粗い管内における乱流の研究⁽¹⁾

(昭和 11 年 11 月 9 日 福岡臨時大会講演會に於て講演)

正 員 山 本 純 如⁽²⁾

摘 要

粗い管及び滑かな管内の乱流に就てその速度変化が同一の方則に従てゐることを見出し、これを基として粗滑両管内の速度分布の異なる所以は單に両管内の最大速度の異なる点に存することを示し両管に共通なる速度分布の実験式を求めた。且粗い管内の最大速度は滑かな管内の最大速度そのものと粗度に関する項とより成ることを見出し、これより平均速度、抵抗等を與へる式を求めた。実験値としては Nikuradse⁽³⁾ の報告を取りこれと比較して上記の諸式が実験値とよく一致することを確め、粗い管内の流れにおける粘性と粗度との影響をある程度明かにすることが出来た。

1. 速度変化及び混合距離

前報⁽⁴⁾に於て滑かな管内における乱流の速度、速度変化、混合距離を與へる式を求めた。

$$\frac{u}{c} = \frac{U}{c} e^{-2n\phi} \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{du/c}{dY} = -2n \frac{U}{c} e^{-2n\phi} \frac{\sqrt{Y}}{1-Y^2} \dots\dots(2)$$

$$\frac{l}{r} = \frac{1}{2n(U/c)} e^{2n\phi} (1-Y^2) \dots\dots(3)$$

$$\phi = \tanh^{-1} \sqrt{Y} - \tanh^{-1} \sqrt{Y}$$

$$\frac{U}{c} = 5.4 + 5.8 \log \frac{cr}{\nu}$$

$$n = 0.218 - 0.023 \log \frac{cr}{\nu}$$

y は管の中心よりの距離、 u は y 点の速度、 c は $\sqrt{\tau_0/\rho}$ 、 τ_0 は管壁における剪断力、 ρ は流体の密度、 U は管内の最大速度、 r は管の半径、 Y は y/r 、 ν は流体の運動粘性係数、 l は混合距離である。

第 1 図及び第 2 図は速度変化 $d(u/c)/dY$ 及び混合距離 l/r と $(cr)/\nu$ の関係を示す。図中の各点は滑かな管及び種々の粗度 r/k に対する Nikuradse の実験値を示す。 k は管壁より突出した粗面の高さである。図中の実線は (2) 及び (3) 式よりの計算値を表す。図に於て見る様に粗度の如何に拘らず計算値と実験値とは甚よく一致してゐる。これより次のことが解る。

(a) 速度変化及び混合距離を與へる $d(u/c)/dY$ 及び l/r は粗度に無関係に粘性に関する $(cr)/\nu$ のみにより定まり同一の $(cr)/\nu$ に対しては同値となる。

(b) $Y=0$ 即ち管の中心の l/r の値は (3) 式より $\frac{1}{2n(U/c)}$ となるから $n(U/c)$ は l/r と同様粗度に無関係に粘性にのみ関係する。

(c) $d(u/c)/dY$, l/r 及び $n(U/c)$ の値は $\log(cr+\nu)$ が 3.5

第 1 図 $\log \frac{d(u/c)}{dY}$ と $\log \frac{cr}{\nu}$ との関係

以上になれば殆ど一定の値となる。

即ち滑かな管に対する量に S なる符号を附すれば

$$\left\{ \frac{d(u/c)}{dY} \right\}_s = \frac{d(u/c)}{dY}, \quad \left(\frac{l}{r} \right)_s = \frac{l}{r}, \quad \left(\frac{nU}{c} \right)_s = \frac{nU}{c}$$

(2) 式を変形して

$$\begin{aligned} \frac{d(u/c)}{dY} &= -2n \frac{U}{c} e^{-2n\phi} \frac{\sqrt{Y}}{1-Y^2} \\ &= -2n \frac{U}{c} (1 - 2n\phi + 2n^2\phi^2 + \dots) \frac{\sqrt{Y}}{1-Y^2} \end{aligned}$$

[第 3 卷 第 11 号]

(1) Study of Turbulent Flow in Rough Pipes. (2) Tuna-yuki YAMAMOTO, Member, The Nagoya Technical College. 名古屋高等工業学校。

(3) J. Nikuradse, Strömungsgesetze in rauhen Rohren, Forochungheft 361, 1933. (4) 機械学会論文集、第 2 卷、第 7 号、昭和 11 年 5 月 266 頁。

第2図 $\frac{l}{r}$ と $\log \frac{cr}{\nu}$ との関係

$$\cong -2n \frac{U}{c} (1-2m\phi) \frac{\sqrt{Y}}{1-Y^2} \dots\dots\dots (4)$$

$m = \text{恒数}$

又 (3) 式より同様にして

$$\frac{l}{r} \cong \frac{1}{2n(U/c)} (1+2m\phi)(1-Y^2)$$

なる式を得る。

2. 速度分布及び最大速度

(4) 式より $d\phi/dY = \sqrt{Y}/(1-Y^2)$ であるから

$$\frac{u}{c} = \frac{U}{c} - 2n \frac{U}{c} (\phi - m\phi^2)$$

$$\text{或は } \frac{U-u}{c} = 2n \frac{U}{c} (\phi - m\phi^2) \dots\dots\dots (5)$$

第3図は $m=0.17$ として (5) 式より計算した曲線を示す。 $n(U/c)$ の値は粗滑両管に対して同一であるから上記の滑かな管に対する n 及び U/c の実験式よりの計算値を取った。各点は実験値である。大約実験値と一致する。即ち $(U-u)/c$ は粗度に無関係に粘性に関する $(cr)/\nu$ のみにより定まり同一の $(cr)/\nu$ に対しては同じ値となる。即ち

第4図 $\frac{cr}{\nu}$ が略同一なる管内の速度分布

昭和12年5月]

$$\left(\frac{U-u}{c} \right)_s = \frac{U-u}{c}$$

従って同一の $(cr)/\nu$ に対する速度分布曲線は粗度には無関係に同じ形となりたゞ曲線の高さのみが異なる。この曲線の高さはその管の最大速度 U/c の大きさに依て定まる。第4図の各点は $(cr)/\nu$ が略同一なる管内の速度 u/c の実験値を示し実験線は (5) 式の曲線を表す。各曲線は同じ形で高さのみが U/c の大きさにより異なる。

管内の最大速度 U/c は第5図の様に粗度に依て異なる。

滑かな管内の最大速度は上記の様に

$$\left(\frac{U}{c} \right)_s = a_1 + b_1 \log \frac{cr}{\nu} = 5.4 + 5.8 \log \frac{cr}{\nu} \dots\dots\dots (6)$$

今 (6) 式による $(U/c)_s$ の計算値と U/c の実験値との差を求めると第6図の様にこの間に一定の関係の存することを知る。これを図に示す様に4本の直線に依て表されるものとするれば各直線は次の形で表される。これは粗度の影響を示す式

第3図 $\frac{U-u}{c}$ と $\log \frac{cr}{\nu}$ との関係 第5図 $\frac{U}{c}$ と $\log \frac{cr}{\nu}$ との関係

である。

$$\left(\frac{U}{c}\right)_s - \frac{U}{c} = a' + b' \log \frac{ck}{\nu} \quad \dots\dots\dots(7)$$

(6) 及び (7) 式より

$$\begin{aligned} \frac{U}{c} &= \left(\frac{U}{c}\right)_s - \left(a' + b' \log \frac{ck}{\nu}\right) \\ &= \underbrace{\left(a_1 + b_1 \log \frac{cr}{\nu}\right)}_A - \underbrace{\left(a' + b' \log \frac{ck}{\nu}\right)}_B \quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

即ち粗い管内の最大速度 U/c は滑かな管の最大速度 $(U/c)_s$ を表す A なる部分と粗度の影響を表す B なる部分とより成立つてゐる。

(I) の場合には $a' = b' = 0$ となり

$$\frac{U}{c} = \left(\frac{U}{c}\right)_s$$

即ち粗度 k の値が少く $\log(ck/\nu)$ が 0.55 以下の場合は粗さの影響はなくなり粗滑両管の最大速度は同じ大さとなる。

(IV) の場合には

第 6 図 $\left(\frac{U}{c}\right)_s - \frac{U}{c}$ と $\log \frac{ck}{\nu}$ との関係

第 7 図 $\left(\frac{u}{c}\right)_s - \frac{u}{c}$ と $\log \frac{ck}{\nu}$ との関係

a' 及び b' の値

	$\log \frac{ck}{\nu}$	a'	b'
(I)	0.00~0.55	0.000	0.000
(II)	0.55~1.00	-1.956	3.556
(III)	1.00~1.80	-5.560	7.130
(IV)	>1.80	-3.000	5.800

$$\begin{aligned} \frac{U}{c} &= \left(\frac{U}{c}\right)_s - (-3.0 + 5.8 \log \frac{ck}{\nu}) \\ &= (5.4 + 5.8 \log \frac{cr}{\nu}) \\ &\quad - (-3.0 + 5.8 \log \frac{ck}{\nu}) \\ &= 8.4 + 5.8 \log \frac{r}{k} \end{aligned}$$

即ち粗度 k の値が大きくなり $\log(ck/\nu)$

が 1.8 を越へる場合には $b_1 = b'$ となりそのため粘性の影響はなくなり單に粗度のみが影響することが解る。

第 5 図に (6) 及び (7) 式を用ひて (8) 式を計算して得た U/c の計算値を記入した。図に於て $\log(cr/\nu)$ の値が大い場合に U/c の値が一定となるのは上記の様に粘性従て $(cr)/\nu$ の影響がなくなり粗度のみが影響するためである。

3. 平均速度及び抵抗

(4) 式を用ひて管内の平均速度 $\bar{u}/c$ を求めるに

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{c} &= 2 \int_0^1 \frac{u}{c} Y dY = 2 \frac{U}{c} \int_0^1 (1 - 2n\phi \\ &\quad + 2nm\phi^2) Y dY \\ &= \frac{U}{c} - n \frac{U}{c} \left(\frac{4}{3} - 1.492m \right) \end{aligned}$$

滑かな管内の平均速度 $(\bar{u}/c)_s$ は同様にして

$$\left(\frac{\bar{u}}{c}\right)_s = \left(\frac{U}{c}\right)_s - \left(n \frac{U}{c}\right)_s \left(\frac{4}{3} - 1.492m \right)$$

然るに前述の様に同一の (cr/ν) に対しては

$$n \frac{U}{c} = \left(n \frac{U}{c}\right)_s$$

故に

$$\left(\frac{\bar{u}}{c}\right)_s - \frac{\bar{u}}{c} = \left(\frac{U}{c}\right)_s - \frac{U}{c} = a' + b' \log \frac{ck}{\nu} \quad \dots\dots\dots(9)$$

即ち粗滑両管の平均速度の差 $(\bar{u}/c)_s - (\bar{u}/c)$ は両管の最大速度の差 $(U/c)_s - U/c$ と全く同一の関係が成立つ。

前報⁽⁵⁾に於て滑かな管内の $(\bar{u}/c)_s$ が次式で與へられることを述べた。即ち

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{u}}{c}\right)_s &= 2.0 + 5.656 \log \frac{cr}{\nu} \\ &= a_2 + b_2 \log \frac{cr}{\nu} \quad \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

第 7 図の各点は (10) 式より計算した $(\bar{u}/c)_s$ と $\bar{u}/c$ の実験値との差を示す。図中の実線は (9) 式を表し、 $(U/c)_s - U/c$ を示す第 5 図の直線と全く同一の直線である。図に於て見る様に (9) 式の関係は実験値とよく一致する。

$\log(cr/\nu)$ が 1.8 以上の場合の関係を第 6 図の点線で示す直線であるとすれば次式となる。

(5) 脚註 (4)。

$$\left(\frac{\bar{u}}{c}\right)_s - \frac{\bar{u}}{c} = -2.95 + 5.656 \log \frac{cK}{\nu} \quad \dots\dots\dots(11)$$

この (11) 式及び (10) 式を用いて $\bar{u}/c$ を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{c} &= \left(\frac{\bar{u}}{c}\right)_s - \left(-2.95 + 5.656 \log \frac{cK}{\nu}\right) \\ &= \left(2.0 + 5.656 \log \frac{cK}{\nu}\right) - \left(-2.95 + 5.656 \log \frac{cK}{\nu}\right) \\ &= 4.95 + 5.656 \log \frac{r}{\kappa} \end{aligned}$$

即ち U/c と同様 $\bar{u}/c$ も亦 $\log(cr/\nu)$ が 1.8 以上になれば粘性の影響はなくなり粗度のみが影響することが解る。

次に抵抗に就ては管内の圧力降下は周知の様式で與えられる。

$$\frac{dp}{dx} = \lambda \frac{\rho \bar{u}^2}{2d} \quad d=2r$$

この λ に関しては前報に述べた様に次の関係がある。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{\bar{u}}{c} \\ \text{故に } \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)_s - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= \frac{1}{\sqrt{8}} \left\{ \left(\frac{\bar{u}}{c}\right)_s - \frac{\bar{u}}{c} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \left(a' + b' \log \frac{cK}{\nu} \right) \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

前報に於て滑かな管内では

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)_s &= 0.707 \cdot 1 + 2 \log \frac{cr}{\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} (a_3 + b_3 \log \frac{cr}{\nu}) \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

なる式が成立することを述べた。

第 8 図の各点は (13) 式より計算した $(1/\sqrt{\lambda})_s$ と $1/\sqrt{\lambda}$ の実験値との差を示す。図中の実線は (12) 式の直線を表す。点線は第 7 図の点線に相應するもので (11) 式を用いて求めたものである。 $\log(cr/\nu)$ が 1.8 以上となれば粘性の影響はなくなり粗度のみが影響する。

4. 粘性、粗度及び境界層

上述の様に最大速度、平均速度及び抵抗は共に

$$\begin{aligned} \left(\frac{U}{c}\right)_s - \frac{U}{c} &= \left(\frac{\bar{u}}{c}\right)_s - \frac{\bar{u}}{c} = \sqrt{8} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)_s - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right\} \\ &= a' + b' \log \frac{cK}{\nu} \end{aligned}$$

なる形で表され、且滑かな管に対する $(U/c)_s$, $(\bar{u}/c)_s$, $\sqrt{8}(1/\sqrt{\lambda})_s$ は共に $a + b \log(cr/\nu)$ の形で表される。故に粗い管に対する U/c , $\bar{u}/c$, $\sqrt{8}(1/\lambda)$ は共に次の形で表される。

$$\underbrace{\left(a + b \log \frac{cr}{\nu}\right)}_A - \underbrace{\left(a' + b' \log \frac{cK}{\nu}\right)}_B \quad \dots\dots\dots(14)$$

Prandtl 及び Kármán 氏により管壁に接して存在する境界層の厚さ δ は

昭和 12 年 5 月]

$$\delta \propto \nu/c$$

なる関係があることが知られてゐる。故に (14) 式は又次の様な形で表すことが出来る。

$$\underbrace{\left(\alpha + \beta \log \frac{r}{\delta}\right)}_A - \underbrace{\left(\alpha' + \beta' \log \frac{\kappa}{\delta}\right)}_B \quad \dots\dots\dots(15)$$

A はその管が滑かである場合の値を表し、これには管の半径と境界層の厚さの比が関係する。 B は管の粗度の影響を表し、これには管の粗度と境界の厚さの比が関係することが解る。

cr/ν 又は r/δ は粘性に関係し cK/ν 又は κ/δ は粗度と粘性に関係する量である。且上述した所から次のことが解る。

(a) $\log(cK/\nu)$ が 0.55 以下の場合には κ/δ に関する B は零となり従て粗度には無関係となり粘性のみが影響し滑かな管と全く同一の状態となる。

(b) $\log(cK/\nu)$ が 0.55 より 1.80 の間にある場合には $A+B$ の形を取り粘性及び粗度の影響を受ける。

(c) $\log(cK/\nu)$ が 1.80 以上になれば $b=b'$ 或は $\beta=\beta'$ となり

$$\begin{aligned} &(\alpha - \alpha') + \beta \left(\log \frac{r}{\delta} - \log \frac{\kappa}{\delta} \right) \\ &= (\alpha - \alpha') + \beta \log \frac{r}{\kappa} \end{aligned}$$

の形となり粗度の影響は全く無くなり粗度 r/κ のみの影響を受ける。

第 8 図 $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)_s - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ と $\log \frac{cK}{\nu}$ との関係

5. 総括

(1) 粗滑両管内の速度変化及び混合距離は次式で表される。

$$\frac{d(u/c)}{dY} = -2\pi \frac{U}{c} e^{-2m\phi} \frac{\sqrt{Y}}{1-Y^2} \cong -2\pi \frac{U}{c} (1-2m\phi) \frac{\sqrt{Y}}{1-Y^2}$$

$$\frac{l}{r} = \frac{1}{2\pi(U/c)} e^{2m\phi} (1-Y^2) \cong \frac{1}{2\pi(U/c)} (1+2m\phi)(1-Y^2)$$

$$\phi = \tanh^{-1} \sqrt{Y} - \tan^{-1} \sqrt{Y}$$

同一の $(cr)/\nu$ に対しては粗度に関係なく $d(u/c)/dY$, l/r 及び $n(U/c)$ は同じ値となる。即ち

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d(u/c)}{dY} \right\}_s &= \frac{d(u/c)}{dY}, & \left(\frac{l}{r} \right)_s &= \frac{l}{r} \\ \left(\frac{U}{c} \right)_s &= \frac{U}{c} \end{aligned}$$

(2) $d(u/c)/dY$ の式より次の速度分布式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{u}{c} &= \frac{U}{c} - 2\pi \frac{U}{c} (\phi - m\phi^2) \\ m &= 0.17 \end{aligned}$$

同一の $(cr)/\nu$ に対しては粗度に関係なく $(U-u)/c$ は同じ値となる。即ち

$$\left(\frac{U-u}{c} \right)_s = \frac{U-u}{c}$$

従て同一の $(cr)/\nu$ に対する速度分布曲線は粗度に無関係に同じ形になりたゞ高さのみが異り、この高さはその管の最大速度 U/c の大きさに依て定まる。

(3) 同一の $(cr)/\nu$ に対する最大速度、平均速度及び λ に関しては次の関係がある。

$$\left(\frac{U}{c}\right)_s - \frac{U}{c} = \left(\frac{\bar{u}}{c}\right)_s - \frac{\bar{u}}{c} = \sqrt{8} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)_s - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

$$= a' + b' \log \frac{cK}{\nu}$$

これは粗い管に対する粗度の影響を表してゐる。

(4) 粗い管の U/c , $\bar{u}/c$ 及び $\sqrt{8/\lambda}$ は、次の形になつてゐる。

$$\left(a + b \log \frac{cr}{\nu}\right) - \left(a' + b' \log \frac{cK}{\nu}\right)$$

$$\text{或は} \quad \left(\alpha + \beta \log \frac{r}{\delta}\right) - \left(\alpha' + \beta' \log \frac{K}{\delta}\right)$$

δ = 境界層の厚さ

第 1 項はその管が滑かな場合の値で第 2 項はその管の粗度の影響を表してゐる。

$\log(cr/\nu)$ が 0.55 以下の場合には第 2 項は零となり粗度の影響なく滑かな管と全く同一の値となる。

$\log(cr/\nu)$ が 1.80 以上になれば $\beta = \beta'$ となり $(\alpha - \alpha') + \beta \log(r/K)$ なる形となり粘性の影響がなくなり粗度のみが影響する。

三角堰の切欠板を ラップ 接目にした際の内側突出の影響⁽¹⁾

(昭和 11 年 11 月 28 日 応用力学講演會に於て講演)

正 員 沼 知 福 三 郎⁽²⁾ 正 員 黒 川 恒 勝⁽³⁾ 准 員 遠 田 榮 次 郎⁽⁴⁾

摘 要

三角堰の切欠板は鉄板で造り、切欠きの部分のみ真鍮板で造り、これを ラップ 接手にして造ると切欠板の内側面は滑かな平面とはならず、その真鍮部の厚さだけ突出することになる。かゝる構造は目下工場に於て相當用びられてゐる実状からして、水量測定規格測定委員會で問題となつた。依てかゝる切欠きが現行本會規格規定の切欠きに対して流量係数 C が何程異なるかを実験的に吟味してみた。その結果、二者の差は殆ど問題にならぬ位僅かであるが、この切欠きの方が C の値にして 0.7-0.8% 位大きくなることが解つた。

1. 緒 言

三角堰により水量の測定をする場合には、嚴密な自家検定の結果に依る方法と、落差を測定して公式に依り流量を算出する方法とある。後者のうち直角三角堰に関して、現行機械學會 ポンプ 試験規格第 27 条或は J.E.S 日本標準規格第 162 号類別 B 41 第 13 条 (4) には次の様に定めてある。即ち「堰板ノ内面ハ、成ルベク平面ニシテ水流ヲ乱ス如キ突起物ヲ有セズ、特ニ切欠ノ縁ヨリ 10 cm ノ間ハ滑ナル平面トナス事」とある。依て第 1 図における SS 断面は同図 A の様にせよと云ふのである。

然るに水量測定規格制定委員が、昭和 10 年 6 月 22 日-23 日数個の工場における現状を視察した際に、用ひられてゐる直角三角堰は上記第 1 図 A の様な構造のものよりは、B の様なものが極めて多いのを認めた。即ち B に於て切欠きのみ巾狭き真鍮の板金で製作し、これを ラップ 接目 にして堰板に張りつけてあるので、「堰板ノ内側ハ滑ナル平面」ではなく

切欠きに近く不連続的に突出してゐる(著しいのはボルト或はリベットの頭が堰板内側に突出併列してゐるものもあつた)。

かゝる構造は明かに上記の現行規格には反する処であるが、かゝるものゝ多いと云ふ実状は、全く切欠部製作上の便利から来てゐるものであるから、新規規格制定に當り、かゝる構造(ボルトやリベットの頭は論外とするも、ラップ接目に依る第 1 図 B の様な突出)を一概に禁じてしまふ前に、先づ

これが流量係数に及ぼす影響の程度を吟味して、場合に依てはかゝる製作も許容することにしては如何と云ふ議が纏つた。依て委員の 1 人である筆者(沼知)が、この実験を行つた次第である。

第 1 図 三角堰並に切欠き 2 種

2. 切欠き

東北帝国大学工学部水力実験室階上に設備せられてあつた三角堰の切欠きは、第 2 図の様な直角三角 (90° 2.8' の実測値を得た) のもので唯上端水平部巾が少し廣かつた。

[第 3 卷 第 11 号]

(1) Einfluss der durch Überlappungsherstellung bewirkten stromwärts un stetig hervorragenden Fläche der Wehrrante eines rechtwinklig-dreieckigen Wehrs auf die Durchflusszahl.

(2) Fukusaburo NUMACHI, Mitglied. Tōhoku Kaiserl. Univ., Sendai. 東北帝国大学。

(3) Tunekatu KUROKAWA, Mitglied. Tōhoku Kaiserl. Univ., Sendai. 東北帝国大学。

(4) Eijiro Tota, Korresp Mitglied. Hansin-Tekkosho, Kōbe. 阪神鉄工所。