周辺固定の曲辺正多角形板の横振動に就て⁽¹⁾

(昭和 18 年 12 月 9 日 大阪地方講演會に於て講演)

正 員 山 本 正 之⁽²⁾

摘 要

$k(r^n \cos n\theta - a^n) + a^2 - r^2 = 0$ (a : 基準円の半径, n : 角数, k : 常数) で表はされる周辺固定の曲辺正多角形平板の横振動の円振動数の近似値を勢力式に依て求め、仮定したノーマル函数中に含まれてゐる拘束を調べたものである。角数 n が 2, 3, 4, 6 の各の場合に就て k を変へて計算した。

1. 緒 言

平板の自由横振動の基礎式を周辺条件を満足する様に解くことが困難な場合には、勢力式に依て円振動数 ω の近似値が得られる。即ち

$$w = W \cos(\omega t + \epsilon) \dots \dots \dots (1)$$

但し w : 板の中央面の面に直角方向の変位

第 1 図 楕円板 ($n=2$)

W : ノーマル函数、

t : 時間、 ϵ : 常数

とすれば、周辺固定の場合には円振動数は極座標で表はせば次の関係より求まる。

$$\omega^2 = \frac{\iint D (\nabla^2 W)^2 r dr d\theta}{\iint \rho h W^2 r dr d\theta} \dots \dots \dots (2)$$

但し h : 板の厚さ

σ, E, ρ : 板の材料の横

縮比、縦弾性係数、及び密度

第 3 図 曲辺正四角形板 ($n=4$)

図中の点線は正方形を表はす

第 4 図 曲辺正六角形板 ($n=6$)

図中の点線は正六角形を表はす

$D = h^3 E / 12(1 - \sigma^2)$: 板の曲げ剛さ

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

本題の場合もこの方法に依つたもので h, ρ を一定とする。

2. 計 算

今ノーマル函数 W を次の様に置く

$$W = \{w_0 / (a^2 - k a^n)^2\} \{k(r^n \cos n\theta - a^n) + a^2 - r^2\}^2 \dots (3)$$

$$= \{w_0 / (1 - K)^2\} \{K(R^n \cos n\theta - 1) + 1 - R^2\}^2 \dots (3)'$$

但し、 w_0 : 板の中央の変位

$$R = r/a, \quad K = k a^{n-2} \dots \dots \dots (4)$$

そうすれば (1) 式より

$$k(r^n \cos n\theta - a^n) + a^2 - r^2 = 0 \dots \dots \dots (5)$$

$$\text{又は } K(R^n \cos n\theta - 1) + 1 - R^2 = 0 \dots \dots \dots (5)'$$

と置いて得られる曲辺正多角形板 (a は基準円の半径) の周辺

(1) On the Lateral Vibration of Curved-sided Regular Polygonal Plate, clamped at its Boundary.
(2) Masayuki YAMAMOTO, Member, Osaka Syōsen Kaisya. 大阪商船會社。

にて $w=0, \partial w / \partial r=0, \partial w / \partial \theta=0$ となり、周辺条件を満足する。(5) 式の表はす形状の中後に計算するものを第 1~

[昭和 19 年 5 月]

4 図に示す。以下便宜上 (3)' 式を用いて計算する。

$$W = \{w_0/(1-K)^2\} \{K^2 R^{2n} \cos^2 n\theta - 2KR^{n+2} \cos n\theta + 2K(1-K)R^n \cos n\theta + R^4 - 2(1-K)R^2 + (1-K)^2\} \dots (6)$$

先づ (6) 式より (2) 式の分母を計算する。

$$W^2 = \{w_0^2/(1-K)^4\} \{K^4 R^{4n} \cos^4 n\theta - 4K^3 R^{3n+2} \cos^3 n\theta + 4K^2(1-K)R^{2n+2} \cos^2 n\theta + 6K^2 R^{2n+4} \cos^2 n\theta - 12K^2(1-K)R^{2n+2} \cos^2 n\theta + 6K^2(1-K)^2 R^{2n} \cos^2 n\theta - 4KR^{n+6} \cos n\theta + 12K(1-K)R^{n+4} \cos n\theta - 12K(1-K)^2 R^{n+2} \cos n\theta + 4K(1-K)^3 R^n \cos n\theta + R^8 - 4(1-K)R^6 + 6(1-K)^2 R^4 - 4(1-K)^3 R^2 + (1-K)^4\} \dots (7)$$

$$\rho h \int_0^{R_1} W^2 R dR = \{\rho h w_0^2/(1-K)^4\} \int_0^{R_1} \{K^4 R^{4n+1} \cos^4 n\theta - 4K^3 R^{3n+3} \cos^3 n\theta + 4K^3(1-K)R^{3n+1} \cos^3 n\theta + 6K^2 R^{2n+5} \cos^2 n\theta - 12K^2(1-K)R^{2n+3} \cos^2 n\theta + 6K^2(1-K)^2 R^{2n+1} \cos^2 n\theta - 4KR^{n+7} \cos n\theta + 12K(1-K)R^{n+5} \cos n\theta - 12K(1-K)^2 R^{n+3} \cos n\theta + 4K(1-K)^3 R^{n+1} \cos n\theta + R^9 - 4(1-K)R^7 + 6(1-K)^2 R^5 - 4(1-K)^3 R^3 + (1-K)^4 R\} dR \\ = \{\rho h w_0^2/(1-K)^4\} \{A_1 R_1^{10} + A_2(1-K)R_1^8 + A_3(1-K)^2 R_1^6 + A_4(1-K)^3 R_1^4 + A_5(1-K)^4 R_1^2\} \dots (8)$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{4}{3n+4} + \frac{3}{n+3} - \frac{4}{n+8} + \frac{1}{10} \\ A_2 &= \frac{12}{3n+4} + \frac{4}{3n+2} - \frac{2}{2n+1} + \frac{4}{n+8} + \frac{12}{n+6} - \frac{6}{n+3} - \frac{6}{n+2} - \frac{1}{2} \\ A_3 &= -\frac{12}{3n+4} - \frac{12}{3n+2} + \frac{3}{2n+1} - \frac{12}{n+6} - \frac{12}{n+4} + \frac{3}{n+3} + \frac{12}{n+2} + \frac{3}{n+1} + 1 \\ A_4 &= \frac{4}{3n+4} + \frac{12}{3n+2} - \frac{2}{2n+1} + \frac{12}{n+4} - \frac{2}{n+2} - \frac{6}{n+1} - 1 \\ A_5 &= \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{4}{3n+2} + \frac{3}{n+1} - \frac{4}{n+2} + \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

故に

$$\rho h \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} W^2 r dr d\theta = \rho h a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} W^2 R dR d\theta \\ = \frac{\rho h a^2 w_0^2}{(1-K)^4} \int_0^{2\pi} \{A_1 R_1^{10} + A_2(1-K)R_1^8 + A_3(1-K)^2 R_1^6 + A_4(1-K)^3 R_1^4 + A_5(1-K)^4 R_1^2\} d\theta \dots (10) \\ = \frac{2n\rho h a^2 w_0^2}{(1-K)^4} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \{A_1 R_1^{10} + A_2(1-K)R_1^8 + A_3(1-K)^2 R_1^6 + A_4(1-K)^3 R_1^4 + A_5(1-K)^4 R_1^2\} d\theta \\ \dots (11) \\ = \frac{\pi n \rho h a^2 w_0^2}{90(1-K)^4} \left\{ A_1 \int_0^{\frac{180^\circ}{n}} R_1^{10} d\theta + A_2(1-K) \int_0^{\frac{180^\circ}{n}} R_1^8 d\theta \right.$$

$$\left. + A_3(1-K)^2 \int_0^{\frac{180^\circ}{n}} R_1^6 d\theta + A_4(1-K)^3 \int_0^{\frac{180^\circ}{n}} R_1^4 d\theta + A_5(1-K)^4 \int_0^{\frac{180^\circ}{n}} R_1^2 d\theta \right\} \dots (12)$$

但し、 $\theta^\circ = 180^\circ \theta/\pi$ であり、又 R_1 は (5)' 式を解いて求められる θ の函数である。尙 (11) 式は一般に正密積分が困難なために (12) 式の様に變形して近似積分⁽³⁾ すれば次の通りになる。

$$\rho h \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} W^2 r dr d\theta = \{3\pi \rho h a^2 w_0^2/4n(1-K)^4\} \{A_1(3\xi_{10} - \eta_{10}) + A_2(1-K)(3\xi_8 - \eta_8) + A_3(1-K)^2 \times (3\xi_6 - \eta_6) + A_4(1-K)^3(3\xi_4 - \eta_4) + A_5(1-K)^4 \times (3\xi_2 - \eta_2)\} \dots (13)$$

茲に

$$\xi_i = \sum_{m=0}^m R_{1m}^i, \quad \eta_i = \sum_{s=0}^{3s=m} R_{13s}^i + R_{10}^i + R_{1m}^i \left\{ \dots (14) \right.$$

$$m=3s, \quad s=0, 1, 2, \dots, s$$

次に (2) 式の分子の計算は次の通りになる⁽⁴⁾。

$$D \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) r dr d\theta \\ = \frac{3\pi D w_0^2}{a^2(1-K)^4 n} \left\{ \frac{n^4}{2(2n-1)} K^4 (3\xi_{4n-2} - \eta_{4n-2}) - \frac{8}{3} \cdot \frac{n(n^2-n+1)}{n+1} K^2 (3\xi_{2n+2} - \eta_{2n+2}) + \frac{4}{3} n(2n-1) K^2 (1-K) (3\xi_{2n} - \eta_{2n}) + \frac{8}{3} \cdot \frac{3n^2-5n+4}{n+4} (3\xi_6 - \eta_6) - \frac{16n(n^2+2n-2)}{(n+2)(n+4)} (1-K) \times (3\xi_4 - \eta_4) + \frac{8n^2}{n+2} (1-K)^2 (3\xi_2 - \eta_2) \right\} \dots (15)$$

ξ_i, η_i は (14) 式と同一である。従て (15) 式と (13) 式より円振動数が求まることになる。

次に上の方針に依り数値計算を試みる。

3. 例 題

(1) 円板、 $K=0$ の場合で角数 n に関係しない。

$$W = w_0(1-R^2)^2$$

この場合には円振動数は次の様になる⁽⁵⁾。

$$\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4 = 1.09504$$

(2) 楕円板、 $n=2$

$$W = \{w_0/(1-K)^2\} \{K(R^2 \cos 2\theta - 1) + 1 - R^2\}^2 \dots (16)$$

この場合には正密な積分が出来る。

$$D \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} (\nabla^2 W)^2 r dr d\theta = \frac{128}{3} \frac{w_0 D}{a^2(1-K)^4} \left\{ (1-K)^2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} R_1^6 d\theta - 3(1-K)^2(1+K) \int_0^{\frac{\pi}{2}} R_1^4 d\theta + 3(1-K)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R_1^2 d\theta \right\} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} R_1^2 d\theta = (1-K) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1-K \cos 2\theta} = \sqrt{\frac{1-K}{1+K}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(3) 澤田、機械学会論文集、1 巻 1 号 (昭 10-2) 2 頁の脚註 (4) 参照。

(4) 著者、均一横荷重を受ける周辺固定の曲辺正多角形板の近似解。

(5) 植松、機械学会論文集、3 巻 10 号、76 頁 (昭 12-2)。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R_1^4 d\theta = (1-K)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-K \cos 2\theta)^2}$$

$$= \frac{1-K}{(1+K)^2} \sqrt{\frac{1+K}{1-K}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R_1^6 d\theta = (1-K)^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-K \cos 2\theta)^3}$$

$$= \frac{1-K}{(1+K)^3} \sqrt{\frac{1+K}{1-K}} \cdot \frac{2+K^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore D \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} (P^2 W)^2 r dr d\theta = \frac{64}{3} \cdot \frac{w_0^2 D}{a^2} \cdot \frac{2+K^2}{1-K^2}$$

$$\sqrt{\frac{1+K}{1-K}} \cdot \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (17)$$

又 (8) 式を用ひる時は $A_1, A_2, \dots, A_5$ は第 1 表の様になるから

第 1 表 (9) 式の値

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=6$
A_1	0	0.000 099 899	0.000 793 651	0.004 262 404
A_2	0	-0.002 031 302	-0.010 317 461	-0.039 343 989
A_3	0	0.016 966 365	0.054 761 904	0.147 219 448
A_4	0	-0.072 827 171	-0.148 412 698	-0.279 170 826
A_5	0.1	0.157 792 207	0.203 174 603	0.267 032 967

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} W^2 r dr d\theta = \frac{2}{5} a^2 w_0^2 \int_0^{2\pi} R_1^2 d\theta$$

$$\rho h \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} W^2 r dr d\theta = \frac{2}{5} \rho h a^2 w_0^2 \frac{1-K}{1+K} \sqrt{\frac{1+K}{1-K}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\dots\dots\dots (18)$$

(17) 式及び (18) 式より

$$\left. \begin{aligned} \rho h \omega^2 a^4 / D &= (160/3)(2+K^2)/(1-K)^2 \\ \text{或は } \rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4 &= 0.54752(2+K^2)/(1-K)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (19)$$

(19) 式より $K=0.1 \sim 0.5$ に就て計算すれば第 2 表に示す通りになる。又この関係を第 5 図に示す。

(3) 曲辺正三角形板、 $n=3$

第 2 表 $\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4$ の値

K	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=6$
0 (四)	1.095 04 (n に関係しない)			
0.1	1.358 66	1.359 26	1.374 27	1.382 47
0.175 8	—	—	—	1.696 81
0.2	1.745 22	1.782 19	1.801 98	1.820 73
0.3	2.335 34	2.424 57	2.458 17	2.422 23
0.4	3.285 12	3.492 93	3.445 51	—
0.5	4.927 68	5.203 48	5.028 26	—
0.6	—	8.389 80	—	—
2/3	—	12.179 00	—	—

第 3 表 $3\xi-\eta$ の表 (曲辺正三角形板の場合)

$K=ka$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	2/3
$3\xi_2-\eta_2$	72.504 205 5	65.674 429 4	59.190 737 6	52.758 348 5	46.128 331 9	38.833 155 6	33.080 976 6
$3\xi_4-\eta_4$	66.075 250 9	54.871 119 1	45.527 444 2	37.274 499 2	29.688 278 0	22.157 257 3	16.542 152 8
$3\xi_6-\eta_6$	60.377 312 2	46.649 753 4	36.366 339 3	28.131.227 3	21.196 649 2	14.716 283 4	9.927 724 1
$3\xi_8-\eta_8$	55.476 037 3	40.329 165 6	30.078 917 3	22.489 490 1	16.475 978 7	10.994 591 2	6.858 458 9
$3\xi_{10}-\eta_{10}$	51.204 020 6	35.417 382 5	25.651 118 8	18.842 583 7	13.635 836 7	8.897 075 9	5.208 059 1

$$D \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} (P^2 W)^2 r dr d\theta = \frac{3\pi D w_0^2}{m a^2 (1-K)^4} \left\{ \frac{81}{10} K^4 (3\xi_{10}-\eta_{10}) \right.$$

$$- 14 K^2 (3\xi_8-\eta_8) + 20 K^2 (1-K)^2 (3\xi_6-\eta_6) + \frac{128}{21} (3\xi_6-\eta_6)$$

$$- \frac{624}{35} (1-K) (3\xi_4-\eta_4) + \frac{72}{5} (1-K)^2 (3\xi_2-\eta_2) \left. \right\} \dots\dots (20)$$

$$\rho h \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} W^2 r dr d\theta = \frac{3\pi a^2 w_0^2 \rho h}{4m(1-K)^4} \{ A_1 (3\xi_{10}-\eta_{10})$$

$$+ A_2 (1-K) (3\xi_8-\eta_8) + A_3 (1-K)^2 (3\xi_6-\eta_6)$$

$$+ A_4 (1-K)^3 (3\xi_4-\eta_4) + A_5 (1-K)^4 (3\xi_2-\eta_2) \} \dots\dots (21)$$

(20) (21) 両式より $\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4$ を求めると、第 2 表に示す通りになる。但し ξ_i, η_i 及び A_i は夫々第 3 表及び第 1 表の値となる。 K の異なる値に対する $\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4$ の関係を第 5 図に示す。

(4) 曲辺正四角形板、 $n=4$

$$D \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} (P^2 W)^2 r dr d\theta = \frac{3\pi D w_0^2}{m a^2 (1-K)^4} \left\{ \frac{128}{7} K^4 (3\xi_{14}-\eta_{14}) \right.$$

$$- \frac{416}{15} K^2 (3\xi_{10}-\eta_{10}) + \frac{112}{3} K^2 (1-K) (3\xi_8-\eta_8) + \frac{32}{3} (3\xi_6-\eta_6)$$

$$- \frac{88}{3} (1-K) (3\xi_4-\eta_4) + \frac{64}{3} (1-K)^2 (3\xi_2-\eta_2) \left. \right\} \dots\dots (22)$$

$$\rho h \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} W^2 r dr d\theta = \frac{3\pi a^2 w_0^2 \rho h}{4m(1-K)^4} \{ A_1 (3\xi_{10}-\eta_{10})$$

第 5 図 K と $\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4$ の関係 (楕円板) 第 6 図 K と $\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4$ の関係 (曲辺正三角形板)

第 4 表 $3\xi-\eta$ の表 (曲辺正四角形板の場合)

$K=ka^2$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$3\xi_2-\eta_2$	108.897 870 2	98.876 664 8	89.102 019 1	78.955 766 6	67.339 469 9
$3\xi_4-\eta_4$	99.245 479 2	82.742 027 2	68.340 770 7	54.886 144 9	40.702 648 5
$3\xi_6-\eta_6$	90.837 211 5	70.321 305 5	54.199 275 2	40.356 822 8	26.623 828 1
$3\xi_8-\eta_8$	83.493 337 5	60.678 143 8	44.321 866 2	31.303 441 2	18.772 246 4
$3\xi_{10}-\eta_{10}$	77.065 517 1	53.122 682 0	37.309 272 4	25.419 394 5	14.125 655 2
$3\xi_{14}-\eta_{14}$	66.766 289 0	42.366 872 6	28.458 885 6	18.681 628 6	9.246 241 0

第 5 表 $3\xi-\eta$ の表 (曲辺正六角形板の場合)

$K=ka^4$	0.1	0.175 8	0.2	0.3
$3\xi_2-\eta_2$	72.787 673 3	67.766 974 1	66.165 971 3	59.197 324 6
$3\xi_4-\eta_4$	66.471 758 8	57.975 995 0	55.384 172 1	44.808 070 0
$3\xi_6-\eta_6$	60.930 917 6	50.105 059 8	46.960 419 1	34.739 547 0
$3\xi_8-\eta_8$	55.060 880 3	43.735 216 0	40.312 901 0	27.602 771
$3\xi_{10}-\eta_{10}$	51.772 187 9	38.567 963 4	34.982 419 5	22.471 305 3
$3\xi_{12}-\eta_{12}$	47.984 658 1	34.341 808 1	30.846 401 6	18.723 829 1
$3\xi_{14}-\eta_{14}$	44.640 923 8	30.859 566 0	27.453 519 0	15.941 103 2
$3\xi_{22}-\eta_{22}$	34.261 890 5	22.152 618 2	19.037 032 1	9.942 251 3

第 7 図 K と $\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4$ の関係 (曲辺正四角形板)

$$+A_2(1-K)(3\xi_8-\eta_8)+A_3(1-K)^2(3\xi_6-\eta_6) \\ +A_4(1-K)^3(3\xi_4-\eta_4)+A_5(1-K)^4(3\xi_2-\eta_2) \dots (23)$$

第 4 表及び第 1 表の値を用いて (22), (23) 両式より $\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4$ を求めると第 2 表に示す通りとなり、又 K との関係を図 7 に示す。

(5) 曲辺正六角形板、 $n=6$

$$D \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} (V^2 W)^2 r dr d\theta = \frac{3\pi D w_0^2}{m a^2 (1-K)^4} \left\{ \frac{648}{11} K^4 (3\xi_{22}-\eta_{22}) \right. \\ - \frac{496}{7} K^2 (3\xi_{14}-\eta_{14}) + 88 K^2 (1-K) (3\xi_{12}-\eta_{12}) \\ + \frac{328}{15} (3\xi_6-\eta_6) - \frac{276}{5} (1-K) (3\xi_4-\eta_4) \\ \left. + 36(1-K)^3 (3\xi_2-\eta_2) \right\} \dots (24)$$

$$\rho h \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} W^2 r dr d\theta = \frac{3\pi a^2 w_0^2 \rho h}{4m(1-K)^4} \{ A_1(3\xi_{10}-\eta_{10}) \\ + A_2(1-K)(3\xi_8-\eta_8) + A_3(1-K)^2(3\xi_6-\eta_6) \\ + A_4(1-K)^3(3\xi_4-\eta_4) + A_5(1-K)^4(3\xi_2-\eta_2) \} \dots (25)$$

第 5 表及び第 1 表の値を用いて (24), (25) 両式より

第 10 卷 第 39 号 (第 1 部)]

第 8 図 K と $\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4$ の関係 (曲辺正六角形板)

$\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4$ を求めると第 2 表に示す通りとなり、又 K との関係を図 8 に示す。

4. 吟 味

、勢力式を用いて得られる平板の横振動の円振動数は如何なる拘束の下におけるものかを調べる方法に就ては既に植松博士に依て研究されてゐる⁽⁶⁾。この方法に依てノーマル関数 W に與へた仮定の良否を調べてみる。

分布強制力 p が作用する平板の横振動の基礎式は次の通りである。

$$p = \rho h \cdot \partial^2 w / \partial t^2 + D \nabla^2 \nabla^2 w \dots (26)$$

先に仮定した W と第 2 表に求めた ω を用いて (26) 式より p を計算する。そして p が小さい程ノーマル関数の仮定がよいことになる。

$$p = (D \nabla^2 \nabla^2 W - \rho h \omega^2 W) \cos(\omega t + \epsilon) \\ = \frac{w_0 D}{(1-K)^2 a^4} [8 \{ n^2 (n-1)^2 K^2 R^{2n-4} + 8 \} \\ - \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D} \{ K (R^n \cos n\theta - 1) + 1 - R^2 \}] \cos(\omega t + \epsilon) \\ \therefore \frac{p a^4}{D w_0 \pi^4} = \frac{1}{(1-K)^2} \left[\frac{8}{\pi^4} \{ n^2 (n-1)^2 K^2 R^{2n-4} + 8 \} \right. \\ \left. - \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D \pi^4} \{ K (R^n \cos n\theta - 1) + 1 - R^2 \}^2 \right] \cos(\omega t + \epsilon) \dots (27)$$

(1) 円板 $K=0$

$$p a^4 / D w_0 \pi^4 = (64/\pi^4) \{ 1 - (5/3)(1-R^2)^2 \} \cos(\omega t + \epsilon) \dots (28)$$

時間因子を取去つて (以下凡て同様) p の分布が計算できる。但し円板の場合に就ては既に計算されてゐる⁽⁷⁾。

(2) 楕円板 $n=2$

(6) 脚註 (5) 参照。

(7) 脚註 (5) 参照。

$$\frac{pa^4}{Dw_0\pi^4} = \frac{1}{(1-K)^2} \left[\frac{32}{\pi^4} (2+K^2) - \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D\pi^4} \{ K(R^2 \cos 2\theta - 1) + 1 - R^2 \}^2 \right] \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (29)$$

但し ω は第 2 表に示す値を探る。 $\theta = 0, \pi/2$ と置いて (29) を計算すれば第 9 図の通りとなる。

(3) 曲辺正三角形板、 $n=3$

第 9 図 $pa^4/Dw_0\pi^4$ と r/a の関係 (楕円板) 実線は中心より頂点に至る。点線は中心より中点に至る。

第 10 図 $pa^4/Dw_0\pi^4$ と r/a の関係 (曲辺正三角形板) 実線は中心より頂点に至る。点線は中心より中点に至る。

$$\frac{pa^4}{Dw_0\pi^4} = \frac{1}{(1-K)^3} \left[\frac{32}{\pi^4} (9K^2R^2 + 2) - \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D\pi^4} \times \{ K(R^3 \cos 3\theta - 1) + 1 - R^3 \}^2 \right] \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (30)$$

(4) 曲辺正四角形板、 $n=4$

第 11 図 $pa^4/Dw_0\pi^4$ と r/a の関係 (曲辺正四角形板) 実線は中心より頂点に至る。点線は中心より中点に至る。

第 12 図 $pa^4/Dw_0\pi^4$ と r/a の関係 (曲辺正六角形板) 実線は中心より頂点に至る。点線は中心より中点に至る。

[昭和 19 年 5 月]

$$\frac{\rho a^4}{D w_0 \pi^4} = \frac{1}{(1-K)^3} \left[\frac{64}{\pi^4} (18K^2 R^4 + 1) - \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D \pi^4} \right. \\ \left. \times \{K(R^4 \cos 4\theta - 1) + 1 - R^2\}^2 \right] \cos(\omega t + \epsilon) \dots (31)$$

(5) 曲辺正六角形板、 $n=6$

$$\frac{\rho a^4}{D w_0 \pi^4} = \frac{1}{(1-K)^3} \left[\frac{32}{\pi^4} (225K^2 R^8 + 2) - \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D \pi^4} \right. \\ \left. \times \{K(R^6 \cos 6\theta - 1) + 1 - R^2\}^2 \right] \cos(\omega t + \epsilon) \quad (32)$$

(30), (31), (32) 式の與へる値を中心より中点及び頂点に向つて計算した結果を夫々第 10, 11, 12 図に示す。

5. 正方形及び正六辺形の場合との比較

(1) 正方形板と $K=0.4$ の曲辺正四角形板との比較

$K=0.4$ の曲辺正四角形は殆ど正方形に近く、角に幾分丸味を有してゐる。且中心より辺の中点迄の距離も全く正方形のそれと同長である。 $\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4$ の値を比較すれば次の様になる。

ノーマル函数の形	$\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4$
$K=0.4$ の曲辺正四角形	3.445 51
$W=w_0 \cos^2(\pi x/b) \cos^2(\pi y/b)$	3.555 6
$W=w_0 \cos^2(\pi x/b) \cos^2(\pi y/b)$	
$\{1 + \lambda \cos(\pi x/b) \cos(\pi y/b)\}$ 正方形 ⁽⁸⁾	3.341 98
$W=w_0(1-4x^2/b^2)(1-4y^2/b^2)^2$	3.326 18
友近氏の解	3.481 2

これに依て見れば角に丸味があつても、円振動数は正方形に殆ど近い結果になつてゐる。

(2) 正六辺形板と $K=0.1758$ の曲辺正六角形板との比較

著者は前に周辺固定の正六辺形板の横振動の近似円振動数を直交座標系に依り勢力式に依て計算した⁽⁹⁾。その結果は次の通りである。

$$\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4 = 2.104 58 \dots (33)$$

茲に a は正六辺形の一辺の長さであり、本題の基準円の半径と同長である。 $K=0.1758$ の曲辺正六角形は第 4 図に

示す如く角に幾分丸味を有してゐるが、正六辺形に極めて近い。尙 $K=0.1758$ は中心より中点に至る距離を正六辺形のそれに等しくとつた値である。この場合の結果を再びかけば

$$\rho h \omega^2 a^4 / D \pi^4 = 1.696 81 \dots (34)$$

(34) 式と假定したノーマル函数を用ひて (26) 式から得られる強制力と正六辺形の場合のそれとを比較した結果を第 6 表に示す。そもそも形態の異なる図形を表はす 2 式を以て求めた結果を比較することは無理であるが、第 6 表に示す様に $\rho a^4 / D w_0 \pi^4$ の絶対値を考へる時、本題の方が中心部に於ては小なる点より見て正六辺形板の場合にも、円振動数の近似値は (34) 式の結果の方が実際に近いであらう。

第 6 表 $\rho a^4 / D w_0 \pi^4$ の比較

対 角 線 上			中 線 上		
r/a	曲 辺 正六角形	正六辺形	r/a	曲 辺 正六角形	正六辺形
0	-0.729 61	6.046 7	0	-0.729 61	6.046 7
0.2	-0.567 48	4.797 1	0.2	-0.568 86	4.796 7
0.4	-0.134 95	1.821 8	0.4	-0.131 08	1.798 8
0.6	0.381 73	-0.881 2	0.6	0.504 26	-1.121 1
0.8	1.348 61	0.926 1	0.8	1.504 62	-2.112 5
1.0	4.328 21	3.504 1	中点	2.031 22	-1.833 4

6. 結 言

周辺固定の曲辺正多角形板の横振動の振動数の近似値を勢力式に依て求めた。板全面に行ふ積分計算は一般に困難であるので近似法を用ひた。そして楕円、曲辺正三角形、曲辺正四角形、曲辺正六角形板の各に就て辺の丸味を数種に変へて数値計算を試みた。そしてかうして求められた円振動数は如何なる強制力の下における横振動かを調べた。その結果は如何の場合にも中心部では負の強制力が働き、又周辺近くでは相當の正の強制力が働いてをり、辺の丸味がとれるに従つてこの傾向が益々大なることを示した。

(昭和 19 年 1 月 22 日受付)

(8) 脚註 (5) に同じ。尙 $b=\sqrt{2}a$ と置く。且 a は一辺の長さである。

(9) 著者、機械学会誌、46 巻 314 号 (昭 18-5) 344 頁。