だ。或る程度以上に幅を広くすることは、水量は多くなるとも水頭は反つて低くなる傾向がある(この点は尙研究中に属する)。

- (8) 回轉車周囲の溝の形狀に依る諸性質は水管からの流水抵抗を測定することに依つて察知出来るものと信ずる。
- (9) 回轉車とポンプ蓋間の磨耗及び漏水の原因になる部分の構造に改善を加へ、又高速回轉に安全に耐へ得る様な構造にする事が本ポンプの生命及び利用範圍を擴張する

重用な條件である。

- (10) 大型のこの種ポンプは充分なる注意を以て設計製作することを要す。即ち回轉車の直径大なるに従ひその摩擦部分の増加、漏水の原因になる隙間の増大がその水嵩損失及び効率を甚だしく低下せしめる。以上
- 終りに臨み本実験装置の製作及びその実験に際して広島高工機械工学科の職員各位及び副手の方々の御援助に依る所多大であつた。茲に特記して感謝の意を表したい。

円筒に関する塑性理論並に焼嵌め及び力嵌め に関する計算式に就て(第2報)

(昭和10年10月23日第280回講演會並に同年10月26日大阪地方講演會に於て講演)

正員 永島 菊三郎⁽¹⁾

On the Theory of Plasticity Applied to the Hollow Cylinder and the Theory of Force Fits (The 2nd Report)

By Kikusaburō NAGASHIMA, Member

摘 要

内圧を受ける円筒の一部分が塑性変形を起した場合に対して、一般塑性理論に於て用ふる條件「塑性変形は体積不変の変形である」を用ひて問題を解き、且例を以てこの計算結果と曩に「塑性域の体積は不変である」との假定を用ひて解いた結果及び中原博士の用ひられてゐる「塑性域の断面積は不変である」との假定を用ふる略算法に依る結果とを比較し、何れの計算に依つてもその結果は大差なく、実用上何れの計算法を使用しても差支ない事を明かにした。然してこの場合にも曩の場合と同様に、降伏の條件並に塑性変形における内力と歪との關係に対する條件としては、内部摩擦説を用ひた。

1. 緒 言

曩に⁽²⁾円筒の一部分が塑性歪を起した場合の問題を解いて置いたが、その時には「塑性域の体積は不変である」との假定を用ひてゐる。然して斯様な假定を用ふれば計算が比較的簡單であつて、且理論上矛盾の無い結果が得られる事は曩に述べた通りである。然し乍ら上の様な假定を用ふる事は一つの略算法であつて、一般塑性理論では「塑性変形は体積不変の変形である」との條件を用ふるのが普通である。然るにNadai氏の塑性理論に就て調べた結果では⁽³⁾、この條件から計算を進め半径方向の変位を求むれば、弾性域と塑性域との境界線上に於て、これが不連続と成る様な矛盾を生ずる。従つて円筒の一部分が塑性変形を起した場合に対しては、一般塑性理論における「塑性変形は体積不変の変形である」との條件は成立し得ないか否かとの問題を生ずる事になる。然るに「Nadai氏の塑性理論に就て」における計算では、半径方

向の変位を求むるに塑性歪に依るものと弾性歪に依るものとを別々に考へ、塑性歪に対してはNadai氏の塑性理論における條件が成立するものとして計算を行つたのである。斯様なNadai氏の塑性理論から生ずる缺陷を避るためにNadai氏が用ひてゐる塑性歪に関する條件⁽⁴⁾を用ひる事を止め、内部摩擦説を用ひ且上述の一般塑性理論における條件を用ひて円筒の一部分が塑性歪を起した場合の問題を解いたところ、少しも矛盾の無い結果が得られた。然してこの解は一般塑性理論に用ふる條件をその儘用ひてゐるから、曩の計算結果より嚴密な解であると云ふ事が出来る。

上に述べた様に曩に用ひた假定は一般塑性理論に於て用ふる條件と相違してゐるから、斯様な假定を用ひて計算した結果に対しては一應吟味して見る必要がある。それでこゝに内圧を受ける円筒の塑性理論に關する嚴密な計算及びその計算結果と曩の計算結果とを例を以て比較し、以て曩の計算式は略算式として充分である事をこゝに示し、本文の第2報とする次第である。

⁽¹⁾ 住友金属工業株式会社製鋼所 ⁽²⁾ 筆者、円筒に関する塑性理論並に焼嵌め及び力嵌めに関する計算式に就て 本會論文第1巻第3号196頁 ⁽³⁾ 筆者、Nadai氏の塑性理論に就て、本會論文第1巻第5号368頁

⁽⁴⁾ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を主内力とし、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ を主歪とすれば主歪は次の様に成ることを條件である。 $\varepsilon_1 = K \left\{ \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right\}$, $\varepsilon_2 = K \left\{ \sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right\}$, $\varepsilon_3 = K \left\{ \sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right\}$ 此で K は任意の常數 (Nadai, Plasticity 78頁)

2. 一般の場合 (歪硬化を受ける場合)

引張試験結果が第1図で表されるやうな材料を以て作られた円筒が、内圧を受けてその一部分が塑性変形を起した場合に就て計算を行つて見る。

今第2図に示す様に、弾性域と塑性域との境界の半径を r_0 とし、半径 r_0 における半径方向の内力を σ_{r0} とすれば弾性域における切線方向内力 σ_θ' 及び半径方向内力 σ_r' は次式で表される。

弾性域 $r_0 \leq r \leq r_0$ に於て

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta' &= -\sigma_{r0} \frac{r_0^2}{r_0^2 - r_g^2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \\ \sigma_r' &= -\sigma_{r0} \frac{r_0^2}{r_0^2 - r_g^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

塑性域 $r_0 \geq r \geq r_i$ に於ては

$\sigma_\theta, \sigma_r, \sigma_z$ = 切線方向、半径方向、軸方向の内力
 $\varepsilon_\theta, \varepsilon_r, \varepsilon_z$ = 切線方向、半径方向、軸方向の歪
 とすれば引張試験結果が第1図の様な場合には、一般塑性理論⁽⁵⁾に依り次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \{ \sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z) \} + \frac{1}{a} \left\{ \sigma_\theta - \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \sigma_r - \sigma_z \right\} \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \{ \sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z) \} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \mu(\sigma_\theta + \sigma_r) \} - \frac{1}{a} \left\{ \sigma_\theta - \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \sigma_r - \sigma_z \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

こゝで E = 弾性係数、 μ = ポアソン比、 a = 材料特有の常数、尚 ϕ は材料特有の常数とする。

第 1 図

第 2 図

今 $\varepsilon_z = \varepsilon_z = \text{常数}$ (3)

こゝに ε_z = 弾性域における z 方向の歪である。即ち z 方向の歪 ε_z 及び ε_z は r に無関係であるとすれば次の様に計算を進める事が出来る。但しこの場合も曩の場合と同様に内力、歪等は總て z には無関係であるとする。

(2) 式から σ_z を消去すれば次式を得。

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{E} \{ (1 - \mu^2) \sigma_\theta - \mu(1 + \mu) \sigma_r - \mu E \varepsilon_z \} + \frac{1}{a} \{ \sigma_\theta - (1 - \lambda) \sigma_r - \sigma_z \}$$

⁽⁵⁾ 中原益治郎、鉛の機械的性質に就て (第 5 報)、新しき塑性理論、機械学会誌第 34 巻昭和 6 年 1562 頁、同著、鉛の機械的性質とその塑性理論、45 頁及び脚註⁽²⁾参照

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E} \{ (1 - \mu^2) \sigma_r - \mu(1 + \mu) \sigma_\theta - \mu E \varepsilon_z \} - \frac{1}{a} \{ \sigma_\theta - (1 - \lambda) \sigma_r - \sigma_z \}$$

こゝで $\lambda = \frac{2 \sin \phi}{1 + \sin \phi}$ u = 半径 r における半径方向の変位、上式より σ_r 及び σ_θ を求むれば次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A \frac{du}{dr} + B \frac{u}{r} + C \varepsilon_z - D \sigma_\theta \\ \sigma_\theta &= A' \frac{du}{dr} + B' \frac{u}{r} + C' \varepsilon_z + D \sigma_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

こゝで

$$\left. \begin{aligned} A &= \left\{ \frac{1 - \mu^2}{E} + \frac{1}{a} \right\} \sqrt{\left\{ \frac{1 - \mu^2}{E} + \frac{1}{a} \right\} \left\{ \frac{1 - \mu^2}{E} + \frac{1 - \lambda}{a} \right\} - \left\{ \frac{\mu(1 + \mu)}{E} + \frac{1}{a} \right\} \left\{ \frac{\mu(1 + \mu)}{E} + \frac{1 - \lambda}{a} \right\}} \\ B &= \left\{ \frac{\mu(1 + \mu)}{E} + \frac{1}{a} \right\} \sqrt{\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]} \\ C &= \mu \left\{ \frac{1 + \mu}{E} + \frac{2}{a} \right\} \sqrt{\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]} \\ D &= \frac{1}{a} \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{E} \sqrt{\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]} \\ A' &= \left\{ \frac{\mu(1 + \mu)}{E} + \frac{1 - \lambda}{a} \right\} \sqrt{\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]} \\ B' &= \left\{ \frac{1 - \mu^2}{E} + \frac{1 - \lambda}{a} \right\} \sqrt{\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]} \\ C' &= \mu \left\{ \frac{1 + \mu}{E} + \frac{2(1 - \lambda)}{a} \right\} \sqrt{\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

(4) 式を次の (6) の運動方程式に代入すれば (7) 式を得。

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$A \frac{d^2 u}{dr^2} + (B + A - A') \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - B' \frac{u}{r^2} = \frac{(C' - C) \varepsilon_z + 2D \sigma_\theta}{r} \dots\dots\dots (7)$$

上式より u を求むれば次の様になる。

$$u = K_1 r^\alpha + K_2 r^\beta + \frac{(C' - C) \varepsilon_z + 2D \sigma_\theta}{A - A' + B - B'} r \dots\dots\dots (8)$$

こゝで K_1, K_2 = 積分常数 で尚

$$\alpha = \frac{1}{2A} \{ (A' - B) + \sqrt{(A' - B)^2 + 4AB'} \}$$

$$\beta = \frac{1}{2A} \{ (A' - B) - \sqrt{(A' - B)^2 + 4AB'} \}$$

従つて $\varepsilon_\theta, \varepsilon_r$ は次式で與へられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= K_1 r^{\alpha-1} + K_2 r^{\beta-1} + \frac{(C' - C) \varepsilon_z + 2D \sigma_\theta}{A - A' + B - B'} \\ \varepsilon_r &= K_1 \alpha r^{\alpha-1} + K_2 \beta r^{\beta-1} + \frac{(C' - C) \varepsilon_z + 2D \sigma_\theta}{A - A' + B - B'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

(4) 式に (9) 式を代入すれば次式を得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= K_1(Aa+B)r^{\alpha-1} + K_2(A\beta+B)r^{\beta-1} \\ &\quad + \frac{(C'-C)\varepsilon_z + 2D\sigma_e}{A-A'+B-B'}(A+B) + C\varepsilon_z - D\sigma_e \\ \sigma_\theta &= K_1(A'a+B')r^{\alpha-1} + K_2(A'\beta+B')r^{\beta-1} \\ &\quad + \frac{(C'-C)\varepsilon_z + 2D\sigma_e}{A-A'+B-B'}(A'+B') + C'\varepsilon_z + D\sigma_e \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10) の第 1 式を用い

$$r=r_i \text{ に於て } \sigma_r = -p_i$$

$$\text{及び } r=r_g \text{ に於て } \sigma_r = \sigma_{rg}$$

なる境界条件より K_1 及び K_2 を求むれば次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{r_g r_i}{(Aa+B)(r_g^\alpha r_i^\beta - r_g^\beta r_i^\alpha)} \left[\sigma_{rg} r_i^{\beta-1} + p_i r_g^{\beta-1} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{(C'-C)\varepsilon_z + 2D\sigma_e}{A-A'+B-B'}(A+B) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C\varepsilon_z - D\sigma_e \right\} (r_g^{\beta-1} - r_i^{\beta-1}) \right] \\ K_2 &= \frac{r_g r_i}{(A\beta+B)(r_g^\beta r_i^\alpha - r_g^\alpha r_i^\beta)} \left[\sigma_{rg} r_i^{\alpha-1} + p_i r_g^{\alpha-1} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{(C'-C)\varepsilon_z + 2D\sigma_e}{A-A'+B-B'}(A+B) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C\varepsilon_z - D\sigma_e \right\} (r_g^{\alpha-1} - r_i^{\alpha-1}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(10) 及び (11) 式に依つて σ_r 及び σ_θ が與へられる。但し ε_z , r_g 及び σ_{rg} は未知である。次に ε_z を求めるに (2) の第 2 式に (10) 式を代入すれば

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \mu \{ (Aa+A'a+B+B')K_1 r^{\alpha-1} \\ &\quad + (A\beta+A'\beta+B+B')K_2 r^{\beta-1} \} \\ &\quad + \left\{ \mu \frac{A+A'+B+B'}{A-A'+B-B'}(C'-C) + \mu(C'+C) + E \right\} \varepsilon_z \\ &\quad + 2\mu D \frac{A+A'+B+B'}{A-A'+B-B'} \sigma_e \end{aligned} \quad (12)$$

又弾性域における軸方向の内力を σ_z' とすれば

$$\sigma_z' = E\varepsilon_z + \mu(\sigma_r' + \sigma_\theta')$$

なる関係があるから、上式に (1) 式を代入すれば

$$\sigma_z' = E\varepsilon_z - 2\mu \frac{r_g^2}{r_0^2 - r_g^2} \sigma_{rg} \quad (13)$$

円筒が内面に水圧を受ける場合には、軸方向の釣合の条件は次の式で表される。

$$\int_{r_i}^{r_g} 2\pi r \sigma_z dr + \int_{r_g}^{r_0} 2\pi r \sigma_z' dr = \pi r_i^2 p_i \quad (14)$$

(14) 式に (12), (13) 式を代入して積分を行へば次の様になる。

$$\begin{aligned} 2\mu \left\{ \frac{K_1}{\alpha+1} (Aa+A'a+B+B')(r_g^{\alpha+1} - r_i^{\alpha+1}) \right. \\ \left. + \frac{K_2}{\beta+1} (A\beta+A'\beta+B+B')(r_g^{\beta+1} - r_i^{\beta+1}) \right\} \\ + \left\{ \mu \frac{A+A'+B+B'}{A-A'+B-B'}(C'-C) + \mu(C'+C) + E \right\} \varepsilon_z (r_g^2 - r_i^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + 2D\mu \frac{A+A'+B+B'}{A-A'+B-B'} \sigma_e (r_g^2 - r_i^2) \\ + E\varepsilon_z (r_0^2 - r_g^2) - 2\mu r_g^2 \sigma_{rg} = r_i^2 p_i \end{aligned}$$

上式より ε_z を求め得。

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \left[r_i^2 p_i - 2\mu \left\{ \frac{K_1}{1+\alpha} (Aa+A'a+B+B')(r_g^{1+\alpha} - r_i^{1+\alpha}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{K_2}{1+\beta} (A\beta+A'\beta+B+B')(r_g^{1+\beta} - r_i^{1+\beta}) \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2D\mu \frac{A+A'+B+B'}{A-A'+B-B'} \sigma_e (r_g^2 - r_i^2) \right. \\ &\quad \left. + 2\mu r_g^2 \sigma_{rg} \right] / \left[\left\{ \mu \frac{A+A'+B+B'}{A-A'+B-B'}(C'-C) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu(C'+C) \right\} (r_g^2 - r_i^2) + E(r_0^2 - r_i^2) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

又弾性域と塑性域との境界に於ては次式が成立するを要す。

$$r=r_g \text{ に於て } \sigma_\theta = \sigma_\theta' \text{ 及び } \sigma_\theta - (1-\lambda)\sigma_r = \sigma_e \quad (16)$$

上式に (1) 及び (10) 式を代入すれば次の様に成る。

$$\left. \begin{aligned} K_1(A'a+B')r_g^{\alpha-1} + K_2(A'\beta+B')r_g^{\beta-1} \\ + \frac{(C'-C)\varepsilon_z + 2D\sigma_e}{A-A'+B-B'}(A'+B') + C'\varepsilon_z + D\sigma_e \\ = -\sigma_{rg} \frac{r_0^2 + r_g^2}{r_0^2 - r_g^2} \\ K_1(A'a+B')r_g^{\alpha-1} + K_2(A'\beta+B')r_g^{\beta-1} \\ + \frac{(C'-C)\varepsilon_z + 2D\sigma_e}{A-A'+B-B'}(A'+B') + C'\varepsilon_z \\ + D\sigma_e - (1-\lambda)\sigma_{rg} = \sigma_e \end{aligned} \right\} \quad (16')$$

(16') 式より r_g 及び σ_{rg} を求め得。以上に依り内面に水圧を受ける円筒の一部分が塑性歪を起した場合の問題が解けたのである。

内面に他の円筒又は円柱が力締めされる場合には (14) 式の代りに次式を用ふれば同様に問題を解く事が出来る。

$$\int_{r_i}^{r_g} 2\pi r \sigma_z dr + \int_{r_g}^{r_0} 2\pi r \sigma_z' dr = 0 \quad (14a)$$

内圧を受ける円筒の外表面が丁度弾性限に達した場合には前述の計算に於て

$$r_g = r_0 \text{ 及び } \sigma_{rg} = 0$$

とすれば良い。

尚円筒全体が塑性歪を起す場合には円筒全体を塑性域として計算し唯境界の条件として

$$r=r_i \text{ に於て } \sigma_r = -p_i$$

$$r=r_0 \text{ に於て } \sigma_r = 0$$

とすれば良い⁽⁶⁾。

3. 降伏現象を現はす材料の場合

今引張試験結果が第 3 図に示す様に降伏点を有する場合に

⁽⁶⁾ 本節の計算に就ては前掲 鉛の機械的性質とその塑性理論 57 頁を参照

は、降伏点を越えた歪と内力との関係は一般に次の様に表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \{ \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \} + \varepsilon_{ty} + \frac{1}{a} \{ \sigma_1 - (1-\lambda)\sigma_3 - \sigma_e \} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \{ \sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1) \} \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \{ \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \} - \varepsilon'_{ty} - \frac{1}{a} \{ \sigma_1 - (1-\lambda)\sigma_3 - \sigma_e \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)^{(7)}$$

ここに $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は主内力で $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ なる関係を有するものとし、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ は夫々 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 方向の主歪とする。尚 ε_{ty}' は尚研究の必要があるが、現在の研究の状態では $\varepsilon_{ty}' = \varepsilon_{ty}/(1 + \varepsilon_{ty})$ とするのが最も適當であつて、勿論計算上 $\varepsilon_{ty}' = \varepsilon_{ty}$ として差支のない場合も屢存在する。

第 3 圖

第 4 圖

円筒が内圧を受ける場合には $\sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_r$ は夫々主内力で、且 $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$ なる関係があるから次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \{ \sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r) \} + \varepsilon_{ty} + \frac{1}{a} \{ \sigma_\theta - (1-\lambda)\sigma_r - \sigma_e \} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta) \} \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \{ \sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z) \} - \varepsilon'_{ty} - \frac{1}{a} \{ \sigma_\theta - (1-\lambda)\sigma_r - \sigma_e \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17')$$

而して第 3 図の AB の間即ち降伏状態に於ては次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \{ \sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r) \} + \varepsilon_y \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta) \} \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \{ \sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z) \} - \varepsilon_y' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17'')$$

但し此處に $0 \leq \varepsilon_y \leq \varepsilon_{ty}$, $\varepsilon_y' = \varepsilon_y/(1 + \varepsilon_y)$ である。 ε_y が甚だ小なる時は、 $\varepsilon_y' = \varepsilon_y$ として差支ない。又 ε_y がそれ程に小さくなくても $\varepsilon_y' = \varepsilon_y$ として差支のない時もある。

(1) 内圧を受ける円筒の一部分が降伏状態となり、他は降伏点以下にある場合。

この場合の弾性域における内力は (1) 式で表され、降伏域の内力は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \sigma_e - (\sigma_e + \lambda p_i) \frac{r_i^\lambda}{r^\lambda} \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \sigma_e - (1-\lambda)(\sigma_e + \lambda p_i) \frac{r_i^\lambda}{r^\lambda} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)^{(8)}$$

次に軸方向の釣合の条件を考ふるに、円筒が内面に水圧を受ける場合には次式が成立する。

$$\int_{r_i}^{r_o} 2\pi r \sigma_z dr + \int_{r_g}^{r_o} 2\pi r \sigma_z' dr = \pi r_i^2 p_i \dots\dots\dots (14)$$

上式より ε_z を求むれば次の様になる。

$$E\varepsilon_z = p_i \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} (1 - 2\mu) \dots\dots\dots (19)^{(9)}$$

又力嵌めに依る内圧を受ける場合には

$$\int_{r_i}^{r_g} 2\pi r \sigma_z dr + \int_{r_g}^{r_o} 2\pi r \sigma_z' dr = 0 \dots\dots\dots (14_a)$$

なる式が成立する。従つて

$$E\varepsilon_z = - \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} 2\mu p_i \dots\dots\dots (20)^{(9)}$$

(17') の第 2 式に (19) 又は (20) 式を代入すれば σ_z を得。今 (19) 式を代入した場合を示せば次の様である。

$$\sigma_z = p_i \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} (1 - 2\mu) + \frac{\mu}{\lambda} \left\{ 2\sigma_e - (2-\lambda)(\sigma_e + \lambda p_i) \frac{r_i^\lambda}{r^\lambda} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

同様に σ_z' を求むれば次式の様になる。

$$\sigma_z' = p_i \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} (1 - 2\mu) - 2\mu \sigma_{rg} \frac{r_g^2}{r_o^2 - r_g^2}$$

次に半径方向の変位を求むるに (17') の第 1 及び第 3 式を加ふれば

$$\varepsilon_\theta + \varepsilon_r = \frac{1}{E} \{ (\sigma_\theta + \sigma_r)(1-\mu) - 2\mu\sigma_z \} + \frac{\varepsilon_y^2}{1 + \varepsilon_y}$$

ε_y^2 の値が甚だ小さくてこれを省略して差支のない場合をとると

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = \frac{1}{E} \{ (\sigma_\theta + \sigma_r)(1-\mu) - 2\mu\sigma_z \}$$

上式に (18) 及び (21) 式を代入すれば次式の様になる。

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 2A'' - B'' \left(\frac{r_i}{r} \right)^\lambda \dots\dots\dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} A'' &= \frac{1}{E} \left\{ \frac{\sigma_e}{\lambda} (1-\mu-2\mu^2) - \frac{\mu(1-2\mu)}{n^2-1} p_i \right\} \\ B'' &= \frac{1}{E\lambda} (\sigma_e + \lambda p_i) (2-\lambda)(1-\mu-2\mu^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

(22) 式より u を求むれば次式で與へられる。

$$u = \frac{K_3}{r} + A''r - \frac{B''}{2-\lambda} r_i^\lambda \cdot r^{1-\lambda} \dots\dots\dots (24)$$

ここに K_3 = 積分常数 である。

(7) 中原益治郎、軟鋼の塑性について (8) 前掲脚註 (7) 又は (2) 参照

(9) 前掲脚註 (2) 参照

従つて ε_0 は次の様に與へられる。

$$\varepsilon_0 = \frac{K_3}{r^2} + A'' - \frac{B''}{2-\lambda} \left(\frac{r_i}{r} \right)^\lambda \quad (25)$$

今 $r=r_g$ における ε_0 を ε_{0g} とすれば

$$K_3 = \varepsilon_{0g} \cdot r_g^2 - A'' r_g^2 + \frac{B''}{2-\lambda} \left(\frac{r_i}{r_g} \right)^\lambda r_g^2 \quad (26)$$

(26) 式を (25) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \varepsilon_{0g} \left(\frac{r_g}{r} \right)^2 - A'' \left\{ \left(\frac{r_g}{r} \right)^2 - 1 \right\} \\ &+ \frac{B''}{2-\lambda} \left\{ \left(\frac{r_i}{r_g} \right)^\lambda \left(\frac{r_g}{r} \right)^2 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^\lambda \right\} \quad (25') \end{aligned}$$

を得、上式より ε_0 が求められる。尚 ε_{0g} は次式で與へられる。

$$\varepsilon_{0g} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{0g}' - \mu(\sigma_{rg}' + \sigma_{zg}') \}$$

又 σ_{rg} 及び r_g は曩に述べたところ⁽¹⁰⁾ に依り次式より求め得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rg} &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \sigma_e - (\sigma_e + \lambda p_i) \frac{r_i^\lambda}{r_g^\lambda} \right\} \\ -\sigma_{rg} \frac{r_0^2 + r_g^2}{r_0^2 - r_g^2} &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \sigma_e - (1-\lambda)(\sigma_e + \lambda p_i) \frac{r_i^\lambda}{r_g^\lambda} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(2) 円筒の外縁が降伏点に達した場合

円筒の外縁が降伏点に達し円筒全体が丁度降伏状態となつた場合には $r_g=r_0$ 及び $\sigma_{rg}=0$ とすれば良い。従つて (27) の第1式より p_i を求むれば次の様になる。

$$p_i = \frac{\sigma_e}{\lambda} (n^\lambda - 1) \quad (28)$$

こゝで $n=r_0/r_i$ である。

上式で表される内圧の場合に丁度円筒全体が降伏状態になる。この場合の内力は次式で與へられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_e}{\lambda} \left(1 - \frac{r_0^\lambda}{r^\lambda} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_e}{\lambda} \left(1 - (1-\lambda) \frac{r_0^\lambda}{r^\lambda} \right) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\sigma_z = \frac{p_i}{n^2-1} (1-2\mu) + \frac{\mu\sigma_e}{\lambda} \left\{ 2 - (2-\lambda) \frac{r_0^\lambda}{r^\lambda} \right\} \quad (30)$$

以上は円筒の内面に水圧を受ける場合であるが、力嵌めに依る圧力を受ける場合も同様に求め得る。

(3) 円筒の内縁が降伏点の終りに達した場合

円筒の内面に水圧を受ける場合に (28) 式で示される圧力と成れば円筒全体が降伏状態に達する事は上述の通りである。而して円筒全体が降伏状態となれば同じ圧力のもとで、同じ内力状態に於て円筒の歪 ε_0 , ε_r が変化し、この ε_0 , ε_r の変化は円筒の内縁が降伏点の終りに達する迄継続する。今円筒の内縁が降伏点の終りに達した場合を考ふるに、内圧及び内力状態は (2) の場合と同様である。従つて内圧及び内力は (28), (29) 及び (30) 式で表される。

次にこの場合の ε_0 を求むるに、一般に ε_0 は (25) 式で表

され、又降伏点の終りにおける歪は (17) 式に依つて次の様に與へられる。

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{E} \{ \sigma_0 - \mu(\sigma_z + \sigma_r) \} + \varepsilon_{iy} \quad (17''')$$

故に

$$\frac{K_3}{r_i^2} + A'' - \frac{B''}{2-\lambda} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{0i} - \mu(\sigma_{zi} + \sigma_{ri}) \} + \varepsilon_{iy} \quad (31)$$

と (29) 式を用ひ K_3 を求め、これを (25) 式に代入すれば ε_0 が求められる。

(4) 円筒の一部が降伏点を越えて塑性変形をなし、他の部分は降伏状態にある場合
この場合にも第5図に示す様に降伏域と降伏点を越えた部分との境界の半径を r_g とし、 r_g における半径方向の内力を σ_{rg} とする。然るにこの場合には $r=r_g$ に於て (17''') 式が成立するを要する。即ち

$$\varepsilon_{0g} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{0g} - \mu(\sigma_{zg} + \sigma_{rg}) \} + \varepsilon_{iy} \quad (17''''')$$

降伏域、 $r_g \leq r \leq r_0$ における内力は (29) 及び次式で與へられる。

$$\sigma_z = E\varepsilon_z + \frac{\mu\sigma_e}{\lambda} \left\{ 2 - (2-\lambda) \frac{r_0^\lambda}{r^\lambda} \right\} \quad (30')$$

$r=r_g$ に於て $\sigma_r = \sigma_{rg}$ であるから、次式が成立する。

$$\sigma_{rg} = -\frac{\sigma_0}{\lambda} \left\{ \left(\frac{r_0}{r_g} \right)^\lambda - 1 \right\} \quad (28')$$

降伏点を越えた部分、 $r_i \leq r \leq r_g$ における内力及び歪を夫々 σ_θ'' , σ_z'' , σ_r'' , ε_θ'' , ε_z'' 及び ε_r'' とすれば次の様に計算を進め得る。

この場合にも軸方向の歪は常数であるとする。即ち次式が成立するものとする。

$$\varepsilon_z'' = \varepsilon_z = \text{常数} \quad (3')$$

今 ξ を降伏点を越えた部分における半径方向の変位とすれば ε_θ'' 及び ε_r'' は (17') 式に依り次の様に與へられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta'' &= \frac{\xi}{r} = \frac{1}{E} \{ (1-\mu^2)\sigma_\theta'' - \mu(1+\mu)\sigma_r'' - \mu E\varepsilon_z \} \\ &+ \frac{1}{a} \{ \sigma_\theta'' - (1-\lambda)\sigma_r'' - \sigma_e \} + \varepsilon_{iy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r'' &= \frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{E} \{ (1-\mu^2)\sigma_r'' - \mu(1+\mu)\sigma_\theta'' - \mu E\varepsilon_z \} \\ &- \frac{1}{a} \{ \sigma_\theta'' - (1-\lambda)\sigma_r'' - \sigma_e \} - \varepsilon_{iy}' \end{aligned}$$

今 $\varepsilon_{iy}' = \varepsilon_{iy}$ として差支のない時を考へ、上式より σ_r'' 及び σ_θ'' を求むれば次式で與へられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r'' &= A \frac{d\xi}{dr} + B \frac{\xi}{r} + C\varepsilon_z - D'\sigma_e \\ \sigma_\theta'' &= A' \frac{d\xi}{dr} + B' \frac{\xi}{r} + C'\varepsilon_z + D'\sigma_e \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

こゝに A, B, C, A', B', C' は (5) 式で表される値で、 D' は次式で表される値を示す。

第5図

(10) 前掲脚註 (2) 参照

$$D' = \frac{1-\mu-2\mu^2}{E} \left\{ \frac{1}{a} + \frac{\epsilon_{\theta}}{\sigma_e} \right\} /$$

$$\left[\left\{ \frac{1-\mu^2}{E} + \frac{1}{a} \right\} \left\{ \frac{1-\mu^2}{E} + \frac{1-\lambda}{a} \right\} \right.$$

$$\left. - \left\{ \frac{\mu(1+\mu)}{E} + \frac{1}{a} \right\} \left\{ \frac{\mu(1+\mu)}{E} + \frac{1-\lambda}{a} \right\} \right] \dots\dots\dots (32)$$

(4') 式を (6) の運動方程式に代入し、それより ξ を求むれば次の様になる。

$$\xi = K_4 r^a + K_5 r^b + \frac{(C'-C) \epsilon_z + 2D' \sigma_e}{A-A'+B-B'} r \dots\dots\dots (8')$$

ここに K_4, K_5 は積分常数、 a, b は (8) 式におけるものと同様である。

(4') 式に (8') 式を代入すれば $\sigma_r'', \sigma_\theta''$ を得、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r'' &= K_4 (Aa+B) r^{a-1} + K_5 (A\beta+B) r^{\beta-1} \\ &\quad + \frac{(C'-C) \epsilon_z + 2D' \sigma_e}{A-A'+B-B'} (A+B) + C \epsilon_z - D' \sigma_e \\ \sigma_\theta'' &= K_4 (A'a+B') r^{a-1} + K_5 (A'\beta+B') r^{\beta-1} \\ &\quad + \frac{(C'-C) \epsilon_z + 2D' \sigma_e}{A-A'+B-B'} (A'+B') + C' \epsilon_z + D' \sigma_e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10')$$

(10') の第 1 式に次の条件を入れて、 K_4 及び K_5 を求むれば (11') 式の様に表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} r=r_i \text{ に於て } \sigma_r = -p_i \\ r=r_g \text{ に於て } \sigma_r = \sigma_{rg} \end{array} \right.$$

第 6 圖 内圧と内径の伸びとの関係
(内面に水圧を受ける場合)

$$\left. \begin{aligned} K_4 &= \frac{r_g r_i}{(Aa+B)(r_g^a r_i^b - r_g^b r_i^a)} \left[\sigma_{rg} r_i^{b-1} + p_i r_g^{b-1} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{(C'-C) \epsilon_z + 2D' \sigma_e}{A-A'+B-B'} (A+B) + C \epsilon_z - D' \sigma_e \right\} (r_g^{b-1} - r_i^{b-1}) \right] \\ K_5 &= \frac{r_g r_i}{(A\beta+B)(r_g^\beta r_i^\alpha - r_g^\alpha r_i^\beta)} \left[\sigma_{rg} r_i^{\alpha-1} + p_i r_g^{\alpha-1} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{(C'-C) \epsilon_z + 2D' \sigma_e}{A-A'+B-B'} (A+B) + C \epsilon_z - D' \sigma_e \right\} (r_g^{\alpha-1} - r_i^{\alpha-1}) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11')$$

σ_z'' は (2) におけると同様に求められ次式で與へられる。

$$\begin{aligned} \sigma_z'' &= \mu \{ (Aa+A'a+B+B') K_4 r^{a-1} \\ &\quad + (A\beta+A'\beta+B+B') K_5 r^{\beta-1} \} \\ &\quad + \left\{ \mu \frac{A+A'+B+B'}{A-A'+B-B'} (C'-C) + \mu (C'+C) + E \right\} \epsilon_z \\ &\quad + 2\mu D' \frac{A+A'+B+B'}{A-A'+B-B'} \sigma_e \dots\dots\dots (12') \end{aligned}$$

尚 ϵ_z を求むるには次の条件を用ふ。

$$\int_{r_i}^{r_g} 2\pi r \sigma_z'' dr + \int_{r_g}^{r_0} 2\pi r \sigma_z dr = \pi r_i^2 p_i \dots\dots\dots (14')$$

上式の σ_z に (30') 式を、 σ_z'' に (12') 式を代入すれば ϵ_z を求むる式を得る。従つて (14') 式より ϵ_z が與へられ、これを (30') 及び (12') 式に代入すれば σ_z 及び σ_z'' を求め得る。尚 σ_{rg} 及び r_g は (28') 式及び

$$[\sigma_\theta]_{r=r_g} = [\sigma_\theta'']_{r=r_g}$$

第 7 圖 内圧と内径の伸びとの関係
(内面に力嵌めされる場合)

なる条件より求め得る。

ε_0 は一般に (25) 式と同様の形で與へられるが、同式の積分常数は $r=r_0$ に於て (17''') 式が成立すると云ふ条件から求め得る。然して ε_0 は次式で與へられる。

$$\varepsilon_0 = \frac{K_6}{r^2} + A_1'' - \frac{B_1''}{2-\lambda} \left(\frac{r_0}{r} \right)^\lambda \dots\dots\dots (25')$$

こゝで

$$\left. \begin{aligned} A_1'' &= \frac{1}{E} \left\{ \frac{\sigma_0}{\lambda} (1-\mu-2\mu^2) + \frac{\mu(1-2\mu)}{(r_0/r_0)^2-1} \sigma_{r0} \right\} \\ B_1'' &= \frac{1}{E\lambda} (\sigma_0 - \lambda \sigma_{r0}) (2-\lambda) (1-\mu-2\mu^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23')$$

K_6 は (3) に於て (31) 式から K_3 を求めたと同様に次式より求め得る。

$$\frac{K_6}{r_0^2} + A_1'' - \frac{B_1''}{2-\lambda} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{00} - \mu(\sigma_{20} + \sigma_{r0}) \} + \varepsilon_{ty} \dots\dots\dots (31')$$

ε_0'' は (8') 式より求め得る。

$$\varepsilon_0'' = K_4 r^{\alpha-1} + K_5 r^{\beta-1} + \frac{(C'-C)\varepsilon_z + 2D'\sigma_z}{A-A'+B-B'} \dots\dots\dots (33)$$

以上は内面に水圧を受ける場合に就てその解を求めたものであるが内面に力嵌めに依る圧力 (実際問題としては斯様に大なる変形を力嵌めに依つて與へる事は無いが、大砲の自緊の様な場合がこれに相當する) を受ける場合も全く同様であつて唯 (14') 式の代りに次式を用ふれば良い。

$$\int_{r_i}^{r_0} 2\pi r \sigma_z'' dr + \int_{r_0}^{r_i} 2\pi r \sigma_z dr = 0 \dots\dots\dots (14' a)$$

(5) 例題

$n=1.5, 2$ 及び 3 なる円筒が内面に水圧を受ける場合における内圧 p_i と内径の伸び ε_0 との関係を (1) 及び (2) に示す計算に依つて求むれば第 6 図に示す結果を得る。同図に比

較のため、曩に計算した「塑性域の体積は不変である」との假定を用いた結果及び中原博士⁽¹¹⁾の用ひられた略算法即ち「塑性域の断面積は不変である」との假定を用いて計算した結果を示して置いた。又円筒の内面に他の円筒又は円柱を力嵌めする場合における同様の関係を求むれば第 7 図に示す様になる。

これ等の図に依つて、何れの計算式に依るもその結果は大差ない事が解る。特に曩に述べた様な力嵌めに関する計算式を求むる場合には、「塑性域の体積は不変である」との假定を用いた計算は略算式として充分であると云ふ事が出来る。

4. 結 び

- (1) 一般塑性理論に用ふる条件を用ひて内圧を受ける円筒の一部分が塑性変形を起す場合の解を求めた。
- (2) この計算結果と中原博士の用ひられた略算法即ち「塑性域の断面積は不変である」との条件を用ひた計算結果とを例題に依つて比較したところ大差ない事が解つた。
- (3) 又この計算結果と曩に「塑性域の体積は不変である」との假定を用ひた計算結果とを例題に依つて比較したところ大差ない事が解つた。特に円筒が内側に他の円筒又は円柱を力嵌めされる場合には誤差が少いから、焼嵌め及び力嵌めの計算式に対しては実用上この略算式を用ひて差支無い事が解つた。

終りに本研究を行ふに當り御懇切な御指導を賜はつた大阪帝大の中原教授並に割切なる御助言を賜はつた鉄道大臣官房研究所の池田博士に対し厚く感謝の意を表す。又御激勵と御指導を賜はつた住友金属工業株式会社荒木専務取締役並に種々の御便宜を與へられた同社製鋼所の職員各位に対し厚く感謝の意を表す。

渦形室の差違に依る渦巻ポンプの特性及び 羽根車よりの流出状態の変化

(昭和 10 年 4 月 5 日 第 12 期定時總會講演會に於て講演)

正 員 葛 西 泰 二 郎⁽¹⁾

Variations of the Characteristics of the Centrifugal Pump and Flow Conditions at the Outlet of the Impeller due to the Difference of the Size of the Volute Chamber

By Taijirō KASAI, Member

1. 緒 言

渦巻ポンプの渦形室を設計するに際してその断面の大きさを決定するために試むべき算定の方法には、考へる基点を異にした 2 様式がある。即ちその 1 は渦形室内の流れの摩擦損失、曲り損失、該部に流入する流れとの間に起る衝突損失及び

出口における速度水頭の總和が最小となる如き条件からその大きさを定める方法で、その 2 は羽根車から出た流れは渦形室に到る迄自由渦巻運動をなすとし、その運動をなすに最も都合のよい断面の大きさを見出す方法である。前者は井口博士⁽²⁾等に依つて示され、後者の方法⁽³⁾は例へば K. Axel

(11) 前掲「新しき塑性理論」参照

(1) 九州帝国大学工学部

昭和 11 年 5 月]

(2) 井口集、191 頁

(3) 生源寺順博士、渦形室の計算及び設計に就て、工業雑誌、第 69 卷、第 872~875 号、昭和 8 年、8~11 月