であるから推奨することはできない(第11図F).結局のところ摩耗の改善は鑄鉄をパーライト化してその疲れ強さを向上せしめる以外に方法はなく,これはC:Si:Mnの合理的相互関係で決定する.パーライト化を指示するものとしてはLanz, Emmelの方法があるけれども実用向きではない. Maurer の一般図形は便利ではあるが主要成分 Mn を欠いているから空論に近いものである. 筆者はC:Si:Mnの相互関係を x, y, z の直交軸で示したパーライト出現区域の一般図形を考案したが紙面の都合でその詳細は他日に譲る.

なおNi, Cr, Cuなどのごとく普通鑄鉄には本来含有されない元素を添加した場合も調査して見たが特殊成分の添加により著しく改善されたと見るべきものは見当らない. 優秀成統の代表たる普通鑄鉄 No. 97, 162, 170 と特殊鑄鉄 No. 67, 8, 3 の結果を比較すればおのずから判明する.これを要するにC:Si:Mnの合理的相互関係について十分なる知識経験を有しない人々がただ漫然と特殊成分を添加し,あるいは高Mn, 高Pを目指すのがときは全くいわれない所業である. 以上のとおりで最適共通摩耗試験条件として提案した第6表の数値 P 25 kg/cm², v 500 rpm, 0.465 m/s なる唯一の条件は構造用一般普通鑄鉄なら

びに特殊鑄鉄に対し材質上格段の相違がある場合でも,何らの支障もなくこれを応用しうることは多数の実地試験によって完全に立証されたものと信じている.

9. 結 論

i) 既往発表の摩耗試験条件にはその必然性を立証せるもの見当らず,多種多様な試験片に対する共通試験条件は筆者自らこれを探究確立するの必要に迫られた.

ii) 大越教授の提唱せる摩耗曲面図からヒントを得て $dL/dN=K$, $\partial L/\partial p=0$, $\partial L/\partial v=0$ なる3条件を同時に具現する p, v を探究して第6表の数値を挙げ,これを基準摩耗試験条件として提案した.

iii) 「特定の摩耗数値」を確立普及せしめんがため前記原理をメーターに応用し摩耗計を考案した(特許出願 No. 3078).

注:—

- (1) 原稿受付 昭和24年4月12日.
- (2) 正員, 東京大学講師, 岩手大学講師.
- (3) 鈴木, 摩耗の機構の研究第1報告.
- (4) 大越, 機械学会論文集, 7巻29號.
- (5) 桶瀬, 同上, 摩耗機構の研究第3報第5圖.

ころがり接触について (第1報)⁽¹⁾

穂 坂 衛⁽²⁾

On Rolling Contact (1st Report)

by Mamoru HOSAKA

This paper deals with the calculation of the rolling contact of disks caused by elastic deformation.

First, by the study on the mechanism of rolling contact, it is known that in the load transmitting wheel there always occurs the apparent slippage due to the elastic deformation of the wheels in and near the contact area at any small load and this brings about the loss of energy. Then the condition of the elastic contact of two bodies and the integral equations of distribution of normal and tangential forces are obtained. Under the assumption of Coulomb's friction law, these equations are solved and force distribution is obtained as the functions of external forces and the slip ratio of two wheels or the loss of transmitting energy. The distributions of stress and strain are also calculated.

1. 緒 言

ころがり接触の問題は,車輪のレール上のころがり, 摩擦駆動あるいは,軸受等の力学的問題に関係する. 本論文は駆動力の作用する場合のころがり接触の機構を解析し,材料の弾性に原因する摩擦力を計算するとともに,接触部分に作用する力,ひずみ,応力等の分布を求めようとしたものである.

ころがり摩擦発生の原因として,通常表面の不正によるものと,ころがりによる表面の塑性変形による仕事等があげられているが,これら以外にもなお材料の弾性によるものが大きな要素を占めることは,既にReynolds⁽³⁾も指摘している. この論文では,弾性による部分のみをとりだし,まず接触部分内部の力学的機構の考察を行い,次に接触部に作用する力の分布につ

いて解析し、最後に弾性による すべり の方程式を導いてそれを解いた結果を述べる。

2. すべりの機構

(a) 記号および仮定 二つの円板の半径を R_1, R_2 とし、圧力 N で互に押し合い、円板 (1) にはモーメント M_1 が作用して角速度 ω_1 で回転し、円板 (2) は M_2 なる反対方向のモーメントがかかり、円板 (1) よりの摩擦力によるモーメントとつりあって ω_2 の角速度で回転しているとする(第1図参照)。円板 (1) と (2) とは同じ材料で通常の弾性学の成立する範囲にあるものとする。

(b) エネルギーの伝達とすべり 実験によれば、円板 (1) から円板 (2) に動力の伝達が行われるときは、一般にすべりを伴い、二つの円板の平均円周速度は等しくない。円板のすべりの割合をかりにすべり率と名づけ、

第 1 図

$$s = (R_1\omega_1 - R_2\omega_2) / R_1\omega_1 \quad (2.1)$$

で定義する。

円板 (1) に加わる動力は $M_1\omega_1$ であり、円板 (2) に伝達される動力は $M_2\omega_2$ で、動力の損失の割合は、

$$L = (M_1\omega_1 - M_2\omega_2) / M_1\omega_1 \quad (2.2)$$

これを書きかえ、通常 $s \ll 1$, $M_2/R_2 \approx M_1/R_1$ を考慮すれば、

$$L = s \quad (2.3)$$

すなわち、すべり率が非常に小さい間は、これが動力損失の割合に等しい。言い換えれば、ころがり摩擦は両円板の間に見掛け上すべりを生じているために起こるものである。

(c) 接触部内部の速度分布 車輪 (1) より (2) へ、エネルギーの伝達が行われるときは、接触面内には垂直力のほかに、接線力が作用しなければならない。これらの力のため車輪の表面は回転に伴って伸縮する。車輪の半径も垂直力のため変化するであろう。したがって、車輪の表面の速度は接触部分の内部および近傍においては、車輪表面の平均速度 $R\omega$ より変化する。表面に沿ってのひずみを ϵ_x とすれば、ひずまないときの表面の線素 δ_x は、ひずみのため $\delta_x(1 + \epsilon_x)$ に変化し、これが δt 時間に移動するのであるから表面の速度は

$$u_1 = \frac{\delta_x(1 + \epsilon_x)}{\delta t} = R_1\omega_1(1 + \epsilon_x) \quad (2.4)$$

で表わされる。さらに半径が圧力により短縮したこと

による速度変化は、 ΔR を半径の短縮量とすれば、 $-\omega\Delta R$ で表わせるから表面速度は結局

$$u_1 = R_1\omega_1 \left(1 + \epsilon_x - \frac{\Delta R_1}{R_1} \right) \quad (2.5)$$

となるが、後に証明するごとく、 $\Delta R/R \sim 0.01 \epsilon_x$ の order であるから、通常この項は省略できる。また接線方向のひずみ ϵ_x は、垂直圧力によるもの ϵ_n と、接線方向の力によるもの ϵ_t とに分けることができるから、表面速度は

$$u_1 = R_1\omega_1(1 + \epsilon_n + \epsilon_t) \quad (2.6)$$

となる。車輪 (2) においては、接線力は逆対称になるから、ひずみ ϵ_t の方向も逆になり、表面速度は

$$u_2 = R_2\omega_2(1 + \epsilon_n - \epsilon_t) \quad (2.7)$$

で表わされる。

車輪の接触部内部および近傍の相対速度は、(2.6) (2.7) より

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= (R_1\omega_1 - R_2\omega_2)(1 + \epsilon_n) + (R_1\omega_1 + R_2\omega_2)\epsilon_t \\ &= R_1\omega_1 s(1 + \epsilon_n) + R_1\omega_1(2 - s)\epsilon_t \\ &\approx R_1\omega_1(2\epsilon_t + s) \end{aligned} \quad (2.8)$$

で表わされる (s および ϵ_n はいずれも 1 に対して省略し得るから)。

(d) 接線力の伝達と摩擦法則 接触部分に分布して作用する接線力 t によって、車輪 (1) より車輪 (2) への動力の伝達は可能となり、全接線合力 T は、分布接線力 t を接触領域内で積分して、

$$T = \int t(x) dx \quad (2.9)$$

で得られ、 t は接触領域内の圧力分布を $n(x)$ とすれば、 μ を摩擦係数として、

$$t(x) = \mu n(x) \quad (2.10)$$

なる関係がある。 μ は一般にはすべり速度のかん数であり、すべり速度がある程度以上であれば一定であると考えられる。しかし、すべり速度がほとんど 0 に近い場合は、すべり摩擦係数およびそれと静止摩擦係数との関係は、表面の状態に非常に関係し、いまだ実験も十分でないように思える⁽⁴⁾。ころがりにおいては、この部分のすべり摩擦が重要な役割を演ずることも指摘されている⁽⁵⁾。これらの一般的な場合については第2報にゆずることとし、ここでは簡単にクーロン摩擦法則が成立すると仮定する。すなわち、すべり摩擦係数 μ は一定であり、静止摩擦係数 μ_0 は μ と 0 との間の値をとるものとする。

3. 接触領域内に接線力が分布する場合の圧力の分布の考察

まず接触変形について一般的な考察を行う。両物体に力を加えずに点接触をしているとき、その点を原点にとり座標を第2図のようにとると、物体の輪郭は次

第 2 図

第 3 図

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= x + u_1(x, y, q) \\ \eta_1 &= y_1 + v_1(x, y, q) \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 2)$$

となる。(3・1), (3・2) より x, y を消去すれば変形後の形

$$\eta_1 = g_1(\xi_1, q) \quad (3 \cdot 3)$$

が得られ, 同様に (2) なる物体に対しても

$$\eta_2 = g_2(\xi_2, q) \quad (3 \cdot 4)$$

となる。接触しているための条件として, $\xi_1 = \xi_2$ に対して g_1 と g_2 は同じかん数形をとらねばならぬ。言い換えれば, 第 3 図を参照して明らかなるように, g_1 と g_2 との和は定数 $\alpha(q)$ となる。

$$g_1(\xi, q) + g_2(\xi, q) = \alpha(q) \quad (3 \cdot 5)$$

が成立する。あるいは ξ で微分して,

$$\frac{d}{d\xi} \{g_1(\xi, q) + g_2(\xi, q)\} = 0 \quad (3 \cdot 6)$$

(3・6) が接触変形に際して, 相互間に働く力 q を求める基本方程式である。

いままでは一般の場合について考えたが, 次に第 1 図のような円板が接触し, 相互に圧力 n と接線力 t とが作用する場合を考える。この場合 (3・1) は,

$$y_1 = \frac{x^2}{2R_1}, \quad y_2 = \frac{x^2}{2R_2} \quad (3 \cdot 7)$$

となる。また接触領域は円板の半径に比べてきわめて小さいから, $y \ll x$ であり, 変形量は弾性による微小量であるから, (3・2) のうち微小量を省略して

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{x^2}{2R} + v(x, 0) \quad (3 \cdot 8)$$

とかける。弾性変形量は, 曲率半径にくらべてきわめ

式で表わされる。

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x), \\ y_2 &= f_2(x) \cdots \cdots (3 \cdot 1) \end{aligned}$$

両物体に力が作用して接触を行い, 接触面には互に反対方向に分布した力 q が作用していると考えられる (第 3 図), 変形量を u, v で表わし, 変形後の座標を ξ, η で表わすと, (1) なる物体の輪郭は,

て小さい部分における変形を論ずるのであるから, 半無限平面を境界にもつ弾性体の変形を採用してもさしつかえない。垂直力 $n(s)ds$ による変位 dv は, 次のようになる⁽⁶⁾。

$$\begin{aligned} dv(x) &= -\frac{n(s)ds(\lambda+2\mu)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)} \log x-s \\ &\quad - \frac{n(s)ds}{2\pi\mu} \cdots \cdots (3 \cdot 9) \end{aligned}$$

ここでは λ, μ はラメの弾性定数である。また境界面上 x の負の側に, 一様に働く接線力 t による垂直変位 v は⁽⁷⁾

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{tx}{2(\lambda+\mu)}, & x < 0 \\ v &= 0, & x > 0 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (3 \cdot 10)$$

で与えられる。したがって s なる位置にある接線力 $t(s)ds$ によるたわみは

$$\left. \begin{aligned} dv &= -\frac{t(s)ds}{2(\lambda+\mu)}, & x > s \\ dv &= 0, & x < s \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (3 \cdot 11)$$

(3・9), (3・11) より分布力による変位は, 接触域 ($s = -a \sim b$) 内で積分して (円板 (1) と (2) との弾性率に添え字 1, 2 をつける),

$$\begin{aligned} v_1(x) &= -\frac{\lambda_1+2\mu_1}{2\pi\mu_1(\lambda_1+\mu_1)} \int_{-a}^b n(s) \log x-s \, ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\mu_1} \int_{-b}^a n(s) \, ds - \frac{1}{2(\lambda_1+\mu_1)} \times \\ &\quad \int_{-a}^x t(s) \, ds \cdots \cdots (3 \cdot 12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(x) &= -\frac{\lambda_2+2\mu_2}{2\pi\mu_2(\lambda_2+\mu_2)} \int_{-a}^a n(s) \log x-s \, ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\mu_1} \int_{-a}^b n(s) \, ds + \frac{1}{2(\lambda_2+\mu_2)} \\ &\quad \int_{-a}^x t(s) \, ds \cdots \cdots (3 \cdot 13) \end{aligned}$$

を得る。いま円板 (1) と (2) の弾性率が同一であれば, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \mu_1 = \mu_2 = \mu$ とおき, (3・13), (3・14) より (3・5) を作ると次のごとくなる。

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\lambda+2\mu}{\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_{-a}^b n(s) \log |x-s| \, ds \\ - \frac{1}{\pi\mu} \int_{-a}^b n(s) \, ds = \alpha(n) \cdots \cdots (3 \cdot 14) \end{aligned}$$

二つの物体の弾性係数が等しければ, 圧力分布と接線力分布とは互に独立となることがわかる, (3・14) の右辺も圧力分布のみのかん数となる。(3・14) から (3・6) を作る。積分はいずれも主値をとることを考慮して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-a}^b n(s) \log |x-s| \, ds \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \left\{ \int_{-a}^{x-\varepsilon} n(s) \log (x-s) \, ds \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x+\varepsilon}^b n(s) \log(s-x) dx \} \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ n(x) \log \varepsilon - n(x) \log \varepsilon + \int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{n(s)}{x-s} ds \right. \\
& \quad \left. + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{n(s)}{x-s} ds \right\} = \int_{-a}^b \frac{n(s)}{x-s} ds
\end{aligned}$$

となるから (3・6) は・

$$x \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\lambda + 2\mu}{\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_{-a}^b \frac{n(s) ds}{x-s} = 0 \quad (3 \cdot 15)$$

これが圧力分布を与える積分方程式である。これを解くために

$$x - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \cos \vartheta', \quad s - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \cos \vartheta \quad (3 \cdot 16)$$

とおけば (3・15) は

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a+b}{2} \cos \vartheta' + \frac{b-a}{2} \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\
& - \frac{\lambda + 2\mu}{\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^\pi \frac{n(\vartheta) \sin \vartheta}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta} d\vartheta = 0 \quad (3 \cdot 17)
\end{aligned}$$

となる。圧力は接触域の両端では消失すると考えられるから、 $n(-a) = n(b) = 0$ 、あるいは $\vartheta = 0, \pi$ で $n = 0$ の条件を附する。これを満足する解として

$$n(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} n_{k-1} \sin k\vartheta \quad (3 \cdot 18)$$

を仮定して、(3・17)に入れ、そこに表われる次の積分をまず計算する。

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_0^\pi \frac{\sin k\vartheta \sin \vartheta}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta} d\vartheta = \\
& - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\{\cos(n+1)\vartheta - \cos(n-1)\vartheta\}}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta} d\vartheta, \quad (3 \cdot 19)
\end{aligned}$$

しかるに公式⁽⁸⁾

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta = -\pi \frac{\sin n\theta'}{\sin \theta'} \quad (3 \cdot 20)$$

を用いれば、(3・19) は

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \vartheta'} \left\{ \sin(n+1)\vartheta' - \sin(n-1)\vartheta' \right\} \\
& = \pi \cos n\vartheta' \quad (3 \cdot 21)
\end{aligned}$$

となるから、(3・17) は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{b-a}{2} + \left\{ \frac{a+b}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right. \\
& \quad \left. - n_0 \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \right\} \cos \vartheta' - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \sum_{k=2}^{\infty} n_{k-1} \times \\
& \quad \cos k\vartheta' = 0 \quad (3 \cdot 22)
\end{aligned}$$

(3・22) が ϑ' のいかにんに関せず成立するためには、

$$\begin{aligned}
& a = b \\
& n_0 = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\
& n_k = 0 \quad k \geq 1 \quad (3 \cdot 23)
\end{aligned}$$

が成立しなければならない。圧力分布は (3・18), (3・23) より

$$n = n_0 \sin \vartheta = n_0 \sqrt{1 - (x/a)^2} \quad (3 \cdot 24)$$

となり、だ円型分布をしている。全圧力を N とすれば、

$$N = \int_{-a}^a n dx = n_0 \int_{-a}^a \sqrt{1 - (x/a)^2} dx = \frac{1}{2} \pi n_0 a \quad (3 \cdot 25)$$

(3・23) および (3・25) より

$$n_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) N} \quad (3 \cdot 26)$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot N} \quad (3 \cdot 27)$$

が求まる。ここで n_0 最大圧力、 a は接触部分の半分の長さである。

(3・23), (3・25), (3・26) は、法線圧力だけが作用する場合のいわゆるヘルツの圧力分布の式と同じである⁽⁹⁾。この解には変位を表わす (3・9), (3・11) の式に平面変形の場合を用いたが、円板の場合は平面応力の場合であるから、 λ を $2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$ とおきかえ⁽¹⁰⁾、ラメの弾性定数の代りに普通の縦弾性係数 E を用いて書き表わせば

$$n_0 = \sqrt{\frac{E}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) N} \quad (3 \cdot 28)$$

$$a = \sqrt{\frac{8}{\pi E} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot N} \quad (3 \cdot 29)$$

となる。ここで N は単位厚さの垂直力である。

次に圧力 N による半径 R の縮み ΔR を計算しよう。境界面より内部 R の距離を固定したとき、圧力 $n(s) ds$ による表面の変位は⁽¹¹⁾

$$dv = \frac{2n(s) ds}{\pi E} \log \frac{R}{x-s} - \frac{(1+\nu)n(s) ds}{\pi E} \quad (3 \cdot 30)$$

で与えられる。 ν はポアソン比である。(3・24) の圧力分布による $x=0$ のたわみは次のようになる。

$$\begin{aligned}
\Delta R &= \frac{n_0}{E} \left\{ \log \frac{R}{a} + \frac{1}{2} + \log 2 \right\} \\
& - \frac{1+\nu}{\pi E} N = \frac{N}{\pi E} \left\{ 2 \log \frac{2R}{a} - \nu \right\} \quad (3 \cdot 31)
\end{aligned}$$

また接線力の最大は μn (μ はこの場合同はずり摩擦係数) であるから、これによるたわみは $x=0$ おいては (3・11) を平面応力の場合になおして

$$|\Delta R| = \frac{1-\nu}{2E} \cdot \mu N \quad (3 \cdot 32)$$

となる。したがって半径縮みの量は

$$\Delta R_{\max} \leq \frac{N}{\pi E} \left\{ 2 \log \frac{2R}{a} + \frac{\pi(1-\nu)}{2} \mu - \nu \right\} \quad (3 \cdot 33)$$

また接線力による x 方向のひずみは (4・19) より $\varepsilon \sim 2\mu n_0/E$ であるから order を比較すると,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &\sim 2\mu \sqrt{\frac{N}{2\pi RE}} \\ \frac{\Delta R_{\max}}{R} &\sim \frac{N}{\pi ER} \left\{ -\log \varepsilon_i + \frac{\pi(1-\nu)}{2} \mu - \nu \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 34)$$

ε_i は 0.001 の order であるから $\frac{\Delta R_{\max}}{R} \sim 0.01 \varepsilon_i$ の order であり, したがって (2・5) の $\Delta R/R$ は ε_i に対して省略できる.

4. 接線力の分布および すべり率との関係

両車輪の速度差がある程度大きければ, その接触領域内はすべて すべり速度 をもっているから, 摩擦係数一定なるゆえ, 接触面に作用する接線力も一定で, μN の大きさであるが, 速度差が小さくなると, 接触部内に相対静止部分が生じてくるようになる. 第 4 図に速度分布図を示す. そうなると, 伝達される接

第 4 図

線力は次第に減少してくる. 相対すべり速度がなくなった部分の接線力による接線方向ひずみを ε_{i0} とすれば, (2・8) において, $u_1 - u_2 = 0$ において

$$\varepsilon_{i0} = -\frac{1}{2}s \quad (4 \cdot 1)$$

となることがわかる. またこの部分 (第 4 図の A~C 部分) は静止摩擦力が作用し, すべり接触をしている部分 C~B 間は, すべり摩擦が作用している. したがって, C~B 部分の接線力分布は, 接触部分の中央に原点をとると,

$$t = \mu n(x) = \mu n_0 \sqrt{1 - x^2/a^2}, \quad (-a \leq x \leq c) \quad (4 \cdot 2)$$

で表わされる. 一方 A~C 間は, ひずみが (4・1) で規定されるように静止摩擦力が作用していると考えることができる. ここで未知かん数 $f(x)$ を導入して,

A~C 間の接線力分布を次のように仮定する (μ_0 は静止摩擦係数).

$$t = \mu_0 n(x) = \mu_0 \{ \sqrt{1 - x^2/a^2} - f(x) \}, \quad (c \leq x \leq a) \quad (4 \cdot 3)$$

(4・2), (4・3) の接線力分布によって生ずるひずみは, 力の作用点の近傍においては, 接触部分の長さ $2a$ が, 円板の半径 R にくらべてきわめて小さいから, 直線境界をもった半無限弾性体のひずみで代用してもさしつかえない. 1 点 x に作用する接線力 $t(x)dx$ により, 他の点 ξ に生ずる接線方向のひずみ $d\varepsilon_i$ は

$$d\varepsilon_i = \frac{2}{\pi E} \frac{t(x)dx}{x - \xi} \quad (4 \cdot 4)$$

で表わせる⁽¹²⁾. したがって (4・2), (4・3) の分布接線力による境界上のひずみ $\varepsilon_i(\xi)$ は,

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{2}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{t(x)dx}{x - \xi} = \frac{2\mu_0}{\pi E} \left\{ \int_{-a}^c \frac{\sqrt{1 - x^2/a^2}}{x - \xi} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_c^a \frac{\sqrt{1 - x^2/a^2} - f(x)}{x - \xi} dx \right\} \\ &= \frac{2\mu_0}{\pi E} \left\{ \int_{-a}^a \frac{\sqrt{1 - x^2/a^2}}{x - \xi} dx - \int_c^a \frac{f(x)dx}{x - \xi} \right\} \end{aligned} \quad (4 \cdot 5)$$

で表わせる. 積分はいずれも主値をとるものとする. 以下も同様. (4・5) の右辺の第 1 の積分は, (3・19), (3・21) を用いれば $-\pi\xi/a$ で表わせるから, (4・5) は

$$\varepsilon_i(\xi) = -\frac{2\mu_0}{\pi E} \left\{ \frac{\pi\xi}{a} + \int_c^a \frac{f(x)dx}{x - \xi} \right\} \quad (4 \cdot 6)$$

となる. しかるに A~C 間のひずみ ε_{i0} は (4・1) により一定値 $-\frac{1}{2}s$ をとるから, $c \leq x \leq a$ では,

$$\frac{s}{2} = \frac{2\mu_0}{\pi E} \left\{ \frac{\pi\xi}{a} + \int_c^a \frac{f(x)dx}{x - \xi} \right\} \quad (4 \cdot 7)$$

となる. また $f(x)$ は, 力が連続していると考えて $x=a$ および $x=c$ において $f=0$ でなければならぬ. (4・7) と, この条件が, $f(x)$, s , c の関係を定める積分方程式である. これを解くため次の変数変換

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}(a+c) &= \frac{1}{2}(a-c)\cos\vartheta, \\ \xi - \frac{1}{2}(a+c) &= \frac{1}{2}(a-c)\cos\vartheta' \end{aligned} \quad (4 \cdot 8)$$

を行えば (4・7) は,

$$\begin{aligned} &-\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{c}{a} - \frac{sE}{2\mu_0} \right) - \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{c}{a} \right) \cos\vartheta' \\ &= \int_0^\pi \frac{f(\vartheta)\sin\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\vartheta'} d\vartheta, \end{aligned} \quad (4 \cdot 9)$$

となる. また $\vartheta'=0$, $\vartheta'=\pi$ で $f=0$

これは (3・17) と同形の積分方程式であるから解は

$$f(\vartheta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c}{a} \right) \sin\vartheta, \quad \frac{sE}{2\mu_0} = 1 + \frac{c}{a} \quad (4 \cdot 10)$$

となる。接線力の合力 T は

$$\begin{aligned} T &= \int_{-a}^a t(x) dx = \int_{-a}^a \mu n_0 \sqrt{1-x^2/a^2} dx \\ &\quad - \int_c^a \mu n_0 f(x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \mu n_0 a - \frac{a}{4} \int_0^\pi \left(1 - \frac{c}{a}\right)^2 \mu n_0 \cos \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{\pi}{2} \mu n_0 a \left\{1 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{c}{a}\right)^2\right\} \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 11) \end{aligned}$$

最大接線力の作用するとき、接触領域内で全部すべりが生じているときであるから (4・11) で、 $c=a$ となったときである。

$$T_{\max} = \frac{\pi}{2} \mu n_0 a = \mu N \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 12)$$

(4・11), (4・12) より すべり を生ずる位置 c は

$$\frac{c}{a} = 1 - 2\sqrt{1 - \frac{T}{T_{\max}}} \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 13)$$

より定まる。すべり率 s と接線力 T との関係は (4・10), (4・12) より

$$s = \frac{4\mu n_0}{E} \left\{1 - \sqrt{1 - \frac{T}{T_{\max}}}\right\} \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 14)$$

あるいは、

$$\frac{T}{T_{\max}} = 1 - \left(1 - \frac{Es}{4\mu n_0}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 15)$$

第 5 図

となる。この関係を第 5 図に示す。また s が小さい間(粘着しているとき)は (4・15) より

$$T = \frac{EsN}{2n_0} \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 16)$$

の関係を得る。すなわち接線力とすべり率は比例する。比例定数は車輪とレールの場合では、

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} RNE \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 17)$$

になり、車輪半径と軸重との積の平行根に比例する量である。

次に接線力による表面のひずみ分布を求めよう。これは (4・5) と (4・10) を用いて計算できる。その結果を示せば次のごととき式で表わされる。

$$x \geq a$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(x) &= -\frac{2\mu n_0}{Ea} \left[\sqrt{\left\{x - \frac{1}{2}(a+c)\right\}^2 - \frac{1}{4}(a-c)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{1}(a+c) - \sqrt{x^2 - a^2} \right] \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 18) \end{aligned}$$

$$a \leq x \leq c$$

$$\varepsilon_t(x) = -\frac{\mu n_0}{Ea} (a+c) \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 19)$$

$$c \leq x \leq -a$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(x) &= -\frac{2\mu n_0}{Ea} \left[\frac{1}{2}(a+c) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\left\{x - \frac{1}{2}(a+c)\right\}^2 - \frac{1}{4}(a-c)^2} \right] \quad (4 \cdot 20) \end{aligned}$$

$$-a \geq x$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(x) &= -\frac{2\mu n_0}{Ea} \left[\frac{1}{2}(a+c) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\left\{x - \frac{1}{2}(a+c)\right\}^2 - \frac{1}{4}(a-c)^2} + \sqrt{x^2 - a^2} \right] \\ &\quad \dots\dots\dots (4 \cdot 21) \end{aligned}$$

ここで (4・13) より、 $c/a = 1 - 2(1 - T/T_{\max})^{1/2}$ で求まる。このほかに分布圧力 $n(x)$ による接線方向のひずみ ε_n は、 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = -n(x)$ を考慮して

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{\nu n(x)}{E} = \frac{\nu n_0}{Ea} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad -a \leq x \leq a \\ \varepsilon_n &= 0, \quad |x| \geq a \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 21)$$

である。ここでは ν ポアソン比である。

第 6 図

第 7 図

第 8 図

第 9 図

第 6 図より第 9 図までに (4・10) および (4・18) から (4・21) までにより, $T/T_{\max}=0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ に対する接線力分布および ϵ_t 分布を計算したものを示す。また接触面内のすべり速度は, (2・8) より既に s, ϵ_t が知れているから容易に求めることができる。

実験との比較。実験はほとんど見当らないのでただ一つの Sachs の実験⁽¹³⁾ Nr 464 を例にとる。表面の状態がよくわからないので、必ずしもここに仮定したクーロンの法則が成り立っているかどうかは不明であるが、数値計算と比較する。実験点は第 5 図に示す。

実験の数値は,

$$R_1=R_2=150 \text{ mm, 内板の厚さ}=2.5 \text{ mm,}$$

$$N=6.67/2.5=2.67 \text{ kg/mm, } \mu=0.42$$

計算結果とは数値的には一致しないが、傾向は全く同じである。表面が乱されてくると、同じ接線力に対するすべりは、次第に小さくなると論文の中に書いてあるのは、この計算仮定に一致する方向にあることを示している。

5. 結 語

ころがり接触のうち、特に弾性による部分を取り出して論じた。これは車輪とレールとの間の摩擦粘着ころ軸受や、摩擦駆動機構の力学的な問題とも関連する。本論文では、ころがり接触の力学的機構を明らかにし、伝達される力とすべりとの関係、あるいは接触部の圧力のほかに接線力の分布も求め、円板の応力、ひずみも計算できるようにした。しかし、根本において、すべり摩擦の法則が非常に低速では、十分に明らかでないから、この部分には仮定がある。このことは詳しく実験的にしらべられなければならない。第 2 報ではこれがクーロン法則以外の場合の計算を示す。

終りに種々お世話や討論下さった鉄道技研足田・松平・西野技官に感謝します。

註：一

- (1) 昭和23年4月2日 第25期定時總會講演會において講演、
原稿受付 昭和23年5月29日。
- (2) 鐵道技術研究所。
- (3) Reynolds : Roy. Soc. London. Phil. Trans., vol. 166, p. 155 (1876). or Scientific Papers, vol. 2, p. 10.
- (4) Jacob : Ann. d. Phy., S. 126, (1912).
- (5) Heyn : Z. f. Angew. Math. u. Mech., Bd. 6, S. 308 (1925).
- (6) Love : Elasticity, p. 211.
- (7) Love : loc cit, p. 214.
- (8) Durand : Aerodynamic Theory, vol. 2, p. 173.
- (9) テイモシエンコ : 弾性體の力學, p. 301.
- (10) Leve : Elasticity, p. 208.
- (11) テイモシエンコ : 同上書, p. 70.
- (12) テイモシエンコ : 同上書, p. 65.
- (13) Sachs : Z. f. Angew. Math. u. Mech., Bd. 4, S. 20 (1924).