu'\} \\ &\quad (2\pi V/l)^2 + (2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l)]^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (175)$$

而して強制振動と外力との間の位相の差

$$\left. \begin{aligned} \alpha_4 &= -\tan^{-1} \{ \{-(M+m)\mu - M\mu'\}(2\pi V/l)^3 + (2k\mu \\ &\quad + 2K\mu')(2\pi V/l) / [Mm(2\pi V/l)^4 - 2\{kM \\ &\quad + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^3 + 4kK] \} \\ \beta_4 &= \tan^{-1} \{ \mu(2\pi V/l) / \{-M(2\pi V/l)^2 + 2K\} \} \\ &\quad - \tan^{-1} \{ \{-(M+m)\mu - M\mu'\}(2\pi V/l)^3 \\ &\quad + (2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l) / [Mm(2\pi V/l)^4 \\ &\quad - 2\{kM + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^3 + 4kK] \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (176)$$

となる。即ち (175) 式及び (176) 式を (174) 式に代入すれば、(168)式の特解として

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= 2k(c+c')M(2\pi V/l)^2 \sin\{2\pi Vt/l - \tan^{-1} \{ \{-(M+m)\mu \\ &\quad - M\mu'\}(2\pi V/l)^3 + (2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l) / \\ &\quad [Mm(2\pi V/l)^4 - 2\{kM + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^3 \\ &\quad + 4kK] \} \} / \sqrt{[Mm(2\pi V/l)^4 - 2\{kM + K(M+m) \\ &\quad + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^3 + 4kK]^2 + \{-(M+m)\mu - M\mu'\} \\ &\quad (2\pi V/l)^2 + (2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l)]^2} \\ y_3 &= 2k(c+c') \sqrt{\{-M(2\pi V/l)^2 + 2K\}^2 + \mu^2(2\pi V/l)^2} \sin \\ &\quad \{2\pi Vt/l + \tan^{-1} \{ \mu(2\pi V/l) / \{-M(2\pi V/l)^2 + 2K\} \} \\ &\quad - \tan^{-1} \{ \{-(M+m)\mu - M\mu'\}(2\pi V/l)^3 \\ &\quad + (2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l) / [Mm(2\pi V/l)^4 \\ &\quad - 2\{kM + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^3 + 4kK] \} \} / \\ &\quad \sqrt{[Mm(2\pi V/l)^4 - 2\{kM + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^3 \\ &\quad + 4kK]^2 + \{-(M+m)\mu - M\mu'\}(2\pi V/l)^2 \\ &\quad + (2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l)]^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (177)$$

なる値を得る。故に、聯立微分方程式 (168) 式の一般解は (128) 式に (177) 式を加へた、

$$\begin{aligned}
y_2 = & A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + a_1) + A_2 e^{-\delta_2 t} \sin(q_2 t + a_2) \\
& + 2k(c+c')M(2\pi V/l)^2 \sin\{2\pi Vt/l - \tan^{-1} \\
& ([\{-(M+m)\mu - M\mu'\}/(2\pi V/l)^3 + (2k\mu + 2K\mu') \\
& (2\pi V/l)]/[Mm(2\pi V/l)^4 - 2\{kM + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\} \\
& (2\pi V/l)^2 + 4kK]\}]/\sqrt{[Mm(2\pi V/l)^4 - 2\{kM + \\
& K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^2 + 4kK]^2 + [\{-(M+m)\mu \\
& - M\mu'\}(2\pi V/l)^3 + (2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l)]^2} \\
y_3 = & l_1 A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + a_1 - a_1') + l_2 A_2 e^{-\delta_2 t} \sin(q_2 t + a_2 - a_2') \\
& + 2k(c+c')\sqrt{\{-M(2\pi V/l)^2 + 2K\}^2 + \mu^2(2\pi V/l)^2} \sin \\
& \{2\pi Vt/l + \tan^{-1}[\mu(2\pi V/l)/\{-M(2\pi V/l)^2 + 2K\}] \\
& - \tan^{-1}[\{-(M+m)\mu - M\mu'\}(2\pi V/l)^3 \\
& + (2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l)]/[Mm(2\pi V/l)^4 - 2\{kM \\
& + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^2 + 4kK]\}/ \\
& \sqrt{[Mm(2\pi V/l)^4 - 2\{kM + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^2 \\
& + 4kK]^2 + [\{-(M+m)\mu - M\mu'\}(2\pi V/l)^3 \\
& + (2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l)]^2} \quad \dots\dots\dots (178)
\end{aligned}$$

となり、減衰強制振動の上下動は、3種類の振動の集合せるものであることが分る。ここに任意常数 A_1, A_2, a_1 及び a_2 は環境条件によつて決定せられる値である。

(178) 式に於て t が甚だ大きい場合には、 $e^{-\delta t}$ を含む項は消えて車体重心の上下動振幅は (178) 式を用ひて、

$$\begin{aligned}
y_2 + y_3 = & 2k(c+c')\sqrt{4K^2 + \mu^2(2\pi V/l)^2} \sin\{2\pi Vt/l + \tan^{-1} \\
& \{\mu(2\pi V/l)/2K\} - \tan^{-1}[\{-(M+m)\mu - M\mu'\}(2\pi V/l)^3 \\
& + (2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l)]/[Mm(2\pi V/l)^4 - 2\{kM + \\
& K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^2 + 4kK]\}/\sqrt{[Mm(2\pi V/l)^4 \\
& - 2\{kM + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^2 + 4kK]^2 \\
& + [\{-(M+m)\mu - M\mu'\}(2\pi V/l)^3 + (2k\mu + 2K\mu') \\
& (2\pi V/l)]^2} \quad \dots\dots\dots (179)
\end{aligned}$$

となり、各速度における最大振幅は

$$\begin{aligned}
y_2 + y_3 = & 2k(c+c')\sqrt{4K^2 + \mu^2(2\pi V/l)^2}/\sqrt{[Mm(2\pi V/l)^4 \\
& - 2\{kM + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^2 + 4kK]^2 \\
& + [\{-(M+m)\mu - M\mu'\}(2\pi V/l)^3 + (2k\mu + 2K\mu') \\
& (2\pi V/l)]^2} \quad \dots\dots\dots (180)
\end{aligned}$$

或は、第2章第1節(68)式⁽²⁾を用ひて、

$$\begin{aligned}
y_2 + y_3 = & 2kcP\sqrt{4K^2 + \mu^2(2\pi V/l)^2}/\{P - m'(2\pi V/l)^2\} \\
& \sqrt{[Mm(2\pi V/l)^4 - 2\{kM + K(M+m) + \frac{1}{2}\mu\mu'\}(2\pi V/l)^2 \\
& + 4kK]^2 + [\{-(M+m)\mu - M\mu'\}(2\pi V/l)^3 \\
& + (2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l)]^2} \quad \dots\dots\dots (181)
\end{aligned}$$

近似的⁽⁴⁾にすれば、(181)式から

$$\begin{aligned}
y_2 + y_3 \cong & 4kKcP/\{P - m'(2\pi V/l)^2\}[Mm(2\pi V/l)^4 \\
& - 2\{kM + K(M+m)\}(2\pi V/l)^2 + 4kK] \quad \dots\dots\dots (182)
\end{aligned}$$

となる。絶対最大振幅を求めるには、(181)式から

$$d(y_2 + y_3)/dV = 0 \quad \dots\dots\dots (183)$$

を満足する V の値を求め、更にその値に對して

$$d^2(y_2 + y_3)/dV^2 < 0 \quad \dots\dots\dots (184)$$

なるものを求め、これを (181) 式に代入すればよい。

然しこの計算は複雑であつて、解くことが困難であるから、次の様な近似的解法⁽⁵⁾を用ひる。即ち普通に存在する μ 及び μ' の範囲内では第1章第3節(41)式⁽²⁾と(114)式とから

$$q \cong p \quad \dots\dots\dots (185)$$

とおき得るから、この値を (181) 式に代入すれば、絶対最大振幅は近似的に

$$\begin{aligned}
y_2 + y_3 \cong & 4kKcP/\{P - m'(2\pi V/l)^2\}[\{-(M+m)\mu - M\mu'\} \\
& (2\pi V/l)^3 + (2k\mu + 2K\mu')(2\pi V/l)] \quad V = V_1 \text{ 又は } V_2 \quad \dots\dots\dots (186)
\end{aligned}$$

から求められる。ここに V_1 及び V_2 は第2章第1節(82)式⁽²⁾で求めたものである。

特別に μ が無限大となり、枕ばねが撓まぬ場合には (181) 式から

$$\begin{aligned}
y_3 = & 2kcP/\{P - m'(2\pi V/l)^2\} \\
& \sqrt{\{-(M+m)(2\pi V/l)^2 + 2k\}^2 + \mu'^2(2\pi V/l)^2} \quad \dots\dots\dots (187)
\end{aligned}$$

近似的⁽⁶⁾にすれば

$$y_3 \cong 2kcP/\{P - m'(2\pi V/l)^2\}\{-(M+m)(2\pi V/l)^2 + 2k\} \quad \dots\dots\dots (188)$$

となる。絶対最大振動は、(187)式から

$$dy_3/dV = 0 \quad \dots\dots\dots (189)$$

を満足する V の値を求め、更にその値に對して

$$d^2y_3/dV^2 < 0 \quad \dots\dots\dots (190)$$

なるものを求め、これを (187) 式に代入すればよい。

而して近似的には

$$V_0 = l\sqrt{2k/(M+m)}/2\pi \quad \dots\dots\dots (191)$$

から求めた V_0 を用ひて、(187)式から

$$y_3 = cP\sqrt{2k/(M+m)}/\mu'\{P - m'(2\pi V_0/l)^2\} \quad \dots\dots\dots (192)$$

から求められる。

即ち上下動の最大振幅は、軌條の永久的沈下 c に比例し、通常の運轉速度に於ては、ばね下重量 m' の増減により増減する。絶対最大振幅は尚その上に、通常の運轉速度に於てはばねの減衰摩擦係数 μ 及び μ' の増減と反對に増減し、特別に枕ばねの撓まぬ場合には、車体及び台車の質量の和の平方根 $\sqrt{M+m}$ 及び釣合ばねの強さの平方根 $\sqrt{k}$ に比例し、釣合ばねの減衰摩擦係数 μ' に逆比例する。

第2節 左右動

第2章第2節⁽²⁾におけると同じ符号を用ひ、同様にすれば釣合ばねの ϕ_3 方向の変位は (84) 式により

(5) 小澤久太郎 土木学会誌 第19巻第12号 走行蒸気機関車に因る橋桁強制振動の理論、1036頁 (6) 本章最後の例に示した電車を例にさし速度 $V=100$ km/h とし誤差を求めれば 1% になる。

(4) 本章最後の例に示した電車を例にさし速度 $V=100$ km/h とし誤差を求めれば 4% になる。

$$(c+c') \sin(2\pi Vt/l)2G \dots\dots\dots (193)$$

となる。(135) 式に於て釣合ばねの伸縮が上の値だけを変更させると見てよいから、振動の微分方程式は次の如く書き得る。

$$\left. \begin{aligned} (Ma^2 + Ib^2)\ddot{\psi} + \mu_1 R^2 \dot{\psi} + Mge\psi + (Mac + Ibd)\ddot{\phi}_2 \\ + (-Mh_3a + Ib)\ddot{\phi}_3 = 0 \\ (Mac + Ibd)\ddot{\psi} + (Mc^2 + Id^2)\ddot{\phi}_2 + \mu_2 a_1^2 \dot{\phi}_2 + Mgf\phi_2 \\ + (-Mh_3c + Id)\ddot{\phi}_3 = 0 \\ (-Mh_3a + Ib)\ddot{\psi} + (-Mh_3c + Id)\ddot{\phi}_2 \\ + (Mh_3^2 + I + mh_3^2 + i)\ddot{\phi}_3 + \mu_3 a_3^2 \dot{\phi}_3 + Mgf\phi_3 \\ = ka_3^2(c+c') \sin(2\pi Vt/l)/G \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (194)$$

この微分方程式の一般解を求めんとするに同解は、(135) 式の一一般解 (160) 式に (194) 式の特解を加へねばならない。今 ψ , ϕ_2 及び ϕ_3 を回転ベクトル Ψ , Φ_2 及び Φ_3 に轉換すれば、(194) 式は次の如く變形される。

$$\left. \begin{aligned} (Ma^2 + Ib^2)\ddot{\Psi} + \mu_1 R^2 \dot{\Psi} + Mge\Psi + (Mac + Ibd)\ddot{\Phi}_2 \\ + (-Mh_3a + Ib)\ddot{\Phi}_3 = 0 \\ (Mac + Ibd)\ddot{\Psi} + (Mc^2 + Id^2)\ddot{\Phi}_2 + \mu_2 a_1^2 \dot{\Phi}_2 + Mgf\Phi_2 \\ + (-Mh_3c + Id)\ddot{\Phi}_3 = 0 \\ (-Mh_3a + Ib)\ddot{\Psi} + (-Mh_3c + Id)\ddot{\Phi}_2 \\ + (Mh_3^2 + I + mh_3^2 + i)\ddot{\Phi}_3 + \mu_3 a_3^2 \dot{\Phi}_3 + Mgf\Phi_3 \\ = ka_3^2(c+c')e^{i(2\pi Vt/l)/G} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (195)$$

(195) 式の特解を求めるのに、

$$\Psi = A_4 e^{i(2\pi Vt/l)}, \quad \Phi_2 = B_4 e^{i(2\pi Vt/l)}, \quad \Phi_3 = C_4 e^{i(2\pi Vt/l)} \dots\dots\dots (196)$$

とおいて (195) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \{-(Ma^2 + Ib^2)(2\pi V/l)^2 + i\mu_1 R^2(2\pi V/l) + Mge\}A_4 \\ - (Mac + Ibd)(2\pi V/l)^2 B_4 \\ - (-Mh_3a + Ib)(2\pi V/l)^2 C_4 = 0 \\ - (Mac + Ibd)(2\pi V/l)^2 A_4 + \{-(Mc^2 + Id^2)(2\pi V/l)^2 \\ + i\mu_2 a_1^2(2\pi V/l) + Mgf\}B_4 \\ - (-Mh_3c + Id)(2\pi V/l)^2 C_4 = 0 \\ - (-Mh_3a + Ib)(2\pi V/l)^2 A_4 - (-Mh_3c + Id) \\ (2\pi V/l)^2 B_4 + \{-(Mh_3^2 + I + mh_3^2 + i)(2\pi V/l)^2 \\ + i\mu_3 a_3^2(2\pi V/l) + Mgf\}C_4 = ka_3^2(c+c')/G \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (197)$$

なる関係を得る。(197) 式から A_4 , B_4 及び C_4 を求め、

$$\left. \begin{aligned} A_4 = ka_3^2(c+c')L_1/GL_0 \\ B_4 = ka_3^2(c+c')L_2/GL_0 \\ C_4 = ka_3^2(c+c')L_3/GL_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (198)$$

とおき、(196) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \Psi = ka_3^2(c+c')L_1 e^{i(2\pi Vt/l)/GL_0} \\ \Phi_2 = ka_3^2(c+c')L_2 e^{i(2\pi Vt/l)/GL_0} \\ \Phi_3 = ka_3^2(c+c')L_3 e^{i(2\pi Vt/l)/GL_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (199)$$

を得る。こゝに於てベクトル Ψ , Φ_2 及び Φ_3 をスカラー φ ,

ϕ_2 及び ϕ_3 に戻せば

$$\left. \begin{aligned} \varphi = A_4 \sin(2\pi Vt/l + \alpha_4) \\ \phi_2 = B_4 \sin(2\pi Vt/l + \beta_4) \\ \phi_3 = C_4 \sin(2\pi Vt/l + \gamma_4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (200)$$

なる形で表はされる。(200) 式中に於て A_4 , B_4 及び C_4 は A_1 , B_1 及び C_1 の絶対値であつて

$$\left. \begin{aligned} A_4 = |A_4| = ka_3^2(c+c')|L_1|/G|L_0| \\ = ka_3^2(c+c')\sqrt{L_1'^2 + L_1''^2}/G\sqrt{L_0'^2 + L_0''^2} \\ B_4 = |B_4| = ka_3^2(c+c')|L_2|/G|L_0| \\ = ka_3^2(c+c')\sqrt{L_2'^2 + L_2''^2}/G\sqrt{L_0'^2 + L_0''^2} \\ C_4 = |C_4| = ka_3^2(c+c')|L_3|/G|L_0| \\ = ka_3^2(c+c')\sqrt{L_3'^2 + L_3''^2}/G\sqrt{L_0'^2 + L_0''^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (200)$$

而して強制振動と外力との間の位相の差

$$\left. \begin{aligned} \alpha_4 = \tan^{-1}(L_1'/L_1) - \tan^{-1}(L_0'/L_0) \\ \beta_4 = \tan^{-1}(L_2'/L_2) - \tan^{-1}(L_0'/L_0) \\ \gamma_4 = \tan^{-1}(L_3'/L_3) - \tan^{-1}(L_0'/L_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (202)$$

となる。こゝに L_0' , L_1' , L_2' 及び L_3' は、 L_0 , L_1 , L_2 及び L_3 の i を含む係数で、 L_0 , L_1 , L_2 及び L_3 は、 L_0 , L_1 , L_2 及び L_3 の i を含まぬ係数である。

故に (201) 式及び (202) 式を、(200) 式に代入すれば、(194) 式の特解として

$$\left. \begin{aligned} \varphi = ka_3^2(c+c')\sqrt{L_1'^2 + L_1''^2} \sin\{2\pi Vt/l \\ + \tan^{-1}(L_1'/L_1) - \tan^{-1}(L_0'/L_0)\}/G\sqrt{L_0'^2 + L_0''^2} \\ \phi_2 = ka_3^2(c+c')\sqrt{L_2'^2 + L_2''^2} \sin\{2\pi Vt/l \\ + \tan^{-1}(L_2'/L_2) - \tan^{-1}(L_0'/L_0)\}/G\sqrt{L_0'^2 + L_0''^2} \\ \phi_3 = ka_3^2(c+c')\sqrt{L_3'^2 + L_3''^2} \sin\{2\pi Vt/l \\ + \tan^{-1}(L_3'/L_3) - \tan^{-1}(L_0'/L_0)\}/G\sqrt{L_0'^2 + L_0''^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (203)$$

を得る。故に聯立微分方程式 (194) 式の一一般解は、(160) 式に (203) 式を加へた

$$\left. \begin{aligned} \varphi = A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + a_1) + A_2 e^{-\delta_2 t} \sin(q_2 t + a_2) \\ + A_3 e^{-\delta_3 t} \sin(q_3 t + a_3) + ka_3^2(c+c')\sqrt{L_1'^2 + L_1''^2} \sin \\ \{2\pi Vt/l + \tan^{-1}(L_1'/L_1) - \tan^{-1}(L_0'/L_0)\}/G\sqrt{L_0'^2 + L_0''^2} \\ \phi_2 = m_1 A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + a_1 - a_1') + m_2 A_2 e^{-\delta_2 t} \sin \\ (q_2 t + a_2 - a_2') + m_3 A_3 e^{-\delta_3 t} \sin(q_3 t + a_3 - a_3') \\ + ka_3^2(c+c')\sqrt{L_2'^2 + L_2''^2} \sin\{2\pi Vt/l + \tan^{-1}(L_2'/L_2) \\ - \tan^{-1}(L_0'/L_0)\}/G\sqrt{L_0'^2 + L_0''^2} \\ \phi_3 = n_1 A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(q_1 t + a_1 - a_1'') + n_2 A_2 e^{-\delta_2 t} \sin \\ (q_2 t + a_2 - a_2'') + n_3 A_3 e^{-\delta_3 t} \sin(q_3 t + a_3 - a_3'') \\ + ka_3^2(c+c')\sqrt{L_3'^2 + L_3''^2} \sin\{2\pi Vt/l + \tan^{-1}(L_3'/L_3) \\ - \tan^{-1}(L_0'/L_0)\}/G\sqrt{L_0'^2 + L_0''^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (204)$$

となり、減衰強制振動の左右動は、4 種類の振動の集合せるものであることが分る。こゝに任意常数 A_1 , A_2 , A_3 , a_1 , a_2 及び a_3 は環境条件によつて決定せられる値である。

(204) 式に於て l が甚だ大きい場合には、 $e^{-\delta t}$ を含む項は消え、車体重心の左右動振幅は第 1 章第 3 節 (19) 式及び (28) 式⁽²⁾を用ひて

$$x = ka_3^2(c+c')\sqrt{(aL_1+cL_2-h_3L_3)^2+(aL_1'+cL_2'-h_3L_3')^2} \sin[2\pi Vt/l + \tan^{-1}\{(aL_1'+cL_2'-h_3L_3')/(aL_1+cL_2-h_3L_3)\} - \tan^{-1}(L_0'/L_0)]/G\sqrt{L_0'^2+L_0'^2} \dots\dots\dots(205)$$

となり、各速度における最大振幅は

$$x = ka_3^2(c+c') \sqrt{\{(aL_1+cL_2-h_3L_3)^2+(aL_1'+cL_2'-h_3L_3')^2\}_{\max}}/G\sqrt{L_0'^2+L_0'^2} \dots\dots\dots(206)$$

或は、第 2 章第 2 節 (85) 式⁽²⁾を用ひて

$$x = ka_3^2cP \sqrt{\{(aL_1+cL_2-h_3L_3)^2+(aL_1'+cL_2'-h_3L_3')^2\}_{\max}}/G\{P-m'(2\pi V/l)^2\}\sqrt{L_0'^2+L_0'^2} \dots\dots\dots(207)$$

近似的⁽⁷⁾にすれば、第 2 章第 2 節 (89) 式⁽²⁾の A と (207) 式の L_0 とは同じものであるから

$$x \cong ka_3^2cP(|aL_1|+|cL_2|+|h_3L_3|)/GA\{P-m'(2\pi V/l)^2\} \dots\dots\dots(207)$$

となる。而して絶対最大振幅を求めるには、(207) 式から

$$dx/dV=0 \dots\dots\dots(209)$$

を満足する V の値を求め、更にその値に對して

$$d^2x/dV^2 < 0 \dots\dots\dots(210)$$

なるものを求め、これを (207) 式に代入すればよい。

しかしこの計算は複雑であつて、解くことは困難であるから、次の様な近似的解法⁽⁸⁾を行ふ。即ち普通に存在する μ_1 , μ_2 及び μ_3 の範囲内では、第 1 章第 3 節 (55)⁽²⁾ 式と (139) 式から

$$q \cong p \dots\dots\dots(211)$$

とおき得るから、この値を (207) 式に代入すれば、絶対最大振幅は近似的に

$$x \cong ka_3^2cP[|aL_1|+|cL_2|+|h_3L_3|]/GL_0'\{P-m'(2\pi V/l)^2\}V=V_1, V_2 \text{ 又は } V_3 \dots\dots\dots(212)$$

から求められる。ここに V_1 , V_2 及び V_3 は、第 2 章第 3 節 (100) 式⁽²⁾ で求めたものである。特別に μ_2 が無限大になり、枕ばねが撓まぬ場合には $\phi_2=0$ となり、各速度における最大振幅は (207) 式に倣つて

$$x = ka_3^2cP\sqrt{\{[a(-Mh_3a+Ib)(2\pi V/l)^2 + |h_3\{-(Ma^2+Ib^2)(2\pi V/l)^2+Mge\}|]^2 + h_3^2\mu_1^2R^4(2\pi V/l)^2\}/G\{P-m'(2\pi V/l)^2\}} \sqrt{[MI(a+h_3b)^2+(mh_3^2+I)(Ma^2+Ib^2)](2\pi V/l)^4 - \{Mge(Mh_3^2+I+mh_3^2+I)+Mgj(Ma^2+Ib^2)\}}$$

(7) 本章最後の例に示した電車を例にり速度 $V=75$ km/h として誤差は 0.4% なる

$$+ \mu_1\mu_3R^2a_3^2\}(2\pi V/l)^2+M^2g^2ej]^2 + [-\{\mu_3a_3^2(Ma^2+Ib^2)+\mu_1R^2(Mh_3^2+I+mh_3^2+I)\} (2\pi V/l)^3+Mgj\{e\mu_3a_3^2+j\mu_1R^2\}(2\pi V/l)\}]^2 \dots\dots\dots(213)$$

近似的には⁽⁸⁾

$$x \cong ka_3^2cP[|a(-Mh_3a+Ib)(2\pi V/l)^2 + |h_3\{-(Ma^2+Ib^2)(2\pi V/l)^2+Mge\}|]/G\{P-m'(2\pi V/l)^2\}[\{MI(a+h_3b)^2 + (mh_3^2+I)(Ma^2+Ib^2)\}(2\pi V/l)^4 - Mg\{e(Mh_3^2+I+mh_3^2+I)+j(Ma^2+Ib^2)\}(2\pi V/l)^2+M^2g^2ej\}] \dots\dots\dots(214)$$

となる。而して絶対最大振幅は、上述の近似的解法⁽⁸⁾を行つて

$$x \cong ka_3^2cP[|a(-Mh_3a+Ib)(2\pi V/l)^2 + |h_3\{-(Ma^2+Ib^2)(2\pi V/l)^2+Mge\}|]/G\{P-m'(2\pi V/l)^2\}[-\{\mu_3a_3^2(Ma^2+Ib^2) + \mu_1R^2(Mh_3^2+I+mh_3^2+I)\}(2\pi V/l)^3 + Mg\{\mu_3a_3^2e+\mu_1R^2j\}(2\pi V/l)\}]V=V_4 \text{ 又は } V_5 \dots\dots\dots(215)$$

から求められる。ここに V_4 及び V_5 は

$$\{IM(a+h_3b)^2+(mh_3^2+I)(Ma^2+Ib^2)\}(2\pi V/l)^4 - Mg\{e(Mh_3^2+I+mh_3^2+I) + j(Ma^2+Ib^2)\}(2\pi V/l)^2+M^2g^2ej=0 \dots\dots\dots(216)$$

から求めたものである。

一層特別に μ_1 及び μ_2 が無限大になり、揺枕が揺動せず枕ばねが撓まぬ場合には $\varphi=0$, $\phi_2=0$ となり、各速度における最大振幅は (207) 式に倣つて

$$x = ka_3^2cPh_3/G\{P-m'(2\pi V/l)^2\} \sqrt{\{-(Mh_3^2+I+mh_3^2+I)(2\pi V/l)^2 + Mgj\}^2+\mu_3^2a_3^4(2\pi V/l)^2} \dots\dots\dots(217)$$

近似的⁽⁹⁾には

$$x \cong ka_3^2cPh_3/G\{P-m'(2\pi V/l)^2\} \{-(Mh_3^2+I+mh_3^2+I)(2\pi V/l)^2+Mgj\} \dots\dots\dots(218)$$

となる。而して絶対最大振幅は、上述の近似的解法⁽⁹⁾を行つて

$$x \cong cPh_3\sqrt{k(Mh_3^2+I+mh_3^2+I)} \sqrt{2G\mu_3a_3\{P-m'(2\pi V/l)^2\}} \dots\dots\dots(219)$$

から求められる。ここに V_7 は、第 1 章第 3 節 (35)⁽²⁾ 式を用ひて

$$2\pi V_7/l = a_3\sqrt{2k}/\sqrt{Mh_3^2+I+mh_3^2+I} \dots\dots\dots(220)$$

から求めたものである。

即ち左右動の最大振幅は、軌條の永久的沈下 c に比例して軌間 $2G$ に逆比例し、通常の運轉速度に於てはばね下重量 m' の増減により増減する。絶対最大振幅は、尚その上に通常の運轉速度においては、揺枕釣及びばねに関する減衰摩擦

(8) 本章最後の例に示した電車を例にり、速度 $V=150$ km/h として誤差は 3% になる。
(9) 本章最後の例に示した電車を例にり、速度 $V=150$ km/h として誤差は 0.4% になる

係数 μ_1 , μ_2 及び μ_3 の増減と反対に増減し、特別に枕ばねの撓み場合には、揺枕釣及び釣合ばねに関する減衰摩擦係数 μ_1 及び μ_3 の増減と反対に増減し、尚一層特別に、釣合ばねのみ撓み場合には釣合ばねから車体重心迄の高さ h_3 , 釣合ばねの強さの平方根 $\sqrt{k}$, 車体及び台車の質量と釣合ばねからそれ等の重量迄の高さの2乗との相乗積及びそれ等の重心の周りの慣性モーメントの和の平方根

$\sqrt{Mh_3^2 + I + mh_3^2} + i$ に比例し、釣合ばね中心間の距離 $2a_3$ 及びそれに関する減衰摩擦係数 μ_3 に逆比例する。

第4図
車輛の速度と上下動最大振幅との関係

第5図
車輛の速度と左右動最大振幅との関係

a. 4輪ボギー-客車 A. 4輪ボギー-車
b. 長き4輪ボギー-客車 B. 長き4輪ボギー-車
c. 6輪ボギー-客車 C. 6輪ボギー-車

第6図
各種車輛上下動振幅と速度との関係

第7図
御料車の振幅と速度との関係

1. 新6輪ボギー 4. 旧4輪ボギー
2. 旧6輪ボギー 5. 長4輪ボギー
3. 新4輪ボギー

第8図
各種車輛左右動振幅と速度との関係

第1表

速度 km/h	最大振幅 cm
0	0.175
20	0.184
40	0.323
61	1.470
80	0.330
100	0.162
120	0.117

第2表

速度 km/h	最大振幅 cm
0	0.175
30	0.199
60	0.332
90	2.560
120	0.298
150	0.154

第3表

速度 km/h	最大振幅 cm
0	0.105
10	0.112
20	0.138
30	0.600
33.9	2.730
38.7	3.030
45	0.847
50	0.361
75	0.120

第4表

速度 km/h	最大振幅 cm
0	0.105
20	0.128
38.8	0.860
60	0.346
82.3	1.000
100	0.445
120	0.185
150	0.103

第5表

速度 km/h	最大振幅 cm
0	0.105
20	0.114
40	0.144
60	0.250
81	1.690
100	0.245
120	0.116
150	0.069

例 京阪電鉄新大阪線 100 号型電車に就て、速度と車体重心の最大振幅との関係を求める。

$$m'g = 6,042 \text{ kg} \quad l = 10 \text{ m} \quad 2G = 143.5 \text{ cm}$$

$$c = 0.175 \text{ cm}^{(10)} \quad P = 11,900 \text{ kg/cm}^{(11)} \quad \mu = 50 \text{ kg/cm/s}^{(12)}$$

$$\mu' = 25 \text{ kg/cm/s}^{(12)} \quad \mu_1 = 1,000 \text{ kg/cm/s}^{(12)}$$

(10) 鉄道車輛動揺概論 (11) Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens. Heft 7. 1929. (12) Schaper, Mechanische Schwingungen der Brücken. s. 194.

$$\mu_2 = 100 \text{ kg/cm/s}^{(12)}$$

$$\mu_3 = 25 \text{ kg/cm/s}^{(12)}$$

他の項目は、第1章第3節(2)の例と同じとする。

(i) 上下動

(182) 式及び (186) 式から求めた最大振幅は第1表の通りで、これを図示すれば、第4図 A に示した様になる。

(188) 式及び (192) 式から求めた最大振幅は第2表の通りで、これを図示すれば、第4図 B に示した様になる。

(ii) 左右動

(208) 式及び (212) 式から求めた最大振幅は第3表の通りで、これを図示すれば、第5図 A に示した様になる。

(214) 式及び (215) 式から求めた最大振幅は第4表の通りで、これを図示すれば、第5図 B に示した様になる。

(218) 式及び (219) 式から求めた最大振幅は第5表の通りで、これを図示すれば、第5図 C に示した様になる。

これ等の結果を、実地験測の成績と比較して見る。上下動では、武蔵技師測定(13)に就て考へれば、験測で得

(13) 鉄道業務研究資料 第17巻 第4号 ボギー車振動試験報告

た最大振幅は、理論的に得た第4図の枕ばねの作用した振動と作用せぬ振動との最大振幅を連ねたものになってゐる。運轉中、枕ばねが作用したり作用しなかつたりすることは事実である。左右動では、大森博士測定⁽¹⁴⁾の第7図に就て考へれば、理論的に得た第5図Aの揺枕、枕ばね及び釣合ばねの組合せによる振動に一致してゐる様である。また、武蔵技師測定⁽¹⁵⁾の第8図に就て考へれば、理論的に得た第5図B及びCの枕ばねの作用せぬ場合の最大振幅の値に似てゐる。即ち、前者は、枕ばねの摩擦が少く後者は枕ばねの摩擦の多い場合の最大振幅に相當すると考へられる。依つて本文がボギー車の振動の模様をよく説明してゐることを首肯し得られるであらう。

結 言

第1章乃至第4章に述べたところを綜合して、次の結論に到達した。

(1) ボギー車の運轉中の振動は、軌條の高低によつて生ずる強制振動であつて、上下動は、その前後的高低、左右動は、その左右交番の高低によつて起る。

(2) ボギー車の運轉中、車体及び台車の上下動と左右動は互に独立してゐる。

(3) 車体の自己振動週期と軌條1本通過の時間とが一致したとき車体の振幅は最大になる。

(4) 車体の上下動は、枕ばね及び釣合ばねの組合せによる振動と釣合ばねのみの振動との集合せるものである。

(5) 車体の左右動は、揺枕、枕ばね及び釣合ばねの組合せによる振動、揺枕及び釣合ばねの組合せによる振動及び釣合ばねのみの振動の集合せるものである。

(6) 車体の上下動振幅を減少させるには、車輛の重量を軽くして軌條の永久的沈下及び運轉中の沈下又は上昇の減少するのが必要である。また、釣合ばねは、線を太くし輪の直径を小さくして内力を相當低くとり減衰摩擦力を増加することは絶対最大振幅を減少させる利益がある。なほ、通常の運轉速度に於て振幅を減少するには、常に枕ばねの振動を行はせるやうに、板の間の摩擦を減ずるため、板数を少くし、板の厚さを薄くし、径りを狭くし、板の間を潤滑ならしめなければならぬ。

(7) 車体の左右動振幅を減少させるには、上下動の場合と同じ様な条件が必要で、尙その上、軌間は廣い方がよく、釣合ばね中心間の距離は長い方がよい。勿論、車体重心の高さ、車体の慣性モーメント、揺枕釣の長さ及び傾斜角、揺枕の長さ等によつても影響される。

本文は、公務の余暇に考へたもので、誤謬、杜撰の点は澤山あることと思ふ。只管、大方の御叱正を希望する次第である。車体及び台車の設計上、多少なりとも、裨益する所あれば筆者の幸福これに過ぎぬ。(昭和10年4月大阪にて誌す)

砂谷博士の撓み函数 $\chi_s^{(1)}$ の一應用に就て

(昭和10年4月5日 第12期定時總會講演會に於て講演)

正 員 津 村 利 光⁽²⁾

On Application of Dr. C. Sunatani's Flexure-function χ_s

By Tosimitu TUMURA, Member

1. 一般式

眞直で断面一様の梁の断面内に起る剪断内力の在來の計算方法に對して砂谷博士は昨年新しい方法を發表された。その概略は在來の如く撓み函数を求むるには必ずしも慣性モーメント主軸を中立軸としないで剪断力の加はる方向によつて中立軸を定めこれより材料内の内力を定める事と在來の方法では剪断力の合力が断面重心を通る事を必要とするに對し同博士の方法ではその必要の無い事と、第3は撓み函数を或る積分の形で表示してゐる事とであると思はれる。尙同文には特に撓みによる内力のみと限つてないから剪断力が必ずしも断

面の重心を通る必要もなく又振りモーメントのみ加はつても差支へがない。

併しながら茲には單に同論文中使用の Ψ_s 及び χ_s の2函数内の撓み函数 χ_s のみの1解法を等角写像を使つて試みる。而して同博士の表示式は次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} \text{断面内部では} \quad & (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\chi_s = 0 \\ \text{断面周では} \quad & \chi_s + \frac{1}{2}\sigma x^2 - (1+\sigma) \int y^2 dx = \text{一定} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} = \widehat{yy} = \widehat{xy} = 0, \quad \widehat{zz} = yM \sin \alpha / I_x, \\ \widehat{xz} = -\frac{F_y}{2(1+\sigma)I_x} \frac{\partial \chi_s}{\partial y}, \quad \widehat{yz} = -\frac{F_y}{2(1+\sigma)I_x} \left\{ \frac{\partial \chi_s}{\partial x} + \sigma x^2 - (1+\sigma)y^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

但し式上には振り函数より來る内力表示を特に省いてゐる。

[第1巻第5號]

(14) 震災予防調査會報告 第74号 御料汽車振動の驗測 (15) 鉄道業務研究資料 第18巻 第22号 新製ボギー客車振動測定成績に就て

(1) 機械學會誌 昭和9年9月 頁581, 原著には單に χ とするも本文には χ_s のサフィックスを付した (2) 東京府立化学工業学校