計算尺の一使用法に就て⁽¹⁾

(昭和 12 年 5 月 26 日 第 311 回講演會に於て講演)

准 員 久 保 俊 郎⁽²⁾

摘 要

普通の筆算では、掛算は一方の数を 1 桁づゝ掛け、その結果を加へるのである。この時一方の数を 2 桁或は 3 桁づゝ掛けられると、一層よいとは言ふまでもないが、我々は九々算の外暗記してをらぬためもあつて、普通一般の頭脳では簡単には行ひ難い。然るに計算尺の助けを借りると、それが容易に行へる様になる。又割算或は開平であれば、その商或は平方根を 2~3 桁づゝ求めることが出来る。この様にして従来数桁の数の計算の外用ゐられなかつた計算尺を多数桁の数の精密な計算にも應用しようと言ふ訳である。

1. 緒 言

或る数値を示す数字の列の内、或る一つの数字が何の位にあるかを言ふに、大体二通りあるが、こゝでは専ら 10^x の位にあると言ふ。

次に文字を書き列べて示されるもの、例へば $F_x, F_{x-1}, F_{x-2}, \dots$ はその各文字が夫々一つの数字を示し、それ等の列に依て或る一つの数を表す。而して文字の添数はその文字の示す数字が記されてゐる位を表す。即ち $F_x, F_{x-1}, \dots$ は夫々その数における $10^x, 10^{x-1}, \dots$ の位の数字である。以後積を表すには間違ひのない様にて (×) なる記号を用ゐる。

或る数 $F_x F_{x-1} F_{x-2}, \dots$ は $F_x F_{x-1} F_{x-2}, \dots \times 10^x$ とも表されるが、この数の最も左端の位が 10^x の位である所から、これを 10^x の位代の数であると言ふ。但し F_x は 0 以外の数字とする。従て 10^x の位代の数と言へば、大体その大いさが知れる。又その常用対数の整数部を示す指標が x なることを表す。

今こゝに夫々 10^p 及び 10^q の位代の数 P 及び Q がありこの 2 数の積を計算尺で求めるには、 C 尺の 1 又は 10 を D 尺の P なる読み合せ、 C 尺の Q なる読みに対する D 尺の読みに依て得られる。而してその積は C 尺の 1 を合せた場合は 10^{p+q} の位代の数となり、10 を合せた場合は 10^{p+q+1} の位代の数となる。

又 $P \div Q$ なる商を求めるには、 D 尺の P なる読みを C 尺の Q なる読みを合せ、 C 尺の 1 又は 10 に対する D 尺の読みに依て得られる。而してその商は C 尺の 1 に対する読みに依て得た場合は 10^{p-q} の位代の数となり、10 に対する読みに依て得た場合は 10^{p-q-1} の位代の数となる。

次に R なる 10^r の位代の数を開平するには、 r が偶数か否かに依て、夫々 A 尺の 1 より 10, 10 より 100 の間における R なる読みに対する D 尺の読みに依て得られる。而してその平方根は前者の場合は $10^{1/2 \times r}$ の位代の数となり、後者の場合は $10^{1/2 \times (r-1)}$ の位代と数となる。

以上述べた中における x, p, q, r は任意の整数で、正又は負の何れを取つてもよい。

2. 第 1 方法

二つの整数の積における或る位の数字を知るには、一方の数におけるその位及び以下の数字により示される数に、他方の数を掛ければ十分である。

今こゝに 10^N 及び 10^n の位代の整数 Y 及び y があり、夫々次の様な数字の列により示されると、

$$Y = F_N F_{N-1} F_{N-2} \dots F_2 F_1 F_0$$

$$y = f_n f_{n-1} f_{n-2} \dots f_2 f_1 f_0$$

これ等 2 数の積は Y を 10^x の位以上の数字と 10^x の位及び以下の数字とに分けることにより、

$$Y \times y = F_N F_{N-1} \dots F_{x+1} \times y \times 10^{x+1} + F_x F_{x-1} \dots F_1 F_0 \times y$$

となり、その第 1 項は y が整数であるから、 10^x の位及び以下は 0 である。それ故その積における 10^x の位或はそれ以下の数字を知りたい場合には、第 2 項、即ち Y の 10^x の位及び以下の数字により示される数に y を掛けた値 T_x を求めればよい。

$$T_x = F_x F_{x-1} F_{x-2} \dots \times y$$

さうすればその T_x の 10^x の位及び以下の数字が夫々積における 10^x の位及び以下の数字を示す。

この様に T_x を求め、直ちに積の 10^x の位の数字を知り、或はそれ以下の数字をも知るのを第 1 方法と名附ける。

今この T_x の 10^x の位の数字を各位に就て求めると、積の数字が一つづゝ解るから、それ等を順次書き列べることにより積は完全に求められる。この時積は高位或は低位の何れから求めて行つてもよい。

今そのために計算尺を用ゐると、 T_x の 10^x の位の数字は割合簡単に知れる。この時所要の数字には絶対に誤りがあつてはならぬ。そのためには、

$$T_x < K \times 10^x$$

でなければならぬ。こゝに K は計算尺及びその使用の精度に依て決り、又積を高位より求めるか、低位より求めるかに依ても異なる値である。従てこれの行はれるのは次の様な場合である。

(1) Application of Slide Rule.

(2) Toshio Kubo, Associate Member.

$$y < \frac{1}{10} \times K$$

であれば、 Y の如何に係らず行はれ、 $y > \frac{1}{10} \times K$ でも、

$$F_x F_{x-1} F_{x-2} \dots < \frac{K}{y} \times 10^x$$

であれば、積の 10^x の位の数字は求まる。それ故 x が 0 より N までの総ての位に就てこの関係があるならば、積は完全に求められる。従てこの場合には Y にも条件が這入つて来る。即ち Y は或る限られた数字より成立つてをらねばならぬ。

尚 K の値は後に詳細に述べるが、大体次の様になる。 T_x が計算尺で 10^x の位の数字まで誤りなく求まるためには、先づ計算尺でその値が 10^x の位の数字まで確実に読み取れねばならぬ。然し計算尺で如何なる数までは何の位まで確実に読み取れるかは一様には決め難いが、1 なる変化の目盛のある所ではその目盛の位までは十分確実に読み取れるから、今用ゐる計算尺に於て、左側に 1 の変化の目盛のある最大なる読みを b とすると、 b なる数まではその 1 の位の数字は確実に読み取れ、従て $b \times 10^x$ なる数まではその 10^x の位の数字は確実に読み取れる。それ故 T_x は $b \times 10^x$ より大にならぬ様にすればよい訳である。依て K の値は標準として b に取る。尚 b の値であるが、これは普通 C, D 尺に於て、5 in の計算尺では 100, 10 in では 200, 20 in では 500 となつてゐる。

然しこの様な条件に適つても次の様なことがなければ、 T_x の 10^x の位の数字は常に確実に読み取れるとは言へない。例へば T_x の 10^{x-1} の位の数字が 0 とか、9 の様な場合には、読みが目盛の附近に来て、はたして目盛の左の数か右の数か判別出来ない様なことが起る。それが右なるか左なるかに依て T_x の 10^x の位の数字は 1 増減する。従てその数字は確実に読み取れぬことになる。然し T_x の 10^{x-1} の位の数字、即ち積の 10^{x-1} の位の数字が解つてをれば、その様な困難の起ることはない。即ちそれが 0 か、0 に近い場合は大きい方の数字を取り、それが 9 か、9 に近い場合は小さい方の数字を取ればよい訳である。それ故積は普通の筆算における様に低位より求めて行く方が都合がよい。若し高位より求めて行くならば、確実に判別出来ない数字の出た時は、次の数字を求め、前の数字を確定し、それでも尚判別出来ない時はその次の数字を求め、前の数字を確定すると言ふ風にしなければならぬ。

尚この T_x を 10^x で割ると、その 10^x の位は 1 の位となるから、 T_x の 10^x の位の数字は、

$$P_x = F_x F_{x-1} F_{x-2} \dots \times y$$

この P_x なる値の 1 の位の数字であると考へると解りよい。

$$\text{例} \quad 80646 \times 17$$

これは 10 in の計算尺でも行はれる、こゝでは低位より求めて行くこととする。その過程は次の様になる。

$$\begin{array}{rclcl} T_0 = 6 & \times 17 \times 1 & = 102 & \times 1 & \dots\dots\dots 2 \\ T_1 = 4 \cdot 6 & \times 17 \times 10 & = 78 \cdot & \times 10 & \dots\dots\dots 82 \\ T_2 = 6 \cdot 46 & \times 17 \times 10^2 & = 109 \cdot & \times 10^2 & \dots\dots\dots 982 \end{array}$$

$$T_3 = 0 \cdot 64 - \times 17 \times 10^3 = 10 \cdot - \times 10^3 \dots\dots\dots 0982$$

$$T_4 = 8 \cdot 06 - \times 17 \times 10^4 = 137 \cdot - \times 10^4 \dots\dots\dots 1370982$$

1 及び 10 の位は問題なく求まる。次に T_2 は 110 の境に来るが、その 4 桁目は前に求められてをり、8 であるから、この場合 109- とあるべきである。この読みに依て 10^2 及び 10^3 の位の二つの数字が求まる。次の T_4 も 137 の境に来るが、その 4 桁目は 0 であるから、この場合は 137- である。この最後は全部読み取つておく。

$$\text{例} \quad 451342 \times 38$$

これは y が 20 より大であるが、 Y の値の如何に依ては 10 in の計算尺でも行はれる。即ち総ての位に就て次の関係が成立てば行へる。

$$F_x F_{x-1} F_{x-2} \dots < 5 \cdot 26 - \times 10^x$$

換言すれば Y の数字の総てが 5 より小さいか、5 でその右隣が 2 より小さい場合には行はれる。従てこの例は行はれる。

尚 T_x は計算尺で 10^x の位以下の数字まで解る場合もある。その様な時はそれ等も積の数字を示すのであるから、それ等に依て積の数字を同時に解るだけ求める様にしてもよい。一般に T_x が 10^x の位の数字まで解るのは、

$$T_x < K \times 10^x$$

なる時である。

この様に積の数字を同時に幾つか求めるには、積を低位より求めて行く場合は、一般には何の位の数字が同時求まるかを予め調べておく必要があるし、却て能率を下げる位で、有利ではない。然し積を高位より求めて行く場合は、計算の途中で T_x が 10^x の位以下の数字まで誤りなく解つたなら、それをも読み取ればよいのであつて、少しも手数を要しないから、さうすべきは言ふまでもない。

$$\text{例} \quad 6283264 \times 7$$

これを 10 in の計算尺で高位より求めて行くこととする。

$$T_6 = 6 \cdot 28 - \times 7 \times 10^6 = 44 \cdot_0 \times 10^6 \dots\dots\dots 44_0$$

$$T_5 = 2 \cdot 83 - \times 7 \times 10^5 = 19 \cdot 8_0 \times 10^5 \dots\dots\dots 4398_0$$

$$T_3 = 3 \cdot 26 \times 7 \times 10^3 = 22 \cdot_8 \times 10^3 \dots\dots\dots 43982_8$$

$$T_2 = 2 \cdot 64 \times 7 \times 10^2 = 18 \cdot 4_8 \times 10^2 \dots\dots\dots 4398284$$

$$T_0 = 4 \times 7 \times 1 = 28 \times 1 \dots\dots\dots 43982848$$

高位より求める場合は T_x は目分量で読み得るまで読み取つておく。先づ T_6 の読みは 44 の境となるから、今 440- となると仮定して計算して行くと、 10^6 の位の数字は 9 となる。従て 439- とあるべきであつた。この場合 T_6 に依て 10^4 の位の数字も解るから、 T_4 は抜き、次は T_3 を求めればよい。この様に順次求めて行く。

3. 第 2 方法

前述の様に二つの整数 Y, y の積における 10^x の位或はそれ以下の数字を知るには T_x を求めればよい。

$$T_x = F_x F_{x-1} F_{x-2} \dots \times y$$

これを更に分解すると、

$$T_x = F_x \times y \times 10^x + F_{x-1} F_{x-2} F_{x-3} \dots \times y$$

となり、その第1項は y を1の位の数字とそれ以外の数字とに分けると、

$$F_x \times y \times 10^x = F_x \times f_n f_{n-1} \dots f_1 \times 10^{x+1} + F_x \times f_0 \times 10^x$$

となるから、その項における y は1の位の数字以外 10^x の位及び以下の数字には影響しない。而して第2項は第1方法で積の 10^{x-1} の位或はそれ以下の数字を知るに就ての T_{x-1} である。それ故結局次の T'_x なる値を求めればよいことになる。

$$T'_x = T_{x-1} + F_x \times f_0 \times 10^x$$

換言すれば、

$$T_{x-1} = F_{x-1} F_{x-2} F_{x-3} \dots \times y$$

この T_{x-1} なる値に於て 10^x の位の所に、

$$U_x = F_x \times f_0$$

この U_x なる値の1の位の数字を加へればよいのである。それ故その U_x の1の位の数字に T_{x-1} の 10^x の位の数字を加へれば、その値の1の位の数字が積の 10^x の位の数字であり、又 T_{x-1} におけるそれ以下の数字は、その儘積の 10^x の位以下の数字である。

この様に U_x と T_{x-1} とを求め、積の 10^x の位の数字を知り、或はそれ以下の数字をも知るのを第2方法と名附ける。

今各位に就てこの U_x の1の位の数字と T_{x-1} の 10^x の位の数字との和を求めると、積の各位の数字が解るから、その積は完全に求めることが出来る。この場合にも積は高位或は低位の何れから求めてもよい。こゝで U_x の1の位の数字は暗算で求め、 T_{x-1} の 10^x の位の数字を計算尺で求める。この時所要の数字が誤りなく求まるためには、

$$T_{x-1} < K \times 10^x$$

であればよい。従て次の様な場合にこの方法が行はれる。

$$y < K$$

であれば、 Y の如何に係らず行はれ、 $y > K$ でも、

$$F_{x-1} F_{x-2} F_{x-3} \dots < \frac{10 \times K}{y} \times 10^{x-1}$$

であれば、積の 10^x の位の数字は求まるから、 $(x-1)$ が0より N までの総ての位に就て成立てば、積は完全に求められる。この場合には Y にも条件が這入ることになる。

以上で解る様にこの方法によれば、幾分手数は増すが、同じ計算尺で第1方法より10倍大きい y の値まで行はれる。

尙 T_{x-1} を 10^x で割ると、その 10^x の位は1の位となるから、 T_{x-1} の 10^x の位の数字は、

$$Q_x = 0 \cdot F_{x-1} F_{x-2} F_{x-3} \dots \times y$$

この Q_x なる値の1の位の数字であるを考えると、一層解りよくなる。

$$\text{例 } 48\,057 \times 173$$

第2方法で行ふには U_x の1の位の数字と T_{x-1} の 10^x の

昭和12年11月]

位の数字とを求めねばならぬが、それ等は積の各位の数字を求めるに就て、その度毎に夫々求めるよりも、先づ始めに U_x の1の位の数字、即ち Y の各数字と y の1の位の数字との積における1の位の数字を全部求めておく。

$$24\,051$$

鉛筆でゝも行ふ様な場合は、これを小さく薄く書いておき次に T_{x-1} の 10^x の位の数字をこれに加へ、依て得た数字をその上に書いて行く。

次に低位より求めて行く場合の過程を示す。

$$U_x \text{ の 1 の 位の 数字 } \dots\dots\dots 24\,051$$

$$T_0 = 0 \cdot 7 \times 173 \times 10 = 121 \cdot \times 10 \dots\dots\dots 24\,061$$

$$T_1 = 0 \cdot 57 \times 173 \times 10^2 = 98 \cdot \times 10^2 \dots\dots\dots 24\,861$$

$$T_2 = 0 \cdot 057 \times 173 \times 10^3 = 9 \cdot 8 \times 10^3 \dots\dots\dots 23\,861$$

$$T_3 = 0 \cdot 805 \times 173 \times 10^4 = 139 \cdot \times 10^4 \dots\dots\dots 13\,861$$

$$T_4 = 0 \cdot 480 \times 173 \times 10^5 = 83 \cdot \times 10^5 \dots\dots\dots 8\,313\,861$$

尙この場合にも T_{x-1} は計算尺で 10^x の位以下の数字までも解る場合があるが、それ等は直ちに積の数字を示すのであるから、その様な時はそれ等に依て同時に積の数字を幾つか求めることも出来る。一般に T_{x-1} が 10^x の位の数字まで解るのは、

$$T_{x-1} < K \times 10^x$$

なる時である。

この場合にも積を高位より求める場合には、この様にすれば一層能率を高めることが出来る。

$$\text{例 } 3\,416\,827 \times 58$$

この例を10 in の計算尺で高位より求めて行くことゝする。この場合にも U_x の1の位の数字は不必要なものもあるが、予め全部求めておく方がよい。

$$U_x \text{ の 1 の 位の 数字 } \dots\dots\dots 4\,288\,466$$

$$T_0 = 0 \cdot 341 \times 58 \times 10^7 = 19 \cdot 8 \times 10^7 \dots\dots\dots 198\,888\,466$$

$$T_1 = 0 \cdot 168\,2 \times 58 \times 10^5 = 9 \cdot 7 \times 10^5 \dots\dots\dots 198\,178\,466$$

$$T_2 = 0 \cdot 827 \times 58 \times 10^3 = 48 \cdot 0 \times 10^3 \dots\dots\dots 198\,176\,466$$

$$T_3 = 0 \cdot 27 \times 58 \times 10^2 = 15 \cdot 66 \times 10^2 \dots\dots\dots 198\,175\,966$$

こゝに重なつた数字で上は U_x の1の位の数字であり、下は T_{x-1} に於て目分量で読み取つた数字である。

4. 第3方法並に K の値に就て

第1方法より第2方法を導いた考へを更に推し進めると、第3方法なるものがある。それによると一層大きい y の値まで行はれる様になるが、相當繁雜して実用にならぬから、こゝには省略する。その様な多数桁の場合にはそれよりも後に述べる様にして計算した方がよい。

尙こゝに前述の K の値に就て詳細に述べることゝする。 T_x 或は T_{x-1} の所要の数字が誤りなく求まるためには、所要の数字が計算尺で完全に読み取れゝばよいばかりでなく、 T_x 或は T_{x-1} には所要の数字に影響する様な誤差が生じてはならぬ。そこで計算尺で求めた T_x 或は T_{x-1} には如何なる誤

差が生ずるかに就て考へることとする。

計算尺は対数目盛であり、

$$d \log_{10} u = \log_{10} e \times du/u$$

上の微分式から解る様に、真数の誤差の割合は対数の(絶対)誤差に比例する。従て計算尺の読みの誤差の生ずる割合は読みの位置の誤差に比例する。それ故読みの位置の誤差が何の点でも同じであるならば、その計算尺の読みの正確度は一定であるが、実際には目盛の密度が違ふことにより読みの位置の誤差は異なる。而してそれは目盛の密度が最も疎なる所で最大となる。

今計算尺で或る目盛の読みを L_1 、その右隣の目盛の読みを L_2 とし、その間の一目盛の読みを l とすると、

$$l = L_2 - L_1$$

となり、その間の目盛の間隔は、

$$\log_{10} \left(1 + \frac{l}{L_1} \right) \text{ 或は } -\log_{10} \left(1 - \frac{l}{L_2} \right)$$

に比例する。而してその値の前者は l/L_1 に対し、後者は l/L_2 に対し夫々増加函数であるから、 l/L_1 又は l/L_2 の大小に依て目盛の間隔の廣い狭いが比較出来る。而してそれ等の等しい目盛の間隔は又等しい。 l が等しい時は L_1 又は L_2 の小さい(大きい)程目盛の間隔は廣い(狭い)。

普通計算尺の一目盛の読みは 1, 2 及び 5 となつてゐる。而して前述の b なる値は左側の一目盛の読みが 1 なる目盛に於て最大なる読みであるから、 b なる目盛の左側の一目盛は最も間隔が狭い。これと等しい間隔を左側にもち、その一目盛の読みを 2 及び 5 とする目盛の読みは l/L_2 を等しいと置いて、夫々 $2 \times b$ 及び $5 \times b$ となる。それ故この b 、 $2 \times b$ 及び $5 \times b$ なる目盛の左側の一目盛の読みは夫々 1, 2 及び 5 であつて間隔が最も狭い。従てその右側の一目盛の読みは夫々 2, 5 及び 10 (その目盛を $5 \times b$ と読んだため、一目盛の読みは 10 となつたので、若し $0.5 \times b$ と読めば、1 となる訳である) であり、その間隔は夫々に就て最も廣い。それ等を比べると、夫々に就て l/L_1 なる値を求めると、 $2 \times b$ なる目盛の右側に最も廣い間隔があることが解り、その一目盛の読みは 5 である。

これが理論的目盛の仕方であるが、一目盛の読みを異にする境はその區切りをよくするため、前述の様にするととは限らない。然し理論的に止むを得ないより廣い間隔の出来る様な目盛の仕方は甚だまづいから、その様なものはないと考へられる。それ故最も廣いのは $2 \times b$ なる目盛の右側の間隔である。従てそこで最も読みの誤差の生ずる割合が大である。特に読みが目盛の中間に来る場合であつて、そこで何の程度に正確に読めるかは熟練にもよるが、普通その一目盛の読み 5 は目分量で 1 までは確実に読み取れる。さうすると 0.5 より大きい誤差は生じないから、そこに於て生ずる誤差の割合は $1/(4 \times b)$ となる。それ故その計算尺では誤差の生ずる割合はそれより大にはならぬし、間隔の最も狭い所、即ち b 或は

$2 \times b$ なる目盛の左側ではもつと小となり、その間隔の $1/4$ に相當する所まで読み取れるとしても、誤差の生ずる割合は $1/(8 \times b)$ より大にはならぬ。以上考へた誤差はこゝに述べた方法に関しては十分安全なることを要するためやゝ大きめに取つてある。又計算尺の工作の誤差は勿論これに比し、無視し得る程度でなければならぬ。以上は計算尺の読み取りの誤差のみならず、読みにカースル線を合せる時の誤差等にもその儘當嵌まる。

所で T_x (又は T_{x-1}) を計算尺で求める時は、 D 尺における y なる読みに C 尺の 1 又は 10 を合せる時誤差を生じ、次に C 尺の $F_x F_{x-1} \dots$ (又は $F_{x-1} F_{x-2} \dots$) なる読みにカースル線を合せる時誤差を生じ、それに対する D 尺の読み T_x (又は T_{x-1}) を読み取る時又誤差を生ずる。従て読み取つた T_x (又は T_{x-1}) にはこの三つの誤差に基づく誤差がある。

今この三つの誤差の生ずる割合を夫々 E_y 、 E_F 及び E_T とすると、読み取つた T_x (又は T_{x-1}) には ΔT なる誤差がある。

$$\Delta T = (E_y + E_F + E_T) \times T_x \text{ (又は } T_{x-1})$$

こゝに E_y 、 E_F 及び E_T は一般には $1/(4 \times b)$ より小と考へれば十分である。然し ΔT の最大の値を考へる場合には、 E_y は一般にその値を取らねばならぬが、 E_T は T_x (又は T_{x-1}) が最大なる場合を考へればよいから、その時の読みの位置が b 或は $2 \times b$ なる時は、 $1/(8 \times b)$ に取ればよい。

次に E_y であるが、これは y が計算尺で目盛のある数の時は、 E_F 、 E_T に比し無視して差支へない程度となる。然し $y > b$ なる時は y は目盛のない場合もある。その様な場合でも $y < 2 \times b$ なる時は、 y なる読みは目盛と目盛の中央にあるとして十分であるから、この場合も無視してよからう。

従て y が以上の様な数の場合には、 T_x 又は T_{x-1} の 10^z の位の数字を知りたい時、それ等を $b \times 10^z$ 以下に制限すれば、 ΔT は 0.4×10^z より大にはならぬ。然るに積を低位より求める場合には、 T_x 又は T_{x-1} の 10^{z-1} の位の数字は予め解つてゐるから、誤差は 1×10^z 以下であればよい。従てそれ位の誤差があつても何等差支へない。のみならずもつと大になつてもよい。今 T_x 又は T_{x-1} を $2 \times b \times 10^z$ 以下に制限しても、 ΔT は 0.8×10^z より大にはならぬから、僅かの所を判断しなければならず、読み取りは少し煩しくはなるが、慎重に行へば T_x 又は T_{x-1} はそれ位までは許されよう。

積を高位より求める場合には、 T_x 又は T_{x-1} の 10^{z-1} の位の数字は確實には後に解るのであるから、それ等の 10^z の位の数字を知るには、誤差は 0.5×10^z 以下でなければならぬ。従て T_x 又は T_{x-1} を $b \times 10^z$ 以下に制限すれば、先づ差支へない様であるが、相當慎重であることを要する。

次に $y > 2 \times b$ で y なる目盛のない時は、 E_y も $1/(4 \times b)$ と考へねばならぬが、 T_x 又は T_{x-1} の 10^z の位の数字を知りたい場合に、それ等を $b \times 10^z$ 以下に制限すれば、 ΔT は 0.7×10^z より大にはならぬから、積を低位より求める場合には、それで差支へない。然し積を高位より求める場合には、それでは誤差が少し多すぎるから、 T_x 又は T_{x-1} はその $1/2$ 位

先づ最初の割算は、

$$\begin{array}{r}
 15 \overline{) 36244} \times 46 \dots\dots\dots \\
 \underline{46 \overline{) 0974674}} \\
 7081699 \\
 \underline{70667256} \quad 2 \\
 149733 \\
 \underline{149015} \quad 8 \\
 7180 \\
 \underline{7067} \\
 118
 \end{array}$$

次の割算に於ては 2 番目に立つ数字は 194 か 193 か見極め難い。この様な場合には先づ 19 だけを立てるか、一應驗算して見るのであるが、又次の様にしてもよい。先づ小さい方の 193 を立て、計算して行く。さうすると次に立つ数字は 116 となり、1 は重なるからそれは加へる。

$$\begin{array}{r}
 621308 \overline{) 7419151684} \times 74 \dots\dots\dots \\
 \underline{460974674} \quad 4 \\
 459768290 \\
 120638 \\
 \underline{119912} \quad 5 \\
 7259 \\
 \underline{7207} \\
 52
 \end{array}$$

(C) 開平 先づ與へられた数を小数点より左右に 2 桁づゝ区分し、位取りのみを示す 0 は取除き、その右側に縦線を引く。而してその 1/2 の値を求めておく。以下この数に就て計算を行ふ。

斯様にしたなら與へられた数の平方根を計算尺で求めて、最初に立つ幾桁かの数字が解るから、それを最も左の区分の右側の数字の上から書く。次にそれとその 1/2 との積を求めそれを引いた差を被除数とし、その時既に求められてゐる数字に、次に立つ数の 1/2 をその位置に加へて示される数を除数として、次に立つ数字が確定される。

次はその時除数とした数に今立つた数を掛けた積を引き、それを被除数として前同様に繰返す。こゝで求めた数字を書く位置、掛算の行ひ方等は全く割算の場合と同じである。而してこれ等積に於て縦線の右に来る数はその右隣の位に於て誤差が 1 以下になる程度に求めておく。さうするとその積が縦線に達して後は全く割算と同じになる。

$$\text{例 } \sqrt{20448175}$$

この平方根の 1/2 を求めると、226- となるから先づ 452 を立てる。この場合 226 の方を乗数とするのは言ふ迄もない。

$$\begin{array}{r}
 452 \times 226 \dots\dots\dots \\
 45 \overline{) 209196} \times 196 \dots\dots\dots \\
 \underline{452 \overline{) 20448175}} \\
 10224087 \quad 5 \\
 \underline{102152} \\
 88875 \\
 \underline{88611} \\
 264
 \end{array}$$

$$\text{例 } \sqrt{2861874720}$$

$$\begin{array}{r}
 084 \times 168 \dots\dots\dots \\
 168 \times 585 \times 117 \dots\dots\dots \\
 169 \overline{) 170} \times 76 \dots\dots\dots \\
 \underline{168 \overline{) 08417076343}} \\
 2861874720 \\
 \underline{1430937360} \\
 14112 \\
 19737360 \\
 \underline{19724445} \\
 12915 \\
 \underline{12857} \\
 580
 \end{array}$$

この様に平方根の左端の数字が 1 の時は、最初に立てた数とその 1/2 との積に於ては、立てた数の 1/2 はその左端の数字の上が明くから、そこに 0 があると考へる。さうするとこの様な場合にもその左端の 0 に就て求めた数字は立てた数字の右端の下に来ることになる。

6. 位取りの方法

前述の計算様式で計算した結果の位取りは次の様にして行へる。

(a) 乗除の場合 與へられた總ての数が 10^m の位代の数であるかを調べ、その x を乗数の場合は加へ、除数の場合は減じたその値を u とし、次に掛算ではその積が乗数より 1 桁左から書かれた場合を数へ v とし、割算ではその商が被除数より 1 桁右から書かれた場合を数へ w とする。さうするとその計算結果は 10^{m+u-w} の位代の数である。

(b) 開平の場合 與へられた数が 10^m の位代の数であれば、 m が偶数の時は $\frac{1}{2} \times m$ を、奇数の時は $\frac{1}{2} \times (m-1)$ を t とすると、その平方根は 10^t の位代の数である。

7. 誤差に就て

先づ始めに與へられた数自身のもつ誤差に基づき、その計算結果にあるべき、誤差は次の様にして解る。

(a) 掛算の場合 1 の位代の数となる様に、被乗数及び乗数に小数点を打つた値を夫々 A_1 及び A_2 とし、被乗数及び乗数に於て縦線の左隣の位に夫々 d_1 及び d_2 なる誤差があるとすると、その積には縦線の左隣の位に、

$$d_1 \times A_2 + d_2 \times A_1$$

なる誤差がある。

(b) 割算の場合 この場合運算式は前述の様に除数を商の上に左を揃へて書いたとして説明する。1 の位代の数となる様に、除数及び商に小数点を打つた値を夫々 A_2 及び Q とし、被除数及び除数に於て縦線の左隣の位に、夫々 d_1 及び d_2 なる誤差があるとすると、除数における d_2 なる誤差は被除数に於て縦線の左隣の位に $d_2 \times Q$ なる誤差があるのと同じことになる。縦てその商には縦線の左隣の位に、

$$(d_1 + d_2 \times Q) \div A_2$$

なる誤差がある。

(C) 開平の場合 1 の位代の数となる様に、その平方根に小数点を打つた値を S とし、與へられた数に於て縦線の左隣の位に d なる誤差があるとすると、その平方根には、

$$\frac{1}{2} \times A \div S$$

なる誤差が縦線の左隣の位にある。

以上何れにしても縦線が前述の様な位置にない場合にもその儘當嵌まる。

次に前述の計算様式により生ずる誤差を考へ、以上の数自身のもつ誤差と比較して見る。

(a) 乗除の場合 乗数或は商の區分の数 N とすると、その計算により掛算の場合は積に於て縦線の左隣の位に $1/10 \times N$ なる誤差を生じ、割算の場合は被除数に於て縦線の左隣の位に $1/10 \times N$ なる誤差があるのと同じ誤差を生ずる。これを前の数自身のもつ誤差と比較すると、與へられる数は最も誤差の少い場合を考へても、右端の数字の位に 0.5 の誤差があると見なければならぬ。従て掛算の場合は乗数のもつ誤差に依て積には縦線の左隣の位に $0.5 \times A_2$ なる誤差があり、割算の場合は除数のもつ誤差は被除数に於て縦線の左隣の位に $0.5 \times Q$ なる誤差があると同じである。

然るに A_1 或は Q は 1 より大であるから、乗数或は除数の誤差は積或は被除数に於て縦線の左隣の位に少くとも 0.5 の誤差があることになる。従て N が 5 又は以下であれば、計算による誤差は乗数或は除数自身のもつ誤差に基づく誤差より大になることはない。それ故掛算或は割算を連続幾回行はうとも、計算による誤差は数自身のもつ誤差より大になることはない。 N が 5 と云へば 2 桁づゝとしても 10 桁の数であるから、大抵の場合これで間に合ふ。

(b) 開平の場合 その平方根の區分の数 N とすると、計算により與へられた数に於て縦線の左隣の位に大体 $1/10 \times N$ の誤差があるのと同じ誤差を生ずる。従て N が 5 以下であれば数自身のもつ誤差より大になることはない。

それ故前述の計算様式により充分満足な結果が得られるのであるが、然し乗除の場合で計算による誤差が数自身のもつ誤差と同程度でよい場合に、乗数或は商の區分の数 N が少く、被乗数或は商の左端の数字が大である時は、尙無駄がある位である。それ故もつと細かく行ふならば、一々誤差を簡単に計算し、縦線を決めればよい。さうしたとて大して面倒なことではない。尙又與へられた数の最後の1桁の如何をも云々する様な場合には計算による誤差は数自身のもつ誤差の $1/10$ 程度にしたい。この様な時は又その様にすればよい。これ等に於て連続した乗除の場合には、最初の計算では乗数被乗数或は除数被除数の 2 数の誤差を考へ、その次からは乗数或は除

数のみの誤差を考へる。

8. 特 徴

先づ第4節までに述べたこの方法の特徴として

1. は技術家として誰でも持つてゐる計算尺で行へる。
2. 第2方法で幾桁か掛けるのが、普通に1桁掛けるのと同程度の手数と言ふより寧ろ楽な位に行へる。
3. 方法が單純で機械的に行へるから、頭が疲れず従て間違ひを起さない。
4. 計算しつゝ前に求めた数字の正否を大体確められる。積を低位より求める場合に、 T_n 或は T_{n-1} における所要の数字の次の数字を読み取ると、それは前に求めた数字を示すから、その数字を確めることが出来る。然し常に1の間違ひでも発見出来るとは言へないが、 K の値を一層小に、例へば $\frac{1}{2} \times b$ 位に取れば、相當確實に確めつゝ、計算することも出来る。斯様にするには一々カースル線を合せねばならぬから多少能率の低下するのは止むを得ない。

5. 計算の後或る一つの数字の正否を確めたい場合に、直ちにその数字のみ見出せる。

等であつて、これを多数桁の数の計算に應用すれば、それだけ早く、楽な気持ちで計算が行へよう。尙この方法は如何なる計算尺でも行へるが、ユニバーサル型と稱するものであると一層都合がよい。

次に第5節より述べたその計算様式の特徴は、

1. 計算尺によるこの計算方法を應用するのに適當であり普通の筆算の計算様式に比し、一層手順よく機械的に行へるこれは誤差ある数に就て特に述べてあるが、然らざる場合にも用ゐられる。それには縦線を除けばよい。
 2. 誤差ある数の計算に於て無意味な数字が殆ど出ない従て無駄な計算がない。
 3. 10 桁以内の数では計算による誤差が数自身のもつ誤差より大にはならぬから、與へられた数を少しも無駄にすることがない。又場合に依ては $1/10$ 以下にすることが出来る。
 4. 計算結果に於て何の位に如何なる誤差があるかを、暗算で簡単に而も割合細かく解るから、有效なる数字が一層明かになる。
- 等であつて、この方法でこの様に行ふ計算は 5 桁内外の数の場合に於て最も優れてゐるのではないかと思ふ。