即ち x 軸に平行な直線となる (第 3 図)。

例 4. 小歯車の直線 K に対応するラックの歯形

この問題は直線型スプライン軸切削用ホブの輪郭線を決定する問題として取扱ふことが出来る⁽⁶⁾。ピッチ円上の歯幅を $2bR$ とし、平行型スプラインより角 τ だけ傾く直線 K がピッチ点を通過す位置を考えると、直線 K が y 軸となす角 Ψ は

$$\Psi = \beta + \tau = \sin^{-1} b + \tau$$

である (第 4 図)。

直線 K 上ピッチ点よりの距離を媒介変数 λR にとれば

第 4 図

$$K: \begin{cases} x/R = \xi(\lambda) = \lambda \sin \Psi \\ y/R = \eta(\lambda) = -\lambda \cos \Psi \end{cases}$$

$$(2) \text{ 式より } \lambda = \cos \Psi - \cos(\Psi - \varphi)$$

直線 K に対応するラックの歯形 $\bar{K}$ は (3a) 式より ($\partial = 0$)

$$\bar{K}: \begin{cases} \bar{x}/R = [\cos \Psi - \cos(\Psi - \varphi)] \sin(\Psi - \varphi) + \sin \varphi - \varphi \\ \bar{y}/R = -[\cos \Psi - \cos(\Psi - \varphi)] \cos(\Psi - \varphi) + \cos \varphi - 1 \end{cases}$$

$\tau = 0$ のときは平行型スプラインに対するものが得られる。

(昭和 19 年 3 月 19 日受付)

擬似歯形の方法による歯形の解法に就て⁽¹⁾

(第 III 報、歯車同志の啮合)

(昭和 18 年 10 月 3 日 新潟臨時大會講演會に於て講演)

正 員 成瀬 政 男⁽²⁾ 正 員 堀 内 義 和⁽³⁾

1. 緒 言

前 2 報⁽⁴⁾に於てはラックと小歯車が啮合ふ場合の擬似歯形に就て論じた。本報告は歯車同志が啮合ふ場合を取扱ふことにする。

2. O_1 -車上の点及び曲線が O_2 -車上に描く擬似歯形

ピッチ点を原点、中心線 O_2O_1 を y 軸とする不動直交座標系を $[R]$ 、 O_1 -車の切線、それに直交する直径線を夫々 $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ 軸とし、 O_1 -車と共に回轉する直交座標系を $[R_1]$ とす。

先づ O_2 -車に固定する点及び曲線が O_1 -車上に描く擬似歯形を求める。

O_2 -車上の曲線 K が $[R]$ 系に關し媒介変数 λ により

$$K_2: \begin{cases} x/R_2 = \xi = \xi(\lambda), & y/R_2 = \eta = \eta(\lambda), \\ (R_2 \text{ は } O_2\text{-車のピッチ円半径}) \end{cases}$$

で表はされ、これ等は λ の一價函数にして第 2 次微係数が連続とする。

曲線 K_2 上の点 P が O_1 -車上に描く擬似歯形 $\bar{P}$ は $[R_1]$ 系から觀察した点 P の相對運動の軌道として求められる。

今外接啮合の場合を考へる。或瞬間 $[R_1]$ 系は $[R]$ 系と角 α_0 をなす図の位置 $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ にあり (第 1 図)、点 P の $[R]$ 系に關する座標 x_0, y_0 が

$$P: \begin{cases} x_0/R_2 = \xi_0 = \xi(\lambda) \\ y_0/R_2 = \eta_0 = \eta(\lambda) \end{cases}$$

とする。 O_2 -車が角 φ_2 回轉し、点 P が点 P' の位置に來た瞬間を考へると、点 P' の $[R]$ 系に關する座標 x, y は

第 1 図 (a)

$$P': \begin{cases} x = [\xi_0^2 + (\eta_0 + 1)^2]^{1/2} \sin \left(\tan^{-1} \frac{\xi_0}{\eta_0 + 1} + \varphi_2 \right) R_2 \\ y = [\xi_0^2 + (\eta_0 + 1)^2]^{1/2} \cos \left(\tan^{-1} \frac{\xi_0}{\eta_0 + 1} + \varphi_2 \right) R_2 - R_2 \end{cases}$$

この瞬間 $[R]$ 系より $[R_1]$ 系への変換式

[昭和 19 年 5 月]

⁽⁶⁾ 成瀬、若松、スプライン軸用ホブに就て、機械学会論文、7 卷 26 号、IV-27 頁 (昭 16-2)。

⁽¹⁾ Über die Zahnprofiltheorie bei der Methode von Pseudo-zahnkurve. (III Mitteilung). ⁽²⁾ Masao NARUSE, Mitglied. Kaiserliche Universität zu Tōhoku. 東北帝国大学。

⁽³⁾ Yoshikazu HORTUCHI, Mitglied. Nakazima Hikōki Kabushiki Kaisha, Ogikubo Seisakusho. 中島飛行機株式会社製作所。

第 1 図 (b)

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x \cos(\alpha_0 + \varphi_1) + y \sin(\alpha_0 + \varphi_1) \\ &\quad - R_1 \sin(\alpha_0 + \varphi_1) \\ \bar{y}_1 &= -x \sin(\alpha_0 + \varphi_1) + y \cos(\alpha_0 + \varphi_1) \\ &\quad + R_1 \cos(\alpha_0 + \varphi_1)\end{aligned}$$

の x, y に点 P' の座標を代入し、ピッチ円同志の間に滑りがないから O_1 -車の回轉角 φ_1 が

$$\varphi_1 = \varepsilon \varphi_2, \quad (\varepsilon \equiv R_2/R_1)$$

なることに注意すれば、 O_1 -車の回轉角 φ_1 を媒介変数とした場合 O_2 -車上の点 P の O_1 -車上に描く擬似歯形 $\bar{P}$ が得られる。

$$\bar{P}: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = \varepsilon [\xi_0^2 + (\eta_0 + 1)^2]^{1/2} \sin\left(\alpha_0 + \text{tg}^{-1} \frac{\xi_0}{\eta_0 + 1} + \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad - (1 + \varepsilon) \sin(\alpha_0 + \varphi_1) \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = \varepsilon [\xi_0^2 + (\eta_0 + 1)^2]^{1/2} \cos\left(\alpha_0 + \text{tg}^{-1} \frac{\xi_0}{\eta_0 + 1} + \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad - (1 + \varepsilon) \cos(\alpha_0 + \varphi_1) + 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(1)$$

或は

$$\bar{P}: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = \varepsilon \xi_0 \cos\left(\alpha_0 + \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) + \varepsilon (\eta_0 + 1) \sin\left(\alpha_0 + \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad - (1 + \varepsilon) \sin(\alpha_0 + \varphi_1) \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = -\varepsilon \xi_0 \sin\left(\alpha_0 + \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) + \varepsilon (\eta_0 + 1) \cos\left(\alpha_0 + \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad - (1 + \varepsilon) \cos(\alpha_0 + \varphi_1) + 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(1a)$$

同様にして内接嚙合の場合には

$$\bar{P}: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = -\varepsilon [\xi_0 + (\eta_0 - 1)^2]^{1/2} \sin\left(\alpha_0 + \text{tg}^{-1} \frac{\xi_0}{\eta_0 - 1} - \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad - (1 - \varepsilon) \sin(\alpha_0 + \varphi_1) \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = -\varepsilon [\xi_0 + (\eta_0 - 1)^2]^{1/2} \cos\left(\alpha_0 + \text{tg}^{-1} \frac{\xi_0}{\eta_0 - 1} - \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad - (1 - \varepsilon) \cos(\alpha_0 + \varphi_1) + 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(1)'$$

又は

$$\bar{P}: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = \varepsilon \xi_0 \cos\left(\alpha_0 - \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) + \varepsilon (\eta_0 - 1) \sin\left(\alpha_0 - \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad - (1 - \varepsilon) \sin(\alpha_0 + \varphi_1) \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = -\varepsilon \xi_0 \sin\left(\alpha_0 - \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) + \varepsilon (\eta_0 - 1) \cos\left(\alpha_0 - \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad - (1 - \varepsilon) \cos(\alpha_0 + \varphi_1) + 1 \end{cases}$$

第 10 卷 第 39 号 (第 4 部)

$\dots\dots\dots(1a)'$

点 P 1 箇の代りに曲線 K_2 上の総ての点をとれば、これ等の点が描く擬似歯形の群を得 (第 2 図)。若しこの曲線群に包絡線 $\bar{K}_1$ が存在すれば、これが曲線 K_2 の O_2 -車上に描く擬似歯形である。曲線 K_2 が O_1 -車の歯形であれば擬似歯形 $\bar{K}_1$ は K_2 に嚙合ふ O_1 -車の歯形となる。

擬似歯形 $\bar{K}_1$ を求めるには (1), (1a) 式の常数 ξ_0, η_0 の代りに変数 $\xi(\lambda), \eta(\lambda)$ で置き代へ、これより作った Jacobian J :

第 2 図

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial \varphi_1} \end{vmatrix}$$

を 0 とおき、 $J \neq 0$ ならば曲線 K_2 の正則性より $\xi'^2 + \eta'^2 \neq 0$ なることに注意し φ を λ により表はすことが出来る。

$$\frac{\varphi_1}{\varepsilon} = \text{tg}^{-1} \frac{\eta'}{\xi'} \pm \sin^{-1} \frac{A_1}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}} \quad \dots\dots\dots(2)$$

又は

$$\frac{\varphi_1}{\varepsilon} = \text{tg}^{-1} \frac{\eta' A_2 \mp \xi' A_1}{\xi' A_2 \mp \eta' A_1} \quad \dots\dots\dots(2a)$$

但し

$$A_1 \equiv \xi \xi' + \eta' (\eta + 1), \quad A_2 \equiv [\xi'^2 + \eta'^2 - A_1^2]^{1/2}$$

複号は適當に採る。

この φ_1 の値を (1), (1a) に代入すれば、 λ を媒介変数とする擬似歯形 $\bar{K}_1$ の方程式を得:

$$\bar{K}_1: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = \varepsilon [\xi^2(\lambda) + \{\eta(\lambda) + 1\}^2]^{1/2} \\ \quad \times \sin\left[\alpha_0 + \text{tg}^{-1} \frac{\xi(\lambda)}{\eta(\lambda) + 1} + \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda)\right] \\ \quad - (1 + \varepsilon) \sin[\alpha_0 + \varphi_1(\lambda)] \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = \varepsilon [\xi^2(\lambda) + \{\eta(\lambda) + 1\}^2]^{1/2} \\ \quad \times \cos\left[\alpha_0 + \text{tg}^{-1} \frac{\xi(\lambda)}{\eta(\lambda) + 1} + \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda)\right] \\ \quad - (1 + \varepsilon) \cos[\alpha_0 + \varphi_1(\lambda)] + 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(3)$$

又は

$$\bar{K}_1: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = \varepsilon \xi(\lambda) \cos \left[\alpha_0 + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda) \right] + \varepsilon \{ \eta(\lambda) + 1 \} \\ \quad \times \sin \left[\alpha_0 + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda) \right] - (1+\varepsilon) \sin [\alpha_0 + \varphi_1(\lambda)] \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = -\varepsilon \xi(\lambda) \sin \left[\alpha_0 + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda) \right] + \varepsilon \{ \eta(\lambda) + 1 \} \\ \quad \times \cos \left[\alpha_0 + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda) \right] - (1+\varepsilon) \cos [\alpha_0 + \varphi_1(\lambda)] \\ + 1 \end{cases} \dots\dots\dots (3a)$$

$J \neq 0$ ならば $J=0$ より λ を φ_1 で表はせる。

$$\lambda = \lambda(\varphi_1)$$

これを (1), (1a) 式に代入して φ_1 を媒介変数としてもよい。

内接嚙合のとき (2), (3) 式に相当するものは

$$\frac{-\varphi_1}{\varepsilon} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta'}{\xi'} \pm \sin^{-1} \frac{D_1}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}, \quad (J \neq 0) \dots (2)'$$

又は

$$\frac{-\varphi_1}{\varepsilon} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta' D_2 \mp \xi' D_1}{\xi' D_2 \pm \eta' D_1} \dots\dots\dots (2a)'$$

但し $D_1 \equiv \xi \xi' + \eta'(\eta - 1)$, $D_2 \equiv [\xi'^2 + \eta'^2 - D_1^2]^{1/2}$

にして複号は適當に採る。

従て擬似歯形 $\bar{K}_1$ は λ を媒介変数として次の様に表はされる。

$$\bar{K}_1: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = -\varepsilon [\xi^2(\lambda) + \{\eta(\lambda) - 1\}^2]^{1/2} \\ \quad \times \sin \left[\alpha_0 + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi(\lambda)}{\eta(\lambda) - 1} - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda) \right] \\ \quad - (1-\varepsilon) \sin [\alpha_0 + \varphi_1(\lambda)] \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = -\varepsilon [\xi^2(\lambda) + \{\eta(\lambda) - 1\}^2]^{1/2} \\ \quad \times \cos \left[\alpha_0 + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi(\lambda)}{\eta(\lambda) - 1} - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda) \right] \\ \quad - (1-\varepsilon) \cos [\alpha_0 + \varphi_1(\lambda)] + 1 \end{cases} \dots\dots\dots (3)'$$

又は

$$\bar{K}_1: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = \varepsilon \xi(\lambda) \cos \left[\alpha_0 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda) \right] + \varepsilon \{ \eta(\lambda) - 1 \} \\ \quad \times \sin \left[\alpha_0 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda) \right] - (1-\varepsilon) \sin [\alpha_0 + \varphi_1(\lambda)] \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = -\varepsilon \xi(\lambda) \sin \left[\alpha_0 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda) \right] + \varepsilon \{ \eta(\lambda) - 1 \} \\ \quad \times \cos \left[\alpha_0 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda) \right] - (1-\varepsilon) \cos [\alpha_0 + \varphi_1(\lambda)] \\ + 1 \end{cases} \dots\dots\dots (3a)'$$

$J \neq 0$ ならば $J=0$ より λ を φ_1 で表はし

$$\lambda = \lambda(\varphi_1)$$

これを (1)', (1a)' 式に代入して φ_1 を媒介変数とする式が得られる。

O_1 -車に固定する点及び曲線が O_2 -車上に描く擬似歯形を

求めるには、外接嚙合にては O_1, O_2 -車の位置を交換して考へ内接嚙合にては上掲の式に於て單に添字 1 と 2 を交換し従て ε の代りに $1/\varepsilon$ とすればよい。

3. 應 用 例

例 1. インボリュート歯形に対する歯形

O_2 -車の同心円 (半径 $R_2 \cos \alpha$; $\alpha > 0$) を基円とするインボリュート歯形 K_2 は、その根本を原点、基円の切線を x' 軸、直径線を y' 軸とする直交座標系に関して

$$x' = R_2 \cos \alpha (\sin \lambda - \lambda \cos \lambda)$$

$$y' = R_2 \cos \alpha (1 - \cos \lambda - \lambda \sin \lambda)$$

で表はされる。但し λ は K_2 上の点より基円に引いた切線の切点と原点が中心 O_2 を見る角である。曲線 K_2 を $[R]$ 系の原点を通過させれば $[R]$ 系に関して次の形となる。

$$K_2: \begin{cases} x/R_2 = \xi(\lambda) = \pm \cos \alpha [\sin(Ev\alpha - \lambda) + \lambda \cos(Ev\alpha - \lambda)] \\ y/R_2 = \eta(\lambda) = \pm \cos \alpha [\cos(Ev\alpha - \lambda) - \lambda \sin(Ev\alpha - \lambda)] \\ \pm 1 \\ \dots \pm \varphi_1/\varepsilon = \lambda - \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

但し複号の上は外接、下は内接嚙合である。

故に O_1 -車の歯形 $\bar{K}_1$ は (2a), (3a)' 式から $\alpha_0 = -Ev\alpha$ とおけば

$$\bar{K}_1: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = \cos \alpha [\sin \{ \operatorname{tg} \alpha \mp \varepsilon (\lambda - \operatorname{tg} \alpha) \} \\ \quad - \{ \operatorname{tg} \alpha \mp \varepsilon (\lambda - \operatorname{tg} \alpha) \} \cos \{ \operatorname{tg} \alpha \mp \varepsilon (\lambda - \operatorname{tg} \alpha) \}] \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = \cos \alpha [\sec \alpha - \cos \{ \operatorname{tg} \alpha \mp \varepsilon (\lambda - \operatorname{tg} \alpha) \} \\ \quad - \{ \operatorname{tg} \alpha \mp \varepsilon (\lambda - \operatorname{tg} \alpha) \} \sin \{ \operatorname{tg} \alpha \mp \varepsilon (\lambda - \operatorname{tg} \alpha) \}] \end{cases}$$

即ち O_1 -円と同心にして基円の半径が $R_1 \cos \alpha$ なるインボリュート歯形に外ならない。 O_1 -車にインボリュート歯形を與へた場合も亦同様である。

例 2. サイクロイド歯形

轉り円の半径 aR_2, bR_2 ($a, b, \varepsilon \alpha, < 1$) のサイクロイド歯形 K_2 を O_2 -車の歯末及び歯本の面に與へる：

$$\text{歯末の面 } K_2: \begin{cases} x/R_2 = \xi(\lambda) = (a+1) \sin a\lambda - a \sin(a+1)\lambda \\ y/R_2 = \eta(\lambda) = (a+1) \cos a\lambda - a \cos(a+1)\lambda \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{歯本の面 } K_2: \begin{cases} x/R_2 = \xi(\lambda) = (b-1) \sin b\lambda - b \sin(b-1)\lambda \\ y/R_2 = \eta(\lambda) = -(b-1) \cos b\lambda \\ \quad + b \cos(b-1)\lambda - 1 \end{cases}$$

歯末の面はエピ・サイクロイドにして歯本の面はハイポ・サイクロイドである。媒介変数 λ は轉り円の回轉角である。

(2) 式から

$$\varphi_1/\varepsilon = a\lambda, \quad \varphi_1/\varepsilon = -b\lambda$$

となるから O_1 -車の歯形 $\bar{K}_1$ は (3a) 式から

$$\text{歯本の面 } \bar{K}_1: \begin{cases} \bar{x}_1/R_1 = (1-\varepsilon a) \sin \varepsilon a\lambda - \varepsilon a \sin(1-\varepsilon a)\lambda \\ \bar{y}_1/R_1 = -(1-\varepsilon a) \cos \varepsilon a\lambda - \varepsilon a \cos(1-\varepsilon a)\lambda \end{cases}$$

$$\text{歯末の面 } \bar{K}_1: \begin{cases} \bar{x}_1/R_1 = -(1+\varepsilon b) \sin \varepsilon b\lambda + \varepsilon b \sin(1+\varepsilon b)\lambda \\ \bar{y}_1/R_1 = -(1+\varepsilon b) \cos \varepsilon b\lambda + \varepsilon b \cos(1+\varepsilon b)\lambda \end{cases}$$

[昭和 19 年 5 月]

これは半径 $\varepsilon a R_1$, $\varepsilon b R_1$ の円が O_1 -円の内側及び外側を轉るとき画がくハイポ・サイクロイド及びエビ・サイクロイドである。同様にして内接嚙合の場合には同種のサイクロイド歯形が嚙合ふことがわかる。

例 3. 二次曲線歯形

O_2 -車に二次曲線 K_2 を與へる。

(イ) 楕円

[R] 系の原点を通る楕円 K_2 の長、短軸の半分を夫々 $a R_2$, $b R_2$ とし中心 C の [R] 系に関する座標を $(\mp k R_2, \mp l R_2)$, 長軸が x 軸となす角を α とすれば

$$\sin^2\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{l}{k} + \alpha\right) / a^2 + \cos^2\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{l}{k} + \alpha\right) / b^2 = 1 / (k^2 + l^2)$$

なる関係がある。[R] 系に関して K_2 を表せば

$$K_2: \begin{cases} x/R_2 = \xi(\lambda) = \pm a \cos \alpha \cdot \cos \lambda \pm b \sin \alpha \cdot \sin \lambda \mp k \\ y/R_2 = \eta(\lambda) = \mp a \sin \alpha \cdot \cos \lambda \pm b \cos \alpha \cdot \sin \lambda \mp l \end{cases}$$

但し複号の上は歯末の面、下は歯本の面である。

$$D_1 = (b^2 - a^2) \sin \lambda \cos \lambda + a[k \cos \alpha \pm (1 \mp l) \sin \alpha] \sin \lambda + b[-k \sin \alpha \pm (1 \mp l) \cos \alpha] \cos \lambda$$

$$D_2^2 = a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda - D_1^2, \quad \frac{\varphi_1}{\varepsilon} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta' D_2 - \xi' D_1}{\xi' D_2 + \eta' D_1}$$

故に (3a) 式により O_1 -車の歯形が求められる, $(\alpha_0 = 0)$ 。

$$\bar{K}_1: \begin{cases} \bar{x}_1/R_1 = \pm \varepsilon (a \cos \alpha \cdot \cos \lambda + b \sin \alpha \cdot \sin \lambda - k) \\ \quad \times \cos\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \mp \varepsilon (a \sin \alpha \cdot \cos \lambda - b \cos \alpha \cdot \sin \lambda \\ \quad + l \mp 1) \sin\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) - (1+\varepsilon) \sin \varphi_1 \\ \bar{y}_1/R_1 = \mp \varepsilon (a \cos \alpha \cdot \cos \lambda + b \sin \alpha \cdot \sin \lambda - k) \\ \quad \times \sin\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \mp \varepsilon (a \sin \alpha \cdot \cos \lambda - b \cos \alpha \cdot \sin \lambda \\ \quad + l \mp 1) \cos\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) - (1+\varepsilon) \cos \varphi_1 + 1 \end{cases}$$

内接嚙合の場合も亦同様である。

(ロ) 双曲線

[R] 系の原点を通る双曲線 K_2 の中心 C の座標が $(\mp k R_2, \pm l R_2)$, 長、短軸の半分が $a R_2$, $b R_2$, 長軸が x 軸と角 α をなすとき

$$\cos^2\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{l}{k} - \alpha\right) / a^2 - \sin^2\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{l}{k} - \alpha\right) / b^2 = 1 / (k^2 + l^2)$$

なる関係がある。

この双曲線 K_2 を [R] 系に関して表せば次の様になる：

$$K_2: \begin{cases} x/R_2 = \xi(\lambda) = a \cos \alpha \cdot \sec \lambda + b \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \lambda \pm k \\ y/R_2 = \eta(\lambda) = -a \sin \alpha \cdot \sec \lambda + b \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \lambda \mp l \end{cases}$$

複号の上は歯末の面、下は歯本の面である。

$$D_1 = (a^2 + b^2) \sec^2 \lambda \cdot \operatorname{tg} \lambda + a[\pm k \cos \alpha - (1 \mp l) \sin \alpha] \sec^2 \lambda \times \sec \lambda \cdot \operatorname{tg} \lambda + b[\pm k \sin \alpha + (1 \mp l) \cos \alpha] \sec^2 \lambda$$

$$D_2^2 = (a^2 \operatorname{tg}^2 \lambda + b^2 \sec^2 \lambda) \sec^2 \lambda - D_1^2$$

$$\frac{\varphi_1}{\varepsilon} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta' D_2 - \xi' D_1}{\xi' D_2 + \eta' D_1}$$

故に求める O_1 -車の歯形 $\bar{K}_1$ は (3a) 式から $(\alpha_0 = 0)$

第 10 卷 第 39 号 (第 4 部)]

$$\bar{K}_1: \begin{cases} \bar{x}_1/R_1 = \varepsilon (a \cos \alpha \cdot \sec \lambda + b \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \lambda \pm k) \cos\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad + \varepsilon (-a \sin \alpha \cdot \sec \lambda + b \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \lambda \mp l) \\ \quad \times \sin\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) - (1+\varepsilon) \sin \varphi_1 \\ \bar{y}_1/R_1 = -\varepsilon (a \cos \alpha \cdot \sec \lambda + b \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \lambda \pm k) \sin\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad + \varepsilon (-a \sin \alpha \cdot \sec \lambda + b \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \lambda \mp l) \\ \quad \times \cos\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) - (1+\varepsilon) \cos \varphi_1 + 1 \end{cases}$$

内接嚙合の場合も亦同様である。

(ハ) 拋物線

[R] 系の原点を通る拋物線 K_2 の頂点 O' の座標が $(\pm k R_2, \mp l R_2)$, 主軸の x 軸への傾きが α なるとき

$$\sqrt{k^2 + l^2} \sin^2\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{l}{k} - \alpha\right) = -4p \cos\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{l}{k} - \alpha\right)$$

なる関係がある。この拋物線 K_2 を [R] 系に関して表す：

$$K_2: \begin{cases} x/R_2 = \xi(\lambda) = \mp p \cos \alpha \cdot \lambda^2 + 2p \sin \alpha \cdot \lambda \mp k \\ y/R_2 = \eta(\lambda) = \mp p \sin \alpha \cdot \lambda^2 + 2p \cos \alpha \cdot \lambda \mp l \end{cases}$$

複号の上は歯末の面、下は歯本の面である。

$$D_1/2p = p\lambda^3 + [2p - k \cos \alpha \pm (1 \mp l) \sin \alpha] \lambda \pm k \sin \alpha + (1 \mp l) \cos \alpha$$

$$D_2^2 = 4p^2(1 + \lambda^2) - D_1^2$$

$$\frac{\varphi_1}{\varepsilon} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta' D_2 - \xi' D_1}{\xi' D_2 + \eta' D_1}$$

求める O_1 -車の歯形 $\bar{K}_1$ は (3a) 式より $(\alpha_0 = 0)$ ：

$$\bar{K}_1: \begin{cases} \bar{x}_1/R_1 = \varepsilon (\mp p \cos \alpha \cdot \lambda^2 + 2p \sin \alpha \cdot \lambda \pm k) \cos\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad + \varepsilon (\pm p \sin \alpha \cdot \lambda^2 + 2p \cos \alpha \cdot \lambda \mp l + 1) \sin\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad - (1+\varepsilon) \sin \varphi_1 \\ \bar{y}_1/R_1 = -\varepsilon (\mp p \cos \alpha \cdot \lambda^2 + 2p \sin \alpha \cdot \lambda \pm k) \sin\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad + \varepsilon (\pm p \sin \alpha \cdot \lambda^2 + 2p \cos \alpha \cdot \lambda \mp l + 1) \cos\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1\right) \\ \quad - (1+\varepsilon) \cos \varphi_1 + 1 \end{cases}$$

内接嚙合も亦同様である。

(ニ) 円

(イ) 松村式交換性円弧歯形 $K_2^{(4)}$ に嚙合小歯形

(イ) に於て $\alpha = 0$, $a = b$

と置いたものである。

$$K_2: \begin{cases} x/R_2 = \xi(\lambda) = \mp k \pm a \cos \lambda \\ y/R_2 = \eta(\lambda) = \mp \sqrt{a^2 - k^2} \pm a \sin \lambda \end{cases}$$

$$\therefore D_1 = a[k \sin \lambda + (1 \mp \sqrt{a^2 - k^2}) \cos \lambda]$$

$$D_2^2 = a^2[1 - \{k \sin \lambda + (1 \mp \sqrt{a^2 - k^2}) \cos \lambda\}^2]$$

$$\varphi_1/\varepsilon = \lambda + \cos^{-1}[k \sin \lambda + (1 \mp \sqrt{a^2 - k^2}) \cos \lambda]$$

又は

$$\lambda = \operatorname{tg}^{-1} \frac{-1 \pm \sqrt{a^2 - k^2} + \cos \varphi_1/\varepsilon}{k - \sin \varphi_1/\varepsilon}$$

O_1 -車の歯形 $\bar{K}_1$ は λ を媒介変数として

(4) 松村、機械学会誌、21 卷 52 号 (大 7-6)。

$$\bar{K}_1: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = \pm \varepsilon (a \cos \lambda - k) \cos \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right) \\ \pm \varepsilon (a \sin \lambda - \sqrt{a^2 - k^2} \pm 1) \sin \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right) \\ -(1+\varepsilon) \sin \varphi_1 \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = \pm \varepsilon (a \cos \lambda - k) \sin \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right) \\ \pm \varepsilon (a \sin \lambda - \sqrt{a^2 - k^2} \pm 1) \cos \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right) \\ -(1+\varepsilon) \cos \varphi_1 + 1 \end{cases}$$

又は φ_1 を媒介変数として表はす。

$$\bar{K}_1: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = \pm \varepsilon a \cos \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{1 \pm \sqrt{a^2 - k^2} + \cos(\varphi_1/\varepsilon)}{k - \sin(\varphi_1/\varepsilon)} - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right] \\ \mp \varepsilon a \sin \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{k}{\sqrt{a^2 - k^2}} + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right] \\ + \sin \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right) - (1+\varepsilon) \sin \varphi_1 \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = \pm \varepsilon a \sin \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{1 \pm \sqrt{a^2 - k^2} + \cos(\varphi_1/\varepsilon)}{k - \sin(\varphi_1/\varepsilon)} - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right] \\ \mp \varepsilon a \cos \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{k}{\sqrt{a^2 - k^2}} + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right] \\ + \cos \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right) - (1+\varepsilon) \cos \varphi_1 + 1 \end{cases}$$

第 3 図

第 4 図

第 5 図

複号の上は O_1 -車の歯本、下は歯末の面を表はす。

内接噛合の場合も亦同様である。

(ii) 円弧 K_2 が一般の位置にある場合

O_2 -車の円弧 K_2 の中心 C の $[R]$ 系に関する座標が $(\xi_0 R_2,$

$\eta_0 R_2)$ 、半径が $r R_2$ ならば半径線が x 軸となす角 λ を媒介変数として

$$K_2: \begin{cases} x/R_2 = \xi(\lambda) = \xi_0 + r \cos \lambda \\ y/R_2 = \eta(\lambda) = \eta_0 + r \sin \lambda \end{cases}$$

で表はされる。外接噛合の場合には (2) 式から

$$\varphi_1/\varepsilon = \pi/2 + \lambda + \sin^{-1} \{ \xi_0 \sin \lambda - (1+\eta_0) \cos \lambda \}$$

$$\text{又は } \lambda = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1+\eta_0 - \cos(\varphi_1/\varepsilon)}{\xi_0 + \sin(\varphi_1/\varepsilon)}$$

故に O_1 -車の歯形 $\bar{K}_1$ は (3) 式から ($\alpha_0=0$)

$$\bar{K}_1: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = \varepsilon [(\xi_0 + r \cos \lambda)^2 + (1+\eta_0 + r \sin \lambda)^2]^{1/2} \\ \times \sin \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi_0 + r \cos \lambda}{1+\eta_0 + r \sin \lambda} + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda) \right] \\ -(1+\varepsilon) \sin \varphi_1(\lambda) \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = \varepsilon [(\xi_0 + r \cos \lambda)^2 + (1+\eta_0 + r \sin \lambda)^2]^{1/2} \\ \times \cos \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi_0 + r \cos \lambda}{1+\eta_0 + r \sin \lambda} + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1(\lambda) \right] \\ -(1+\varepsilon) \cos \varphi_1(\lambda) + 1 \end{cases}$$

又は φ_1 を媒介変数として表はす ($\alpha_0=0$)

$$\bar{K}_1: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = \varepsilon r \cos \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{1+\eta_0 - \cos(\varphi_1/\varepsilon)}{\xi_0 + \sin(\varphi_1/\varepsilon)} - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right] \\ + \varepsilon \sqrt{\xi_0^2 + (1+\eta_0)^2} \sin \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi_0}{1+\eta_0} + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right] \\ -(1+\varepsilon) \sin \varphi_1 \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = \varepsilon r \sin \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{1+\eta_0 - \cos(\varphi_1/\varepsilon)}{\xi_0 + \sin(\varphi_1/\varepsilon)} - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right] \\ + \varepsilon \sqrt{\xi_0^2 + (1+\eta_0)^2} \cos \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi_0}{1+\eta_0} + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right] \\ -(1+\varepsilon) \cos \varphi_1 + 1 \end{cases}$$

内接噛合の場合も亦同様である。

本例の直接應用の一つとしてルーツ送風機の羽根車の輪郭

線⁽⁵⁾を求めてみる。第3図に於て

$$\text{ピッチ円半径 } R_1 = R_2 = R, \quad \overline{AB} = 0.5R$$

(5) 格田、ルーツ送風機の羽根車の設計、機械学会論文、7巻27号、(昭11-5)。

[昭和19年5月]

円弧 K の半径 $\overline{CB}=0.712R$,

とするとき、円弧 K に嚙合ふ相手の歯形 $\overline{K}$ は上式に於て

$$\overline{K}: \begin{cases} \bar{x}/R = 0.712 \cos \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{0.788 - \cos \varphi}{\sin \varphi} - 2\varphi \right) \\ \quad + 0.788^2 \sin 2\varphi - 2 \sin \varphi \\ \bar{y}/R = 0.712 \sin \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{0.788 - \cos \varphi}{\sin \varphi} - 2\varphi \right) \\ \quad + 0.788^2 \cos 2\varphi - 2 \cos \varphi + 1 \end{cases}$$

(iii) 円弧 K_i が O_i -円と同心の場合

円弧 K_2 の半径が $(1+\gamma_0)R_2$ ならば半径線が γ 軸となす角 λ を媒介変数として

$$K_2: \begin{cases} x/R_2 = \xi(\lambda) = (1 \pm \gamma_0) \sin \lambda \\ y/R_2 = \eta(\lambda) = \pm (1 \pm \gamma_0) \cos \lambda \mp 1 \end{cases}$$

複号の上は外接、下は内接嚙合である。

K_2 に対する O_1 -車の擬似歯形 $\overline{K}_1$ は ($\alpha_0=0$)

$$\overline{K}_1: \begin{cases} \bar{x}/R_1 = (1 - \varepsilon \gamma_0) \sin \varepsilon \lambda \\ \bar{y}_1/R_1 = 1 - (1 - \varepsilon \gamma_0) \cos \varepsilon \lambda \end{cases}$$

即ち半径 $(1 - \varepsilon \gamma_0)R_1$ なる O_1 -円の同心円である (第4図)。

例 4. 直線に対する歯形

O_2 -車の直線 K_2 をピッチ点を通過する位置に於て γ 軸となす角を Ψ として $[R]$ 系に關し表はす (第5図)。

$$K_2: \begin{cases} x/R_2 = \xi(\lambda) = \lambda \sin \Psi \\ y/R_2 = \eta(\lambda) = \lambda \cos \Psi \end{cases}$$

媒介変数 λR_2 は直線 K_2 上ピッチ点よりの距離を表はす。

$$\therefore \pm \lambda = \cos \left(\Psi \pm \frac{\varphi_1}{\varepsilon} \right) - \cos \Psi$$

従て O_1 -車の歯形 $\overline{K}_1$ は

$$\overline{K}_1: \begin{cases} \frac{\bar{x}_1}{R_1} = \pm \varepsilon \left[\cos \left(\Psi \pm \frac{\varphi_1}{\varepsilon} \right) - \cos \Psi \right] \sin \left(\Psi \pm \frac{1 \pm \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right) \\ \quad + \varepsilon \sin \frac{1 \pm \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 - (1 \pm \varepsilon) \sin \varphi_1 \\ \frac{\bar{y}_1}{R_1} = \pm \varepsilon \left[\cos \left(\Psi \pm \frac{\varphi_1}{\varepsilon} \right) - \cos \Psi \right] \cos \left(\Psi \pm \frac{1 \pm \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 \right) \\ \quad \pm \varepsilon \cos \frac{1 \pm \varepsilon}{\varepsilon} \varphi_1 - (1 \pm \varepsilon) \cos \varphi_1 + 1 \end{cases}$$

複号の上方は外接、下方は内接嚙合である。

O_1 -車に直線を與へた場合も同様に求められる。

4. 結 語

以上論じた歯形曲線論における擬似歯形の方法の特徴を列記すれば次の如くなる。

1. 接触点の軌跡を仲介としない。
2. 切線座標又は極切線座標の方法による歯形は微分方程式の形で與へられる故直接そのを図面上に描くことが出来ないから不便である。本法によれば歯形を直角座標系に關する媒介変数表示として得られる。
3. 従来行はれてゐる歯形論は扱ふ曲線に制限がある。本方法によるときは普通の歯形は勿論更に廣範圍の曲線を取扱ふことが出来る。

最後に本研究に關し齒車研究會の各位から與へられた御助言及び御好意に対し厚く謝意を表する。

(昭和 19 年 3 月 19 日受付)

研削砥石の組織に関する実験⁽¹⁾

(昭和 18 年 10 月 3 日 新潟臨時大會講演會に於て講演)

正 員 牧 野 吉 孝⁽²⁾

本論文は日本機械學會誌第 47 卷第 324 号 (昭 19-4) に掲載の論文要報を以て論文に代へる。

(1) Experiment on the Structure of Grinding Wheel.

(2) Yoshitaka MAKINO, Member. The Hitachi Work, Ltd. 日立製作所。