ら(第2報参照), 以下の解法が適用せられる範囲は慣性項が粘性項にくらべて無視されるようなレイノルズ数のきはめて低い場合に限られる. 第5図に示すごとく座標軸を選び, 速度 v を次式で近似する.

$$v = (a^2b^2 - b^2x^2 - a^2z^2)(A + Bx) \dots\dots\dots (13)$$

逸散するエネルギー I は管の断面の単位厚さの流体について

$$I = \mu \int \int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{R+x} \right)^2 \right] (R+x) dx dz$$

流量 Q は $Q = \int \int v dx dz$

積分は管の断面について行う. (13) を代入して積分し, いままで行ったと同様の手続の結果次の解を得る.

$$\frac{v}{v_m} = 2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right) \left[1 - \frac{(a^2 + 2b^2)}{(a^2 + 3b^2)} \frac{x}{R} + \dots \right] \dots\dots\dots (14)$$

$$Q = - \frac{\pi a^3 b^3}{4(a^2 + b^2)} \frac{1}{\mu R} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$\cdot \left[1 + \frac{(a^4 + 2a^2b^2 - 2b^4)}{6(a^2 + b^2)(a^2 + 3b^2)} \frac{a^2}{R^2} + \dots \right] \dots\dots (15)$$

ここに v_m は平均流速である.

特に $R \rightarrow \infty$ とすれば, 直管の場合の解⁽⁵⁾と一致する.

4. 結 論

(i) 種々の断面の管内の流れにつき, 速度分布, 圧力降下, 流量の関係を求めた.

(ii) 偏心二重管内の層流に対しては良好な近似解が

求められた.

(iii) く形断面⁽⁶⁾および二曲面ではさまれた二次元流れ⁽⁷⁾については, 速度分布を直交かん数系で近似することによって厳密解に到達した.

(iv) かようにく形断面の直管および二曲面ではさまれた二次元流れのごとく, 速度分布を直交かん数系で近似した場合には, 本方法により厳密解に到達することも可能である. 一方直交かん数系で近似できない場合には速度分布をいくつかの未定係数をふくんだ式で近似することにより近似解が得られる. これらの場合に境界条件を満足するように速度分布を仮定しなくてはならないことはもちろんである.

終りに, 懇篤な御指導を賜わった沼知福三郎先生に厚く感謝の意を表する次第である.

注:—

- (1) 昭和23年4月1日 第25期總會講演會において講演, 原稿受付 昭和23年9月3日.
- (2) 准員, 東北大學高速力學研究所.
- (3) 筆者, 粘性流體の一基礎式について.
- (4) たとえば A.S. Ramsey, A Treatise on Hydromechanics. Part II, Hydrodynamics, 1935, 384 頁.
- (5) 同上, 385 頁.
- (6) 本間譯. ミュラー, 粘性流體の力學, 昭 18, 84 頁.
- (7) S. Goldstein, Modern Developments in Fluid Dynamics, 1938, Vol. 1, 315 頁.

直管および曲管内の層流理論 (第2報)⁽¹⁾

伊 藤 英 覺⁽²⁾

Theory on Laminar Flows through Straight or Curved Pipes (2nd Report)

by Hidesato ITÔ

The author gives a theoretical investigation to laminar flows which run through curved pipes of elliptic and rectangular cross-sections whose axes are curved in circular forms.

In each case, equations of motion were solved by the method of successive approximation, and the behavior of the fluid flowing through curved pipes was clarified numerically.

緒 言

曲った管内の流れは直管の場合にくらべて著しく異なっているが, 今日までのところ流れが比較的明らかにされているのは円形断面の曲管についてだけである. ここでは円管以外の曲管内の流れを取り扱い, 相似則の成立および二次流の二点について流れの詳細を明らかにした.

1. 相 似 則

第1図に示すように円柱座標をとる. 管の中心軸の曲率半径を R とする. r, ϕ, z 方向の速度成分をそれ

ぞれ u, v, w とすれば, Navier-Stokes 方程式は

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.1)$$

$$\text{ただし } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

上式中 p は圧力, ν は動粘性係数, ρ は流体の密度を表わすものとする.

連続の式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

流線かん数 ψ を導入すれば(1.2)は

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.3)$$

となる。

今, a を管の断面を代表する長さとし (たとえば円管ならば管の半径等), V_0 を管軸方向の速度成分を代表する速さとして速度 u , v , w および長さ r , z

を次のごとくおき無次元表示にうつる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\nu}{a} u', \quad v = V_0 v', \quad w = \frac{\nu}{a} w' \\ r &= ar', \quad z = az' \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

(1.1)の第1式と第3式から圧力 p を消去すれば

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial z'} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial r'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) - \frac{\partial}{\partial r'} \left(u' \frac{\partial w'}{\partial r'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) \right] - \left(\frac{V_0 a}{\nu} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{v'^2}{r'} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z'} \left(\nabla'^2 u' - \frac{u'}{r'^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r'} \left(\nabla'^2 w' \right) \quad (1.5) \end{aligned}$$

(1.1)の第2式は

$$\begin{aligned} u' \frac{\partial v'}{\partial r'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{u' v'}{r'} &= -\frac{a}{\mu V_0 r'} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\ &+ \left(\nabla'^2 v' - \frac{v'}{r'^2} \right) \quad (1.6) \end{aligned}$$

次に管の切口を代表する長さ a がコイルの半径 R にくらべて微小であり, a/R の高次のべきは無視できるものとする。

$$r' = \frac{R}{a} + x'$$

において原点を管の中心に移すと, (1.5), (1.6)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial z'} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) - \frac{\partial}{\partial x'} \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) \right] - \left(\frac{V_0 a}{\nu} \right)^2 \frac{a}{R} \frac{\partial}{\partial z'} (v'^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right) \quad (1.5') \end{aligned}$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} = -\frac{a^2}{\mu V_0 R} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right) \quad (1.6')$$

$$\text{連続の式は } \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \quad (1.7)$$

同一の断面を有し, かつ同一の圧力降下を示す直管の

平均流速 (もしくは最大流速等々) を V_0 に選ぶと,

$$V_0 = -\frac{a^2}{\mu} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \phi} A$$

とかくことができる。ここに A は管の断面の形のみによって定まるある常数である。したがって(1.6')は

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} = \frac{1}{A} + \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right) \quad (1.6'')$$

とかくことができる。解くべき方程式は(1.5'), (1.6'') (1.7)である。ところが断面が相似な管では A が等しいから, 解には無次元量 $[(V_0 a / \nu)^2 \cdot a / R]$ がパラメータとして入ってくるだけである。この量を K で表わすならば, 解は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\nu}{a} u'(x', z', K), \quad w = \frac{\nu}{a} w'(x', z', K) \\ \frac{v}{V_0} &= v'(x', z', K), \quad \text{したがって} \\ Q/Q_s &= Q'(K) \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

ここに $K = (V_0 a / \nu)^2 \cdot a / R$ で Q は曲管の流量, Q_s は同一の断面を有する直管の同一の圧力降下に対する流量である。

このように曲率半径の大きい曲管では流れは無次元量 K のみによって記述される。よって次のことがいえる。

“断面が相似な曲管内を流れる層流では, K の等しいとき管軸方向の速度分布 v/V_0 , 二次流のレイノルズ数 ua/ν , wa/ν , および流量比 Q/Q_s は, 半径比 a/R に無関係に同一の値をとる”。

すなわち相似則の成立⁽³⁾は円形断面の管のみには限らないのである。

2. 方程式の解法

方程式(1.5'), (1.6'), (1.7)を近似的に解くために, u' , v' , w' を K のべき級数に展開する。すなわち

$$\left. \begin{aligned} u' &= u_1' K + u_2' K^2 + \dots \\ v' &= v_0' + v_1' K + v_2' K^2 + \dots \\ w' &= w_1' K + w_2' K^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

(2.1)を(1.5'), (1.6')に代入し, K の各べきを比較すると次の方程式が得られる。

(1°) 第零次近似

$$\frac{\partial^2 v_0'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v_0'}{\partial z'^2} = -\frac{a^2}{\mu V_0 R} \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad (2.2)$$

(2°) 第1次近似

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z'} (v_0'^2) &= \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial^2 u_1'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u_1'}{\partial z'^2} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial^2 w_1'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w_1'}{\partial z'^2} \right) \quad (2.3) \end{aligned} \right.$$

$$u_1' \frac{\partial v_0'}{\partial x'} + w_1' \frac{\partial v_0'}{\partial z'} = \frac{\partial^2 v_1'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v_1'}{\partial z'^2} \quad (2.4)$$

二次流の速度成分 u_1', w_1' は

$$u_1' = -\frac{\partial \psi_1'}{\partial z'}, w_1' = \frac{\partial \psi_1'}{\partial x'} \quad (2.5)$$

であるから (2.3) は

$$\frac{\partial^4 \psi_1'}{\partial x'^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi_1'}{\partial x'^2 \partial z'^2} + \frac{\partial^4 \psi_1'}{\partial z'^4} = 2v_0' \frac{\partial v_0'}{\partial z'} \quad (2.3')$$

となる。

(3°) 第2次近似 第1近似の場合と同様にして

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \psi_2'}{\partial x'^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi_2'}{\partial x'^2 \partial z'^2} + \frac{\partial^4 \psi_2'}{\partial z'^4} = 2 \frac{\partial}{\partial z'} (v_0' v_1') \\ + \frac{\partial}{\partial x'} (u_1' \frac{\partial w_1'}{\partial x'} + w_1' \frac{\partial u_1'}{\partial z'}) \\ - \frac{\partial}{\partial z'} (u_1' \frac{\partial u_1'}{\partial x'} + w_1' \frac{\partial w_1'}{\partial z'}) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_2'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v_2'}{\partial z'^2} = u_2' \frac{\partial v_0'}{\partial x'} + w_2' \frac{\partial v_0'}{\partial z'} \\ + u_1' \frac{\partial v_1'}{\partial x'} + w_1' \frac{\partial v_1'}{\partial z'} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$u_2' = -\frac{\partial \psi_2'}{\partial z'}, w_2' = \frac{\partial \psi_2'}{\partial x'} \quad (2.8)$$

となる。

く形断面曲管内の層流

二辺がそれぞれ $2a, 2b$ なる く形断面の曲管内の流れを取り扱う。く形の中心に原点をとり、管壁を $x = \pm a, z = \pm b$ であらわす。

1. 第零次近似 第零次近似は く形断面の直管の場合と同様である。速度 v_0 は次式によって与えられる⁽⁴⁾。

$$v_0 = -\frac{64a^2b^2}{\mu\pi^4R} \frac{\partial p}{\partial \phi} \sum_{m,n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn(m^2b^2+n^2a^2)} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi z}{2b} \quad (3.1)$$

流量 Q_0 は

$$Q_0 = -\frac{1024ab}{\mu\pi^6R} \frac{\partial p}{\partial \phi} \sum_{m,n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2n^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (3.2)$$

ここで $b/a = k, V_0 = -(64b^2/\mu\pi^4R) \cdot (\partial p/\partial \phi)$ とおき、無次元表示を行えば

$$v_0' = \sum_{m,n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi x'}{2} \cos \frac{n\pi z'}{2k} \quad (3.1')$$

ただし

$$A_{mn} = \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn(m^2k^2+n^2)}$$

である。

2. 第1次近似 微分方程式 (2.3') の右辺に (3.1') を代入して ψ_1' を求める。方程式の厳密な解は容

易に求められるとは思われないので、変分原理に基づいて近似解を求めよう。すなわち方程式 (2.3') を直接解かないで積分

$$I \equiv \int_{-k}^k \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial z'^2} \right)^2 - \psi_1' \frac{\partial}{\partial z'} (v_0'^2) \right\} dx' dz' \quad (3.3)$$

を極小ならしむような ψ_1' を求める⁽⁵⁾。

この変分の意味は次のようである。すなわちカッコの中に連続の式の二乗を加え、次に部分積分を行えば、

$$I = \int \int \left\{ \frac{1}{2} \left[2 \left(\frac{\partial u_1'}{\partial x'} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w_1'}{\partial z'} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1'}{\partial x'} + \frac{\partial u_1'}{\partial z'} \right)^2 \right] - u_1' v_0'^2 \right\} dx' dz'$$

となる。ここで

$x' = x/a, z' = z/a, u_1' = u_1a/\nu K, w_1' = w_1a/\nu K, v_0' = v_0/V_0$ を用いて変数をもとにかえすと、結局 I の変分 δI は

$$\delta I = \delta \int \int \left\{ \frac{\mu}{2} \left[2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 \right] + u_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\rho v_0^2}{R} \right) \right\} dx dz$$

第1項は二次流 u_1, w_1 によって単位時間に逸散されるエネルギー Φ の1/2であり、第2項は軸方向の速度成分 v_0 に基づく求心力により単位時間になされる仕事 W である。よって

$$\delta \int \int \{ \Phi + 2W \} dx dz = 0 \quad (3.4)$$

すなわち二次流によって逸散されるエネルギー Φ と、求心力によってなされる仕事 W の2倍との和は最小値をとる。

方程式の形から、 ψ_1' は x' について偶かん数、 z' について奇かん数であることがわかる。速度成分 u_1', w_1' は管壁上で0となるから、 ψ_1' および $\frac{\partial \psi_1'}{\partial x'}, \frac{\partial \psi_1'}{\partial z'}$ はいずれも管壁で0でなければならない。以上の条件を満足するかん数 ψ_1' を

$$\psi_1' = (x'^2 - 1)(z'^2 - k^2) \sum_{\substack{i=1,3,5,\dots \\ j=1,2,3,\dots}}^{\infty} B_{ij} \cos \frac{i\pi x'}{2} \sin \frac{j\pi z'}{k} \quad (3.5)$$

と書きあらわす。(3.5)を(3.3)に代入し、積分 I を極小ならしむる B_{ij} の値を決定する。それには(3.5)を(3.3)に代入して積分し、 $\partial I/\partial B_{ij} = 0$ から得られる連立方程式を解いて B_{ij} を定めればよい。ここでは特に正方形断面 ($k=1$) の場合について解を求め、最初の6項までとって計算すれば次のようになる。

$$B_{11} = -1.2724 \times 10^{-3}, \quad B_{12} = 0.1398 \times 10^{-3} \\ B_{31} = 0.0864 \times 10^{-3}$$

$$B_{13} = -0.0268 \times 10^{-3} \\ B_{32} = -0.0070 \times 10^{-3} \\ B_{51} = -0.0156 \times 10^{-3}$$

二次流の速度成分 u_1', w_1' は(2.5)により次のようになる。

$$u_1' = -\sum_{ij} B_{ij} (x'^2 - 1) \left\{ 2z' \sin \frac{j\pi z'}{k} \right. \\ \left. + (z'^2 - k^2) \frac{j\pi}{k} \cos \frac{j\pi z'}{k} \right\} \cos \frac{i\pi x'}{2} \quad \dots (3.6)$$

$$w_1' = \sum_{ij} B_{ij} (z'^2 - k^2) \left\{ 2x' \cos \frac{i\pi x'}{2} \right. \\ \left. - (x'^2 - 1) \frac{i\pi}{2} \sin \frac{i\pi x'}{2} \right\} \sin \frac{j\pi z'}{k} \quad \dots (3.7)$$

第2図に正方形断面の場合の二次流を示す。うずは上下対称であって、流体は矢印の方向に流れる。*

第 2 図 正方形断面曲管に生ずる二次流 (ψ_1)

$$** \quad C_{11} = 0.4559 \times 10^{-4}, \quad C_{13} = 0.0521 \times 10^{-4} \\ C_{21} = 0.0116 \times 10^{-4}$$

これより、管軸方向の速度が最大となる位置は中央より外側に偏倚することがわかる。

3. 管内の速度分布および流線 以上に求めた結果は次のように要約される。管軸方向の速度 v は

$$\frac{v}{V_0} = \sum_{m,n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi x'}{2} \cos \frac{n\pi z'}{2k} \\ + K \sum_{\substack{p=1,2,3,\dots \\ q=1,3,5,\dots}}^{\infty} C_{pq} \sin p\pi x' \cos \frac{q\pi z'}{2k} \quad \dots (3.10)$$

二次流に対する流線かん数 ψ は

$$\psi = \nu K (x'^2 - 1) (z'^2 - k^2) \sum_{\substack{i=1,3,5,\dots \\ j=1,2,3,\dots}}^{\infty} B_{ij} \\ \cos \frac{i\pi x'}{2} \sin \frac{j\pi z'}{k} \quad \dots (3.11) ***$$

* 次に軸方向の速度 v_1' を求めよう。前と同様(2.4)を直接解かないで積分

$$I = \int_{-k}^k \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v_1'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1'}{\partial z'} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. + v_1' f(x', z') \right] dx' dz' \quad \dots (3.8)$$

$$\text{ただし } f(x', z') = u_1' \frac{\partial v_0'}{\partial x'} + w_1' \frac{\partial v_0'}{\partial z'}$$

の極小値を求めることにする。この変分の意味は次の通りである。前回同様変数をもとに戻すと

$$\delta \iint \left\{ \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + v_1 \rho \frac{Dv_0}{Dt} \right\} dx dz = 0$$

第1項は速度 v_1 により単位時間に逸散されるエネルギー Φ の1/2であり、第2項は軸方向の加速度にともないなされる仕事 W である。よって

$$\delta \iint \{ \Phi + 2W \} dx dz = 0 \quad \dots (3.4')$$

すなわちさきと同一の関係が成立している。

次に v_1' を求める。 $f(x', z')$ の形から v_1' は x' の奇かん数であり、 z' の偶かん数であることがわかる。かつ v_1' は管壁上で0とならなくてはならない。以上の関係を満足するかん数を

$$v_1' = \sum_{\substack{p=1,2,3,\dots \\ q=1,3,5,\dots}}^{\infty} C_{pq} \sin p\pi x' \cos \frac{q\pi z'}{2k} \quad \dots (3.9)$$

とあらわす。これを(3.8)に代入して積分 I を極小ならしむように係数 C_{pq} を定める。 $k=1$ なる正方形断面の場合には C_{pq} は次のようになる。*

$$C_{15} = 0.0012 \times 10^{-4} \\ C_{23} = -0.0003 \times 10^{-4} \\ C_{31} = -0.0036 \times 10^{-4}$$

***二次流の速度成分 u, w は

$$u = -\frac{2\nu}{a} K z' (x'^2 - 1) \sum_{ij} B_{ij} \cos \frac{i\pi x'}{2} \sin \frac{j\pi z'}{k} \\ - \frac{\nu\pi}{ak} K (x'^2 - 1) (z'^2 - k^2) \sum_{ij} B_{ij} \cdot j \cos \frac{i\pi x'}{2} \cos \frac{j\pi z'}{k} \quad \dots (3.12)$$

$$w = \frac{2\nu}{a} K x' (z'^2 - k^2) \sum_{ij} B_{ij} \cos \frac{i\pi x'}{2} \sin \frac{j\pi z'}{k} \\ - \frac{\nu\pi}{2a} K (x'^2 - 1) (z'^2 - k^2) \sum_{ij} B_{ij} \cdot i \sin \frac{i\pi x'}{2} \sin \frac{j\pi z'}{k} \quad \dots (3.13)$$

管の切口に沿ってあらわれる流線は第2図に示し

た. 正方形断面の場合のうずの中心は $x=0, z=\pm 0.45b$ で与えられる. 次に z' 軸に垂直な平面から見た流線を求めよう. 流線は

$$\frac{dx}{u} = \frac{(R+x)d\phi}{v} \quad *$$

$$\frac{d\phi}{dx'} = \frac{\sum_{m,n} A_{mn} \cos \frac{m\pi x'}{2} \cos \frac{n\pi z'}{2k}}{n(1-x'^2) \left[2z' \sum_{i,j} B_{ij} \cos \frac{i\pi x'}{2} \sin \frac{j\pi z'}{k} + \frac{\pi}{k} (z'^2 - k^2) \sum_{i,j} B_{ij} j \cos \frac{i\pi x'}{2} \cos \frac{j\pi z'}{k} \right]}$$

となる. ここに n はレイノルズ数 $V_0 a / \nu$ である. x' に対する ϕ の増減はレイノルズ数 n に逆比例し, 半径比 a/R に関係である. 第2図の一番外側と一番内側の流線について等傾線法により積分曲線を求めると第3図に示すようになる. この流線を $n=300$ の場合

第3図 長方形断面の場合の流線

第4図 正方形断面曲管の流れ ($n=300$)

について第4図に示す. ϕ の増減がレイノルズ数に逆比例しているから, レイノルズ数が高いほど流線は早く巻きつき, 二次流は盛である.

4. だ円形断面曲管内の層流

管の切口のだ円を $(x/a)^2 + (z/b)^2 = 1$ であらわす.

1. 第零次近似 真直な管の場合と同一である.

管軸方向の速度 v_0 は

*から求められる. 半径比 a/R が小さい場合を取り扱っているから近似的に

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{v_0}{Ru}$$

とおける. さきに求めた結果をつかえば,

$$v_0 = - \frac{(a^2 b^2 - b^2 x'^2 - a^2 z'^2)}{2(a^2 + b^2) \mu R} \cdot \frac{\partial p}{\partial \phi}$$

V_0 として平均流速をえらび, $x' = x/a, z' = z/b$ とおき無次元表示にうつれば

$$v_0' = v_0 / V_0 = (1 - x'^2 - m^2 z'^2) \quad (4.1)$$

ただし $m = a/b$ で, 平均流速 V_0 は

$$V_0 = - \frac{a^2 b^2}{4(a^2 + b^2)} \cdot \frac{1}{\mu R} \cdot \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad (4.2)$$

である. 流量 Q_0 は

$$Q_0 = - \frac{\pi a^3 b^3}{4(a^2 + b^2)} \cdot \frac{1}{\mu R} \cdot \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad (4.3)$$

2. 第1次近似 微分方程式(2.3')の右辺に(4.1)

を代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \psi_1'}{\partial x'^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi_1'}{\partial x'^2 \partial z'^2} + \frac{\partial^4 \psi_1'}{\partial z'^4} \\ = -16m^2 z' (1 - x'^2 - m^2 z'^2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

管壁では ψ_1' は0であり, また u_1', w_1' も0であるから $\partial \psi_1' / \partial x', \partial \psi_1' / \partial z'$ も0でなくてはならない.

この条件を満足する(4.4)の解は,

$$\psi_1' = \frac{1}{72} (1 - x'^2 - m^2 z'^2)^2 z' (-a_0 + a_2 x'^2 + b_0 z'^2) \quad (4.5)$$

で与えられる. a_0, a_2, b_0 の数値は第1表に与えた.

第1表 ψ_1' の係数値

m	a_0	a_2	b_0
0.2	1.454 9	0.102 7	0.051 4
0.5	4.684 4	0.395 2	0.560 4
0.8	4.758 1	0.793 0	0.895 9
1.0	4	1	1
1.4	2.623 6	1.135 9	1.113 6
2.0	1.480 4	0.954 3	1.207 3
3.0	0.712 6	0.584 7	1.284 4

(4.5)から二次流の速度成分 u_1', w_1' はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned} u_1' = \frac{1}{72} (1 - x'^2 - m^2 z'^2) [\{ a_0 - (a_0 + a_2) x'^2 \\ + a_2 x'^4 \} + \{ - (5m^2 a_0 + 3b_0) + (5m^2 a_2 \\ + 3b_0) x'^2 \} z'^2 + 7m^2 b_0 z'^4] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$w_1' = \frac{1}{72} (1 - x'^2 - m^2 z'^2) x' z' [2(2a_0 + a_2) - 6a_2 x'^2 - 2(m^2 a_2 + 2b_0) z'^2] \quad (4.7)$$

第 5 図 だ円形断面曲管に
生ずる二次流 (ψ_1)

第5図に $a=2b$ の場合の二次流を示す。うずは上下対称である。流れの方向は矢印で示した。うずの中心を求めるには $x'=0, u_1'=0$ としたときの z' の値を求めればよい。(4.6)により

$$a_0 - (5m^2 a_0 + 3b_0) z'^2 + 7m^2 b_0 z'^4 = 0$$

これをといて z' を求めると、うずの中心の位置は第6図に示すようになる。うずの中心の位置は長短軸比 m

第 6 図 だ円形断面曲管に生ずるうずの
中心の位置 z/b

の変化によってほとんど変化しないことがわかる。次に(2.4)に(4.1), (4.6), (4.7)を代入して軸方向の速度成分 v_1' を求めると,

$$v_1' = \frac{1}{1440} (1 - x'^2 - m^2 z'^2) x'$$

第 2 表 v_1' の係数値

m	C_{00}	C_{20}	C_{40}	C_{60}	C_{02}
0.5	28.283	-26.250	9.243 6	-0.367 0	-16.704
1.0	19	-21	9	-1	-21
2.0	4.354 8	-6.961 9	4.206 1	-0.894 4	-7.845 1
m	C_{22}	C_{42}	C_{04}	C_{24}	C_{06}
0.5	12.351	-2.505 2	3.519 6	-1.491 6	-0.259 0
1.0	18	-3	9	-3	-1
2.0	9.228 9	-2.395 7	-1.639 6	6.344 0	21.669

$$\times \left[\sum_{j=0,2,\dots}^6 \left(\sum_{i=0,2,\dots}^{6-j} C_{ij} x'^i \right) z'^j \right] \quad (4.8)$$

第2表に C_{ij} の数値をあたえる。 v_1' は z' について偶かん数であるが x' について奇かん数であるので v_1' のために流量は変化しない。すなわち

$$Q_1' = 0 \quad (4.9)$$

3. 第2次近似 ψ_2' を定める方程式(2.6)の右辺は第1近似の結果を使って計算することができる。 ψ_2' の満足すべき境界条件は管壁で ψ_2' が0であり、かつ $\partial\psi_2'/\partial x', \partial\psi_2'/\partial z'$ も同様に0となることである。以上の関係を考慮すれば結局求める ψ_2' は次のようになる。

$$\psi_2' = \frac{1}{14\,515\,200} (1 - x'^2 - m^2 z'^2)^2 x' z' \left[\sum_{j=0,2,\dots}^8 \left(\sum_{i=0,2,\dots}^{8-j} k_{ij} x'^i \right) z'^j \right] \quad (4.10)$$

k_{ij} の値を第3表に示す。第7図に $a=2b$ の場合の ψ_2' を示す。このような流れが第5図の二次流に加わるのである。

第 3 表 ψ_2' の係数値

m	k_{00}	k_{20}	k_{40}	k_{60}	k_{80}
0.5	-6 919.6	1 473.0	-372.68	123.76	-7 261.3
1.0	-4 979	2 792	-777	134	-5
2.0	-530.97	949.46	-555.13	154.32	-17 260
m	k_{02}	k_{22}	k_{42}	k_{62}	k_{04}
0.5	4 817.9	-945.84	170.98	-34.648	-1 111.3
1.0	2 792	-1 554	402	-20	-777
2.0	545.27	-394.04	9.226	56.700	991.28
m	k_{24}	k_{44}	k_{06}	k_{26}	k_{08}
0.5	170.05	-27.062	108.18	-12.276	-4.140 6
1.0	402	-30	134	-20	-5
2.0	-1 355.5	405.23	152.91	926.92	917.66

4. 管内の速度分布および流線 以上の結果は次のように要約される。流線かん数 ψ は

$$\psi = \frac{1}{72} (1 - x'^2 - m^2 z'^2)^2 z' (-a_0 + a_2 x'^2 + b_0 z'^2) \cdot \nu K + \frac{1}{14\,515\,200} (1 - x'^2 - m^2 z'^2)^2 x' z' \left[\sum_{j=0,2,\dots}^8 \left(\sum_{i=0,2,\dots}^{8-j} k_{ij} x'^i \right) z'^j \right] \nu K^2 \quad (4.11)$$

二次流の速度成分 u, w は

$$u = \frac{1}{72} (1 - x'^2 - m^2 z'^2) \left[\{ a_0 - (a_0 + a_2) x'^2 + a_2 x'^4 \} + \{ - (5m^2 a_0 + 3b_0) + (5m^2 a_2 + 3b_0) x'^2 \} z'^2 + 7m^2 b_0 z'^4 \right] \frac{\nu}{a} K$$

第 7 図 だ円形断面曲管に生ずる二次流 (ψ_2)

$$-\frac{1}{14\,515\,200}(1-x'^2-m^2z'^2)\left[(1-x'^2-5m^2z'^2)x'\left\{\sum_{j=0,2,\dots}^8\left(\sum_{i=0,2,\dots}^{8-j}k_{ij}x'^i\right)z'^j\right\}+x'z'(1-x'^2-m^2z'^2)\left\{\sum_{j=2,4,\dots}^8\left(\sum_{i=0,2,\dots}^{8-j}k_{ij}x'^i\right)jz'^{j-1}\right\}\right]\frac{\nu}{a}K^2+\dots\quad(4.12)$$

$$w=\frac{1}{72}(1-x'^2-m^2z'^2)x'z'[2(2a_0+a_2)-6a_2x'^2-2z'^2(m^2a_2+2b_0)]\frac{\nu}{a}K+\frac{1}{14\,515\,200}(1-x'^2-m^2z'^2)z'\left[(1-5x'^2-m^2z'^2)\left\{\sum_{j=0,2,\dots}^8\left(\sum_{i=0,2,\dots}^{8-j}k_{ij}x'^i\right)z'^j\right\}+x'(1-x'^2-m^2z'^2)\left\{\sum_{j=2,4,\dots}^8\left(\sum_{i=2,4,\dots}^{8-j}k_{ij}\cdot ix'^{i-1}\right)z'^j\right\}\right]\frac{\nu}{a}K^2+\dots\quad(4.13)$$

軸方向の速度成分 v と平均流速 V_0 との比は

$$\frac{v}{V_0}=2(1-x'^2-m^2z'^2)+\frac{1}{1440}(1-x'^2-m^2z'^2)x'\left[\sum_{j=0,2,\dots}^6\left(\sum_{i=0,2,\dots}^{6-j}c_{ij}x'^i\right)z'^j\right]K+\dots\quad(4.14)$$

ここに $m=a/b$, $x'=x/a$, $z'=z/a$ である.

原点をふくみ z 軸に垂直な平面では $w=0$ で、この平面の流線は直ちに求められる. すなわち $z=0$ のとき K^2 以上の項を無視して、

$$u=\frac{1}{72}(1-x'^2)^2(a_0-a_2x'^2)\frac{\nu}{a}K; w=0$$

$d\phi/dx=v_0/Ru$ であるから、

$$d\phi=\frac{144dx'}{n(1-x'^2)(a_0-a_2x'^2)}$$

ここに n はレイノルズ数 V_0a/ν である. $x'=0$ のとき $\phi=0$ とすれば、積分して

$$\phi=\frac{72}{n(a_0-a_2)}\log\left[\frac{(1+x')\left(\sqrt{\frac{a_0}{a_2}-x'}\right)\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}}{(1-x')\left(\sqrt{\frac{a_0}{a_2}+x'}\right)\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}}\right]\quad(4.15)$$

となる. ϕ は半径比 a/R に無関係で、レイノルズ数 n に逆比例する. これを $a=2b$ の場合について第 8 図に示す. 流線は管壁 $x=\pm a$ に漸近する.

第 8 図 だ円形断面曲管の中央平面における流れ

このような特殊な位置にない一般の流線については

$$\frac{d\phi}{dx'}=144/n\{a_0-(a_0+a_2)x'^2+a_2x'^4\}+\{-(5m^2a_0+3b_0)+(5m^2a_2+3b_0)x'^2+7m^2b_0z'^4\}\quad(4.16)$$

$a=2b$ の場合に、第 5 図の一番外側の流線について等傾線法により積分曲線を求め、この流線を実際に書いたのが第 9 図である. レイノルズ数の高いほど二次流がはげしいことがわかる.

第 9 図 だ円形断面曲管の流れ

5. 適用範囲

以上の結果は K の昇べき級数に展開しているため、 K のあまり大きい値に対しては適用できない.

これらが数値的に正しい関係をあらわすためには、

円形断面の場合 $K \leq 40$

く形断面の場合 $K \leq 600$

であることが必要である。両者で K のとり得る範囲が大そうちがうように見えるが、これはだ円形断面の場合には V_0 を平均流速にえらんであるのに反しく形断面の場合にはそうでないからである。

結 論

(1) 断面が相似な曲管では相似則が成立し、無次元量 $K = [(V_0 a / \nu)^2 \cdot a / R]$ の等しいとき流れは相似である。このことは円形断面の場合に限らず、断面が相似ならば任意の断面の曲管について成立する関係であることがわかった。

(2) く形断面およびだ円形断面の曲管の流れについて、逐次近似法によって方程式を解き、管内の速度分布と二次流の強さを数量的に明らかにした。

終りに、御指導下さった沼知福三郎先生に厚く感謝の意を表する。

注：—

(1) 昭和 24 年 4 月 4 日、第 26 期定時總會講演會において講演、原稿受付 昭和 24 年 6 月 11 日。

(2) 准員、東北大學高速力学研究所。

(3) たとえば Goldstein, Modern Developments in Fluid Dynamics, Vol. 1, 312 頁, (1938)。

(4) 筆者、直管および曲管内層流 (第 1 報)。

(5) たとえば日高、数値積分法, (下巻)。

移動壁をもつた平行すきま内の流動について⁽¹⁾

浅 沼 強⁽²⁾

On the Flow of Liquid Between Parallel Walls in Relative Motion

by Tsuyoshi ASANUMA

The author deduces some theoretical formulae for the turbulent flow through a fine clearance space (δ) between two parallel walls, one of them being in relative motion to the other at arbitrary angle to the direction of the pressure gradient. Therefore, he applies this formula to the flow through the annular space formed by two concentric pipes in relative rotation, and then obtains an empirical formula for the turbulent flow in such a case using the experimental data of R. J. Cornish.

In case of the flow through the concentric double pipes in relative rotation, if we consider the Reynolds number as an important criterion of the state of flow, it is reasonable to adapt $Re^* = \frac{\bar{w} \cdot \delta}{\nu}$ instead of usual $Re = \frac{\bar{v} \cdot \delta}{\nu}$, where ν is kinematic viscosity, $\bar{w}$ and $\bar{v}$ is resultant and axial mean velocity respectively.

1. 緒 言

圧力こう配と同方向に移動壁のあるすきま流動については、宮津博士⁽³⁾がすでに層流および乱流の場合につき求め、また圧力こう配と直角方向に移動壁のある場合は、すきまが十分小さいものとすれば同心回転二重管内の流動と見なし得るわけで、この乱流の場合については、すでに鈴木博士⁽⁴⁾が理論式と実験結果を、また Cornish⁽⁵⁾氏は詳細な実験結果を発表している。よって、圧力こう配とある任意の角をなして、すきま壁の一面が平行移動するという一般の場合につき、層流および乱流の理論式をまず求めた。次に該理論式を同心回転二重管のすきまに適用し、前述の Cornish の実験値を利用して新しい実験公式を決定すると共に、若干の考察を加えた。

2. 理論式の誘導

(I) 層流 無限に広い二つの壁面の内の流れを考え、圧力こう配の方向に y 軸をとる。したがって圧力 p は y のみのかん数で y 方向に L なる距離の 2 点間の水頭差を h とする。第 1 図において $z=0$ を固定

第 1 図 層流の場合

壁, $z=\delta$ (一定) を移動壁とし、後者は x 軸と θ なる任意の角をなして W の速度で平行移動するものとする。したがって移動壁の分速度はそれぞれ $U=W \cdot \cos \theta$, $V=W \sin \theta$ である。固定壁から任意

の距離 z における流体の分速度をそれぞれ u, v とし、いずれも z のみのかん数とする。また z 方向の分速度