曲 辺 多 角 形 断 面 柱 体 の 捩 り 應 力

(昭和 10 年 12 月 13 日 関西支部講演會に於て講演)

正 員 澤 田 正 雄⁽¹⁾

Torsion Stresses of a Rod having a Section of Curved-sided Polygon

By Masao SAWADA, Member

摘 要

基本連統方程式の調和解の 2 項を組合せて曲辺多角形の断面柱体の捩り應力を求めた。應力は主として外周上の値を吟味した。2 應力中 $z\theta$ の最大値は必ずしも曲辺の midpoint に存在しない。

1. は し が き

曩に「曲辺正多角形断面柱体の捩り應力」⁽²⁾ に就て概論した通り、極座標平面調和解の数項を採ると特殊な曲辺多角形断面柱体の捩り問題に應用出来る。茲では主として奇数又は偶数オーダーの 2 項を組合せて曲辺多角形の断面柱体を概論することとする。尤も断面は係数の正負及びその数値に依り特殊な曲辺 n 又は $2n$ 角形となる。

2. 理 論

今単位長さの捩り角度: τ , 剛性係数: G , 應力函数: Ψ , 捩り函数: $\phi = \frac{1}{2}(r^2 + \Psi)$ とおくと, ϕ は次の条件を満足すべきである。

$$\text{断面内 } r\partial_r(r\partial_r\phi) + \partial_\theta^2\phi = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{周辺上 } \phi = \frac{1}{2}(r^2 + C) \text{ 或は } \Psi = C \dots\dots\dots(1_1)$$

今 ϕ の代りに Ψ を次の通り考へる。

$$\begin{aligned} \Psi &= A(r^n \cos n\theta - a^n) + B(r^m \cos m\theta - a^m) - r^2 + a^2 \\ &= a^2[Aa^{n-2}(R^n \cos n\theta - 1) \\ &\quad + Ba^{m-2}(R^m \cos m\theta - 1) - R^2 + 1] \dots\dots\dots(1_2) \end{aligned}$$

茲に A 及び $B \equiv 0$, $m=2n$, $n=0$ 及び整数

$$C=0 \text{ 又は一定, } R=r/a$$

便宜上 $a=1$ と置く。断面周辺上では $\Psi = C$ であるから (1₂) 式から

$$\begin{aligned} Ar_b^n \cos n\theta + Br_b^{2n} \cos 2n\theta - r_b^2 \\ + 1 - A - B - C = 0 \dots\dots\dots(1_4) \end{aligned}$$

(1₄) 式を r_b 又は $\cos n\theta$ に就て解くと周辺形状は決定出

来る。一般に図形は $2n$ 角形である。只 $n=0$ は円形を又 $n=1$ は楕円形を與へる。 A 又は B が零ならば明らかに曲辺正多角形の場合となる。 $n=2$ 以上では A 及び B の数値及び正負に依り断面は曲辺正 n 又は $2n$ 角形或は單に曲辺 $2n$ 角形ともなる。

應力は 2 方向に対して

$$zr/\tau G = \frac{1}{2}\partial_\theta(\Psi/r), \quad z\theta/\tau G = -\frac{1}{2}\partial_r\Psi \dots\dots\dots(1_5), (1_6)$$

$$\therefore zr/\tau G = -\frac{1}{2}nr^{n-1} \sin n\theta(A + 4Br^n \cos n\theta) \dots\dots\dots(1_7)$$

$$z\theta/\tau G = (r^2 - \frac{1}{2}nAr^n \cos n\theta - nBr^{2n} \cos 2n\theta)/r \dots\dots\dots(1_8)$$

断面は極軸 ($\theta=0$) に対して対称的であり、又 $2n$ 曲辺から成立つてゐるから、 $\theta=0$ から $\theta=\pi/n$ 迄考へると宜しい。(1₇) 式から明らかな通り

$$[zr]_{\theta=0} \& \pi/n = 0, \quad [z\theta]_{r=0} = 0 \dots\dots\dots(1_9)$$

従つて $\theta=0$ と $\theta=\pi/n$ との間に $|zr|$ の最大値が存在する。普通に問題の断面に対しては周辺上の應力を吟味すると宜しい。この際寧ろ $z\theta$ が問題となる。 $z\theta$ は周辺上では (1₄) 式及び (1₈) 式から

$$\begin{aligned} z\theta/\tau G &= [\frac{1}{2}nAr_b^n \cos n\theta - (n-1)r_b^2 \\ &\quad + n(1-A-B-C)]/r_b \dots\dots\dots(1_{10}) \end{aligned}$$

然し $z\theta$ は必ずしも曲辺の midpoint で最大とはならない。

次にトルクは面倒乍ら図上積分に依らねばならない。

(i) 中実体の場合 但し $[\Psi]_{\text{外周}}=0$ と考へる。

$$Q = -\frac{1}{2}\tau G \int_0^{2\pi} \int_0^{r_b} r^2 \partial_r \Psi dr d\theta \dots\dots\dots(1_{11})$$

$$= 2n\tau G \int_0^{\pi/n} \int_0^{r_b} r \Psi dr d\theta$$

$$\begin{aligned} &= 2n\tau G \int_0^{\pi/n} \left[A \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2n+2} \right) r_b^{n+2} \cos n\theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{4} \right) r_b^4 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+2} \right) (1-A-B)r_b^2 \right] d\theta \dots\dots\dots(1_{12}) \end{aligned}$$

[第 2 卷 第 7 号]

(1) 大阪商船株式会社船舶課 (2) 機械学会論文集 第 1 卷第 1 号
昭和 10 年 2 月 (3) C. Weber, Fors. Arbeit Heft 249, 1921
 $\Psi = A_n r^n \cos n\theta + A_{2n} r^{2n} \cos 2n\theta + A_{3n} r^{3n} \cos 3n\theta + \dots + r^2$
と置いて正 n 角形で角隅に於て小さい丸味を持つ場合を解いてゐる。一般に (1₂)
式の様に $\Psi = \sum_m A_{mn} (r^{mn} \cos mn\theta - a^{mn}) - r^2 + a^2$ と置いて解くと便利
である。

(ii) 中空体の場合 但し $[\Psi]_{\text{外周}}=0$, $[\Psi]_{\text{内周}}=C$ と考へる。

$$Q = -\frac{1}{2}\tau G \int_0^{2\pi} \int_{r_a}^{r_b} r^2 \partial_r \Psi dr d\theta \dots\dots\dots (1_{13})$$

$$\begin{aligned} &= \tau G C S_{r_a} + 2n\tau G \int_0^{\pi/n} \int_{r_a}^{r_b} r \Psi dr d\theta \\ &= \tau G C S_{r_a} + 2n\tau G \int_0^{\pi/n} \left[A \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2n+2} \right) (r_b^{n+2} - r_a^{n+2}) + \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{4} \right) \cdot (r_b^4 - r_a^4) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2} \right) \cdot (1-A-B)(r_b^2 - r_a^2) - \frac{1}{2n+2} C r_a^2 \right] d\theta \dots\dots\dots (1_{14}) \end{aligned}$$

但し S_{r_a} は内周の面積
何れも $n=2$ の場合は注意を要する。

3. 例題

以上の理論に基づき二三の例題を挙げる。然し便宜上

$[\Psi]_{\text{外周}}=0$ と置くこととする。

(i) $n=1$ の場合

$$\begin{aligned} \Psi &= A(r \cos \theta - 1) + B(r^2 \cos 2\theta - 1) - r^2 + 1 \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

断面は楕円形であるが、断面の重心は必ずしも極心と一致しない。普通に $A=0$ と置いた場合の方が便利になる。

(ii) $n=2$ の場合

$$\Psi = A(r^2 \cos 2\theta - 1) + B(r^4 \cos 4\theta - 1) - r^2 + 1 \dots\dots\dots (2_1)$$

周辺迄の半径 r_b は次式から求める。

$$r_b^2 = [1 - A \cos 2\theta \pm \{(1 - A \cos 2\theta)^2 + 4(A+B-1)B \cos 4\theta\}^{1/2}] / 2B \cos 4\theta \dots\dots\dots (2_2)$$

[] 内の附号 $\pm$ は A 及び B の正負に依り適當なものを探る。勿論 $\{ \}^{1/2} \geq 0$ 且 $r_b^2 > 0$ なる様に A 及び B を選ばねばならない。

今係数を種々へて第1表の通り探る。第1図は曲辺菱形断面を示す。若し第2表の通りに A 或は B に負数を與へると第2図の様に曲辺菱形や曲辺矩形の断面が得られる。只 $A=0.2$, $B=0.4$ の場合と $A=-0.2$, $B=0.15$ の場合と昭和11年5月]

は殆ど類似形を與へる。

次に周辺應力として $A=B=0.2$ 及び $A=0.2$, $B=0.4$ の場合を示すと夫々第3図及び第4図の通りになる。何れも $z\theta$ は $|zr|$ より大きく、 $\theta=45^\circ$ 位で最大値に達することが解かる。

第1図 $n=2$ の断面

第2図

(iii) $n=3$ の場合

$$\begin{aligned} \Psi &= A(r^3 \cos 3\theta - 1) + B(r^6 \cos 6\theta - 1) - r^2 + 1 \dots\dots\dots (2_3) \end{aligned}$$

この際周辺迄の半径を直接求めることは困難であるから r_b を與へて θ を求めることとする。

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \left[-A/4B \pm \left\{ (A/4B)^2 + \frac{1}{2}(X^{2/3} + BX^2 - 1 + A+B)/B \right\}^{1/2} \right] / X \dots\dots\dots (2_4) \end{aligned}$$

但し $X=r_b^3$

例へば $A=0.4$, $B=0.2$ 及び $A=0.2$, $B=0.1$ の場合、

第3図 $n=2$, $A=B=0.2$ の場合

第4図 $n=2$, $A=0.2$, $B=0.4$ の場合

第5図 $n=3$ の断面

第1表

A	B
0.2	0.2
0.2	0.4
0.2	0.6

第2表

A	B
-0.2	0.15
0.2	-0.2
-0.2	-0.15

断面は第5図に示す通りに曲辺三角形と云ふよりも寧ろ六角形が得られる。第6図は $A=0.4$, $B=0.2$ の場合の周辺應力を示してゐる。 $z\theta$ は $\theta=45^\circ$ 又 $|zr|$ は $\theta=15^\circ$ 位の点で最大となるが、 $z\theta$ の方が大きい。

(iv) $n=6$ の場合

$$\begin{aligned} \Psi &= A(r^6 \cos 6\theta - 1) + B(r^{12} \cos 12\theta - 1) - r^2 + 1 \dots\dots\dots (2_6) \end{aligned}$$

この場合も (iii) と同様に r_b を與へて θ を求めると断面形は決定される。

但し $X=r_b^6$

$$\begin{aligned} \cos 6\theta &= \left[-A/4B \pm \left\{ (A/4B)^2 + \frac{1}{2}(X^{1/3} + BX^2 - 1 + A+B)/B \right\}^{1/2} \right] / X \dots\dots\dots (2_6) \end{aligned}$$

例へば $A=B=0.2$ と置くと断面は第7図、又周辺應力は第8図に示す通りになる。 $z\theta$ は $\theta=20^\circ$ 位、又 $|zr|$ は $\theta=7.5^\circ$ 位の点で最大となるが $z\theta$ の方が大きい。

(v) 等應力線を内周辺に持つ中空体の場合には次の条件に依ることは勿論である。

$$[\Psi]_{\text{外周}}=0, \quad [\Psi]_{\text{内周}}=C \dots\dots\dots (2_7)$$

第6図 $n=3$, $A=0.4$, $B=0.2$ の場合

第 7 圖

今曲辺矩形の場合として $n=2$, $A=-0.2$, $B=-0.15$ と置いて外周形を求め、更に $C=0.35$ と置いて内周形を求めると第 9 図の如き断面となる。両周辺上の應力は第 10 図に示す通り、 $z\theta$ は長辺中点で最大であり、 $|zr|$ は何れも小さい。

4. む す び

以上は單に調和解 2 個を組合して求めた断面に就て論じた

第 8 圖 $n=6$, $A=0.2$, $B=0.2$ の場合

第 9 圖

第 10 圖 $n=2$, $A=-0.2$, $B=-0.15$ の場合の周辺應力

が、更に多くの解を組合はすと種々な断面が得られるのは明らかである。

茲では主として周辺凹みの少い断面を取扱つてゐるから應力は單に周辺上の $z\theta$ の値を吟味すると宜しい。然しその最大値点は直辺多角形の場合とは異り、必ずしも曲辺の中点に存在しない。與へられた断面内の任意の剪断應力線を周辺に選ぶと種々な断面が得られる事は論をまたない。

(昭和 10 年 11 月 1 日)

滑かなる管内における乱流の研究 (第 2 報)

(昭和 10 年 10 月 17 日 名古屋臨時大會に於て講演)

正 員 山 本 純 如⁽¹⁾

Study of Turbulent Flow in Smooth Pipes (Report 2)

By Tsunayuki YAMAMOTO, Member

摘 要

滑かなる管内の乱流に於てレーノルド数が 100×10^3 以上なる場合の速度分布その他に就ては既に本誌⁽²⁾ に述べた。更にこれを擴張してレーノルド数の小なる場合にも適用し得る速度分布式を求め、これより理論的に速度変化、混合距離、平均速度及び抵抗を與へる式を算出して実験値と比較した。

1. 速 度 分 布

従来滑かなる管内の速度分布を表す式としては

- (1) ポテンシャル式……速度が管壁よりの距離の乗数に比例するとしたもの

$$u = ay^n \quad \dots\dots\dots (1)$$

y = 管壁よりの距離 u = y 点の速度
 a = 常数 n = 常数 = $1/6 \sim 1/10$

- (2) Prandtl の一般式

$$\frac{u}{c} = 5.5 + 5.75 \log \frac{cy}{\nu} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$c = \sqrt{\tau_0/\rho}$, τ_0 = 管壁における剪断力、 ρ = 流体の密度、 y = 管壁よりの距離、 ν = 流体の運動粘性係数

- (1) 式を書き換へれば次式を得る。

$$\frac{u}{c} = \frac{U_a}{c} (1 - Y)^n \quad \dots\dots\dots (3)$$

$U_a = ar^n$, r = 管の半径、 $Y = y/r$, y = 管の中心よりの距離

(1) 名古屋高等工業学校
 昭和 10 年 5 月、121 頁

(2) 機械学会論文集 第 1 巻 第 2 号、