ころがり接触について(第2報)⁽¹⁾穂 坂 衛⁽²⁾

On Rolling Contact (2nd report)

by Mamoru HOSAKA

In the former report, the mechanism of rolling contact was discussed and the distribution of force, stress, strain and the sliding velocity in the contact area, as well as the relation between the driving force and the rolling friction, were obtained, on the assumption that the sliding friction coefficient does not depend on the sliding velocity (Coulomb's friction law).

But in the case of rolling, there arises very low sliding velocity in the contact area, so the friction law does not always follow Coulomb's law, but rather depends on the state of the surface of contact. So in this report, the problems of rolling contact are discussed for general case. For example, a certain form of friction coefficient being assumed, the relation between the driving force and the slipping ratio, which is equal to the ratio of loss of energy, is calculated and it is in good agreement with Sachs' experiment. Also the distribution of force, stress and strain in the contact area are obtained.

In the last section, the relation between the motion of a wheel and the side force is discussed.

1. 緒 言

この報告はころがり摩擦の発生原因のうち、弾性による部分を解析し、ころがり接触をする2個の円板の接触部分に作用する力、応力、ひずみ、また駆動力とすべり等の関係を求めたものである。これらのことは車輪とレール、ころ軸受、あるいは、摩擦駆動機構等における力学的な問題の基礎をなすものである。

第1報では、接触部に発生する摩擦が、いわゆるクーロン法則に従うものとして解析を進めた。しかしながら、ころがりの際に生ずる接触部のすべり速度は0に近いので、必ずしもクーロン法則には支配されず、表面の状態(物理的、化学的)に大きく左右される。微少すべり速度のすべり摩擦実験はほとんど見受けられないので、まず摩擦係数がすべり速度の一般の関数である場合のころがり接触の解析法を示し、特別な場合として、ある実験結果を参照して、すべり摩擦係数を仮定して解析し、すべり率、ひずみ、接線力の分布等を求めた。最後にころがってゆく方向に直角に力の作用する場合の、円板の運動についての一考察を行った。

2. 座 標、記 号

同じ材料の、半径 R_1, R_2 なる2個の円板が垂直力 N で互に押し合い、半径 R_1 なる円板は M_1 なるモーメントで駆動され、角速度 ω_1 で回転し、半径 R_2 の円板は、 M_2 のモーメントで制動され、 ω_2 なる角速度で回転しているとする(第1図)。

第 1 図

$$s = (M_1\omega_1 - M_2\omega_2) / M_1\omega_1 \quad (2)$$

垂直力、および接線力による円板(1)の周辺の接線方向のひずみを、それぞれ ϵ_n, ϵ_t とすれば、円板の周辺速度は、円板(1)、(2)についてそれぞれ、

$$u_1 = R_1\omega_1(1 + \epsilon_n + \epsilon_t), \quad u_2 = R_2\omega_2(1 + \epsilon_n - \epsilon_t) \quad (3)$$

で表わされ、接触している部分の各点のすべり、速度は、

第 2 図

両円板の平均のすべりの割合をすべり率とし、

$$s = (R_1\omega_1 - R_2\omega_2) / R_1\omega_1 \quad (1)$$

で定義する。また、これは円板(1)より(2)に伝達されるエネルギーの損失(ころがり摩擦による)の割合にほぼ等しい(この前後の部分の所論は、第1報を参照されたい)。すなわち、

$$v_s = R_1\omega_1 (s + 2\epsilon_t) \quad (4)$$

で表わされる。

次に、接触面の中心に座標の原点をとり、接線方向

を x とする (第2図). 接触部は $(-a)$ から $(+a)$ にわたるとし, 弾性変形はいずれも平面応力の場合を考え, 荷重 N, M 等はすべて単位厚さについて考えることにする. 接触部の長さの半分は,

$$a = \sqrt{\frac{8}{\pi E} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} N \quad (5)$$

で表わされ, 圧力分布は,

$$n = n_0 \sqrt{1 - x^2/a^2} \quad (6)$$

で表わされる. n_0 は接触部の中央での最大圧力で

$$n_0 = \sqrt{(E/2\pi)(R_1^{-1} + R_2^{-1})N} \quad (7)$$

で与えられる. E は縦弾性係数である. (5), (6), (7) の成立するのは両円板の弾性率が等しいときだけであり, その場合には接線力分布は, ヘルツの圧力分布を乱さないのである.

接線力の分布を $t(x)$ で表わすと, 圧力 $n(x)$ との間に摩擦の関係が成立し,

$$t(x) = \mu n(x) \quad (8)$$

となる. μ は摩擦係数で, 材料, その表面の性質, すべり速度, 圧力等に関係する. いまの場合, 材料とその表面状態は定まっているものとし, また圧力には一般には大して影響がないから, μ はすべり速度のみの関数と考えて,

$$\mu = f(v_s) \quad (9)$$

と表わす.

3. 基礎方程式とその解法

摩擦力の作用する部分, すなわち接触領域は, 円板の半径にくらべてきわめて小さいから, 荷重の作用する近傍のひずみ, 応力等を論ずるには, 円板の代りに半無限平面の境界をもつ同じ弾性体に作用する同一の荷重によるひずみ, 応力等でおきかえてさしつかえない.

半無限平面の境界上の1点に作用する接線力 T による, 境界上の他の点 ξ における接線方向のひずみは, 弾性論により $(2\pi/E)T/(x-\xi)$ となるから, 分布接線力 $t(x)$ による接線方向のひずみ $\varepsilon_t(\xi)$ は, 次式で表わせる.

$$\varepsilon_t(\xi) = \frac{2}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{t(x) dx}{x - \xi} \quad (10)$$

積分は主値をとるものとする (以下の積分も同様).

(10) の中の $t(x)$ を (4), (6), (8), (9) を用いて書き改めれば,

$$\varepsilon_t(\xi) = \frac{2n_0}{\pi E} \int_{-a}^a f[R_1 \omega_1 \{s + 2\varepsilon_t(x)\}] \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \frac{dx}{x - \xi} \quad (11)$$

となる. これが $\varepsilon_t(x)$ を与える積分方程式である. 接線力の合力 T は, $t(x)$ を積分したものであるから,

$$T = \int_{-a}^a t(x) dx = n_0 \int_{-a}^a f[R_1 \omega_1 \{s + 2\varepsilon_t(x)\}] \times \sqrt{1 - x^2/a^2} dx \quad (12)$$

である. (11), (12) が T, ε_t および s との関係を与える基本方程式である.

この方程式の解法は, $f(v_s)$ が v_s に対して一般に線形でないから困難であるが, 次の方法で簡単化することができる. x, ξ を次の関係

$$x = a \cos \theta', \quad \xi = a \cos \theta \quad (13)$$

で θ', θ に変換すると (10) は,

$$\varepsilon_t(\theta) = (2/\pi E) \int_0^\pi t(\theta') \sin \theta' (\cos \theta' - \cos \theta)^{-1} d\theta' \quad (14)$$

となる. 接線力 $t(\theta')$ を区間 $(0, \pi)$ で Fourier sin 級数に展開し,

$$t(\theta') = n_0 \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sin m\theta' \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{で表わし, } \int_0^\pi \sin m\theta' \sin \theta (\cos \theta' - \cos \theta)^{-1} d\theta' \\ = -\pi \cos m\theta \end{aligned}$$

なる関係⁽⁴⁾ を用いれば, (14) は,

$$\varepsilon_t(\theta) = -(2n_0/E) \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cos m\theta \quad (16)$$

となる. 接触領域内部の各点のすべり速度は (4), (16) により,

$$v_s = R_1 \omega_1 s - (4n_0/E) \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cos m\theta \quad (17)$$

となる. (16), (17) は ε_t, v_s を区間 $(0, \pi)$ で Fourier cos 級数に展開したものであるから, 次の関係が成立する.

$$s = (1/R_1 \omega_1 \pi) \int_0^\pi v_s(\theta) d\theta \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \beta_m &= (2/\pi n_0) \int_0^\pi t(\theta) \sin m\theta d\theta \\ &= -(E/\pi n_0) \int_0^\pi \varepsilon_t(\theta) \cos m\theta d\theta \\ &= -(E/2n_0 R_1 \omega_1) \int_0^\pi v_s(\theta) \cos m\theta d\theta \quad (19) \end{aligned}$$

すべり率 s は, すべり速度の θ についての平均と, 平均周速との比に等しい. (15) を (8), (9), (17) を用いて書きかえせば,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sin m\theta &= f\{R_1 \omega_1 s - (4n_0 R_1 \omega_1/E) \times \\ &\quad \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cos m\theta\} \sin \theta \quad (20) \end{aligned}$$

となる. $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で θ に関せず (20) が成立するように β_m, s を定めれば方程式 (11) は解けたことになる. これは, (19) より v_s を仮定して β_m を求め, (20) により $t(\theta)$ を求めて, それより β_m を

求めるとか、(20) を θ の幾つかの点で成立させるようにするとかの近似方法で解くことができる。

接線力の合力は (12), (13), (15) により,

$$T = n_0 a \int_0^\pi \Sigma \beta_n \sin m\theta \sin \theta d\theta = n_0 a \pi \beta_1 / 2 = \beta_1 N \quad (21)$$

となる。 β_1 は T/N に等しい。言い換えれば、平均の摩擦係数を表わしている。以上の諸式より、 T/N と $t(\theta)$, $\varepsilon(x)$ および s との関係を求めることができる。

4. すべり摩擦係数がすべり速度 0 の近傍ですべり速度に比例する場合

非常に低速の摩擦係数を測定した実験はきわめて少なく、それは表面の状態に左右されやすく、実験もきわめて困難のようである。Jacob の実験⁽⁵⁾によれば、表面がきわめてなめらかな場合には、すべり摩擦係数はすべり速度に比例して増大し、すべり速度がわずかに大きくなると大体一定値になるという結果を得ている (第 3 図)。この実験は、黄銅ガラス

第 3 図

等で行われているが、鋼と鋼の場合にも大体同じような経過をたどるものと考え、以下の解析においては簡単のため摩擦係数は始めすべり速度に比例し、あるすべり速度 (v_{s1}) 以上では一定であると仮定する。このような仮定で計算を行うと、表面のなめらかな鋼の円板で、 s と T/N の関係を求めた Sachs の実験結果にきわめてよく一致する。

まず仮定により、すべり摩擦係数は次式で与えられる (第 4 図)。

$$\mu = f(v_s) = \begin{cases} \kappa' v_s, & v_s \leq v_{s1} \\ \mu_1, & v_s \geq v_{s1} \end{cases} \quad (21)$$

第 4 図

次に接触面内部のすべり速度を考える。すべり速度は (4) により $v_s = R_1 \omega_1 \{s + 2\varepsilon_t(x)\}$ で表わされるから、ある点のすべり速度の大きさは、その ε_t に関係する。第 2 図で、A 点附近では、円板 (1) は、表面の接線力のため縮みを生じているから ε_t は負、B 点附近では押しを生じ ε_t は正の値をとる。したがってすべり速度は A 点附近では小さく、B 点附近では大きくなっていると考えられ、AB の間の C 点で、

$v_s = v_{s1}$ になったと考えられる。言い換えれば、AC 間ではすべり速度に比例した摩擦係数が作用し、CB 間では摩擦係数が一定である。したがって、(21) を (11) に代入して、積分を C 点で二つに分けて書くと、

$$\frac{2n_0\mu_1}{\pi E} \left[\int_{-a}^c \frac{\sqrt{1-x^2/a^2}}{x-\xi} dx + \int_c^a \frac{\kappa}{\mu_1} \left\{ s + 2\varepsilon_t(x) \right\} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \frac{dx}{x-\xi} \right] = \varepsilon_t(\xi) \quad (22)$$

となる。ここで c は C 点の座標、 $\kappa = \kappa' R_1 \omega_1$ である。

(22) の始めの積分を $\int_{-a}^c = \int_{-a}^a - \int_c^a$ とおいて変形すれば、次の関係が得られる。

$$\int_c^a \left[\frac{\kappa}{\mu_1} \left\{ s + 2\varepsilon_t(x) \right\} - 1 \right] \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \frac{dx}{x-\xi} = \frac{\pi E}{2n_0\mu_1} \varepsilon_t(\xi) + \frac{\pi \xi}{a} \quad (23)$$

$x=c$ では、 $v_s = v_{s1}$ 。したがって $\mu = \kappa \{s + 2\varepsilon_t(c)\} = \mu_1$ であるから (23) の積分の大括弧の中は、

$$(\kappa/\mu_1) \{s + 2\varepsilon_t(c)\} - 1 = 0 \quad (24)$$

となる。ここで x, ξ を次の関係で ϑ', ϑ に変換する。

$$\begin{aligned} x/a &= \frac{1}{2} \left\{ (1+\eta) + (1-\eta) \cos \vartheta' \right\}, \\ \xi/a &= \frac{1}{2} \left\{ (1+\eta) + (1-\eta) \cos \vartheta \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

ただし、 $\eta = c/a$

(23), (24) は、

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left[\frac{\kappa}{\mu_1} \left\{ s + 2\varepsilon_t(\vartheta') \right\} - 1 \right] \times \\ & \sqrt{1-\frac{1}{4} \left\{ (1+\eta) + (1-\eta) \cos \vartheta' \right\}^2} \times \\ & \frac{\sin \vartheta' d\vartheta'}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta} = \frac{\pi E}{2n_0\mu_1} \varepsilon_t(\vartheta) \\ & + \frac{\pi}{2} \left\{ (1+\eta) + (1-\eta) \cos \vartheta \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$(\kappa/\mu') \{s + 2\varepsilon_t(\pi)\} - 1 = 0 \quad (27)$$

となる。(27) を (26) に代入し、被積分かん数を

$$\frac{2\kappa}{\mu_1} g(\vartheta') \frac{\sin \vartheta' d\vartheta'}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta} \quad (28)$$

と書くと、 $g(\vartheta')$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} g(\vartheta') &= \{ \varepsilon_t(\vartheta') - \varepsilon_t(\pi) \} \\ & \sqrt{1-\frac{1}{4} \left\{ (1+\eta) + (1-\eta) \cos \vartheta' \right\}^2} \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 ε_t を区間 (c, a) 、あるいは ϑ について $(0, \pi)$ で、Fourier 級数に展開する。

$$\varepsilon_t(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos n\vartheta \quad (30)$$

α_n は未知である。これを (29) に代入して $g(\vartheta)$ を

(0, π) 区間で Fourier sin 級数に展開する.

$$g(\vartheta') = -\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sin m\vartheta' \quad (31)$$

この式の β_m は, α_n の一次結合として表わせる.

$$\beta_m = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_{nm} \quad (32)$$

A_{nm} は次の式で表わせる.

$$A_{nm} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ (-1)^n - \cos n\theta \right\} \times \\ \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left\{ (1+\eta) + (1-\eta) \cos \theta \right\}^2} \times \\ \sin m\theta \, d\theta = (-1)^n I_m - \frac{1}{2} I_{m+n} - \frac{1}{2} I_{m-n} \quad (33)$$

$$\text{ただし, } p^2 = \frac{1}{2} (1-\eta) \quad (34)$$

として, I_j は

$$I_j = \frac{8p}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \phi \sin 2j\phi \sqrt{1-p^2 \sin^2 \phi} \, d\phi \\ = \frac{16j}{\pi} p \left\{ I_1' - \frac{4j^2-2^2}{3!} I_2' \right. \\ + \frac{(4j^2-2^2)(4j^2-4^2)}{5!} I_3' - \dots \\ \left. + (-1)^{j+1} \frac{(4j^2-2^2)(4j^2-4^2) \dots (4j^2-2j-2^2)^2}{(2j-1)!} I_j' \right\} \quad (35)$$

ここで,

$$I_l' = \int_0^{\pi} \cos \phi \sin^{2l} \phi \sqrt{1-p^2 \sin^2 \phi} \, d\phi \\ = \frac{1}{(2l+2)p^2} \left\{ -(1-p^2)^{3/2} + (2l-1) I_{l-1}' \right\} \quad (36)$$

$$I_0' = \frac{1}{2p} \left\{ \sin^{-1} p + p \sqrt{1-p^2} \right\} \quad (37)$$

これらの関係を用いれば, η が定まると, A_{nm} の数値も定まる.

次に, (30), (31) を (26) に代入して, $\int_0^{\pi} \sin m\vartheta' \sin \vartheta' (\cos \vartheta' - \cos \vartheta)^{-1} d\vartheta' = -\pi \cos m\vartheta$ の関係を用いれば,

$$\frac{2\kappa\pi}{\mu_1} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cos m\vartheta = \frac{\pi E}{2n_0\mu_1} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \cos m\vartheta \\ + \frac{\pi}{2} \left\{ (1+\eta) + (1-\eta) \cos \vartheta \right\} \quad (38)$$

となり, これが ϑ の値に関せず成立するためには, 次の関係がなければならぬ.

$$E\alpha_0/n_0\mu_1 + 1 + \eta = 0 \quad (39)$$

$$\beta_1 = E\alpha_1/4n_0\kappa + \mu_1(1-\eta)/4\kappa \quad (40)$$

$$\beta_n = E\alpha_n/4n_0\kappa, \quad n \geq 2 \quad (41)$$

(39) より η が定まれば α_0 は定まる. また, (32),

(40), (41) より $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ に関して次の連立方程式をうる.

$$\left. \begin{aligned} (A_{11} - E/4n_0\kappa)\alpha_1 + A_{21}\alpha_2 + A_{31}\alpha_3 + \dots \\ \dots = \mu_1(1-\eta)/4\kappa \\ A_{12}\alpha_1 + (A_{22} - E/4n_0\kappa)\alpha_2 + A_{32}\alpha_3 + \dots \\ \dots = 0 \\ A_{13}\alpha_1 + A_{23}\alpha_2 + (A_{33} - E/4n_0\kappa)\alpha_3 + \dots \\ \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

η が与えられれば, (42) を解くことにより $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ は求められる. 次に, 接線力の合力も (12) の積分と C 点で二つにわけ, (25), (29), (31) を用いて計算すると,

$$T = n_0\mu_1 \int_{-a}^a \sqrt{1-x^2/a^2} dx + n_0\mu_1 \int_c^a \left[(\kappa/\mu_1) \times \right. \\ \left. \left\{ s + 2\varepsilon_t(x) \right\} - 1 \right] \sqrt{1-x^2/a^2} dx = \frac{\pi}{2} n_0 a \mu_1 \\ - a\pi(1-\eta)n_0\kappa \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sin m\vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \\ = \frac{\pi}{2} n_0 a \mu_1 \left\{ 1 - \kappa(1-\eta) \beta_1/\mu_1 \right\} = \mu_1 N \times \\ \left\{ 1 - \kappa(1-\eta) \beta_1/\mu_1 \right\} \quad (45)$$

で表わされる. 接線力が最大になったときは接触領域内ですべて $v_s > v_{s1}$ であるから, C 点は A 点に一致する. すなわち $\eta=1$ となるから (43) より,

$$T_{\max} = \mu_1 N \quad (44)$$

で与えられる. これを用いれば (40), (43) より,

$$T/T_{\max} = 1 - (1-\eta) \beta_1/\mu_1 = 1 - (1-\eta) \times \\ \{ E\alpha_1/\mu_1 n_0 + 1 - \eta \} / 4 \quad (45)$$

と表わされる. η がきまれば α_1 定まり, したがって (45) より $T/T_{\max}$ も求まる. またすべり率 s は (27), (30) より,

$$s = \mu_1/\kappa - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \quad (46)$$

で与えられる.

接線力の分布は, 区間 $(-a, c)$ では, 摩擦係数は一定で μ_1 であることよりその間の分布は,

$$t(x) = \mu_1 n_0 \sqrt{1-x^2/a^2} \quad (-a \leq x < c) \quad (47)$$

で与えられ, 区間 (c, a) では

$$t(x) = \kappa \{ s + 2\varepsilon_t(x) \} n(x) \quad (48)$$

であり, (26), (29), (31) を用いて書きかえせば,

$$t(x) = n_0\mu_1 \sqrt{1-x^2/a^2} - 2n_0\kappa \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sin m\vartheta \quad (49)$$

$c \leq x \leq a$, ただし, $\vartheta = \cos^{-1} \{ (2x/a - 1 - \eta)/(1-\eta) \}$ β_m は (40), (41) で α_n により定まり, α_n は (42) より得られる.

次に, $\varepsilon_t(x)$ の分布を求めよう. x が (c, a) 区間, あるいは ϑ について $(0, \pi)$ の区間では (30) で表

わされる。すなわち、

$$\varepsilon_i(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos n\vartheta \quad (50)$$

で表わされる。\$x\$ が区間 \$(c, a)\$ 以外では (23) で表わされる。この積分の中の \$\varepsilon_i(\vartheta)\$ に (50) を用いて積分を行い、結果のみを示せば次式のごとくなる。

\$x > a\$,

$$\varepsilon_i(x) = \frac{2n_0\mu_1}{E} \left\{ -\frac{1}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) + \frac{2\kappa}{\mu_1} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m (-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^m \right\} \quad (51)$$

\$a \leq x \leq c\$,

$$\varepsilon_i(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \cos m\vartheta \quad (52)$$

\$c \leq x \leq -a\$,

$$\varepsilon_i(x) = \frac{2n_0\mu_1}{E} \left\{ -\frac{x}{a} + \frac{2\kappa}{\mu_1} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m (-\xi \sqrt{\xi^2 - 1})^m \right\} \quad (53)$$

\$x \leq -a\$,

$$\varepsilon_i(x) = \frac{2n_0\mu_1}{E} \left\{ -\frac{1}{a} (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + \frac{2\kappa}{\mu_1} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m (-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^m \right\} \quad (54)$$

ただし、

$$\xi = \frac{1 + \eta - 2x/a}{1 - \eta}, \quad \vartheta = \cos^{-1} \frac{2x/a - (1 + \eta)}{1 - \eta} \quad (55)$$

これらの式により、接線力による接線方向のひずみ \$\varepsilon_i\$ は計算できる。これらのことを要約すれば、\$\eta\$ すなわち \$c\$ の位置が定まれば \$\alpha_n, \beta_n\$ が定まり、これより \$T/T_{\max}\$ が定まる。逆に、\$T/T_{\max}\$ が定まれば \$\eta\$ がきまり、\$\alpha_n, \beta_n\$ が定まる。これによりすべり率、接線力分布、ひずみ分布が定まってしまうのである。

さらに特別な場合について計算しよう。\$T\$ が \$T_{\max}\$ に達したときは \$\eta = 1\$ であるから、(42) の右辺はすべて 0 となり、したがって \$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0\$, (40), (41) より \$\beta_1 = \beta_2 = \dots = 0\$, (39) より \$\alpha_0 = -2n_0\mu_1/E\$ をうる。(46) よりすべり率は、

$$s = \mu_1/\kappa + 4n_0\mu_1/E \quad (56)$$

で表わされる。接線力分布は (48) により

$$t(x) = n_0\mu_1\sqrt{1 - x^2/a^2} \quad (57)$$

ひずみ分布は (51), (53), (54), (55) により、

$$\varepsilon_i(x) = \begin{cases} -\frac{2n_0\mu_1}{Ea} (x - \sqrt{x^2 - a^2}), & x > a \\ -\frac{2n_0\mu_1}{Ea} x, & -a \leq x \leq a \\ -\frac{2n_0\mu_1}{Ea} (x + \sqrt{x^2 - a^2}), & x < -a \end{cases} \quad (58)$$

次に、駆動力が小さく、したがって接触部の接線力

も小さく接触域内のすべり速度 \$v_s\$ が \$v_{s1}\$ より小さい場合を計算しよう。このときは第 2 図で、\$C\$ 点は \$B\$ 点まで移動している。したがって \$c = -a\$, あるいは \$\eta = -1\$ であるから (34) より \$p^2 = 1\$ となり、(35) の積分 \$I_j\$ は次のごとく簡単になる。

$$\begin{aligned} I_j &= (8/\pi) \int_0^{\pi/2} \sin\phi \sin 2j\phi \cos\phi d\phi \\ &= (4/\pi) \int_0^{\pi/2} \sin 2\phi \sin 2j\phi d\phi \\ &= \begin{cases} 1, & j=1 \\ 0, & j \neq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (59)$$

この関係で (33) より \$A_{nm}\$ は

$$\begin{aligned} A_{n,1} &= (-1)^n, \quad A_{2,1} = 3/2 \\ A_{n,n-1} &= -A_{n-1,n} = 1/2, \quad \text{その他の } A_{nm} = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

となり、これらの関係を (42) に入れば、\$E/2n\kappa = \rho\$ において

$$-\left(1 + \frac{\rho}{2}\right)\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \dots = \frac{\mu_1}{2\kappa} \quad (61)$$

$$-\alpha_{n-1} - \rho\alpha_n + \alpha_{n+1} = 0, \quad n \geq 2 \quad (62)$$

また (39) より \$\alpha_0 = 0\$ すべり率 \$s\$ は (46) より、

$$s = \mu_1/\kappa + 2(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots) \quad (63)$$

(61), (63) より、

$$-s - \rho\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad (64)$$

となる。(62) を \$\alpha_n\$ の階差方程式と考えて、\$\alpha_n\$ を求めれば、次式がその解となる。

$$\alpha_n = 2^{-n+1}\alpha_1(\rho - \sqrt{\rho^2 + 4})^{n-1} \quad (65)$$

また一方 (45) で \$\eta = -1\$ とおけば、

$$\alpha_1 = -\frac{2\mu_1n_0}{E} \frac{T}{T_{\max}} = -\frac{1}{\rho\kappa} \frac{T}{N} \quad (66)$$

をうる。ゆえに (65), (66) より \$\alpha_n\$ はすべて求まったことになる。\$s\$ は (64) より

$$s = \frac{1}{2\kappa} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\rho^2}} \right) \frac{T}{N} \quad (67)$$

となり、接線力の小さい間はすべり率と接線合力とは比例関係にある。接線力の分布は (55) より \$\vartheta = \cos^{-1} x/a\$ に注意すれば (49) より、

$$t(x) = -\frac{1}{2} E \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin m\vartheta \quad (68)$$

(68) に (65), (66) を代入して、

$$t(x) = \frac{\mu_1n_0}{T_{\max}} T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} (\rho - \sqrt{\rho^2 + 4})^{n-1} \sin n\vartheta \quad (69)$$

が得られる。接線力分布も \$T\$ の小さい間は \$T\$ に比例した相似な分布をする。

次にひずみの分布を求める。(40), (41) と (65), (66) とより、\$\alpha_n\$ と \$\beta_n\$ の関係は

$$\beta_1 = \frac{1}{2\kappa} \left(\mu_1 - \frac{T}{N} \right),$$

$$\beta_n = -\frac{1}{2^n \kappa} \cdot \frac{T}{N} (\rho - \sqrt{\rho^2 + 4})^{n-1} \dots (70)$$

また (55) より $\xi = -x/a$, $\vartheta = \cos^{-1} x/a$ であるから、
これらを (51), (52), (54) に代入して、

$$x \geq a,$$

$$\varepsilon_r(x) = -\frac{2n_0}{E} \cdot \frac{T}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} (\rho - \sqrt{\rho^2 + 4})^{n-1} \times$$

$$\left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)^n = -\frac{2n_0}{E} \cdot \frac{T}{N} \times$$

$$\frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a - \frac{1}{2}(\rho - \sqrt{\rho^2 + 4})(x - \sqrt{x^2 - a^2})} \dots (71)$$

$$a \geq x \geq -a,$$

$$\varepsilon_r(x) = -\frac{2n_0}{E} \cdot \frac{T}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} (\rho - \sqrt{\rho^2 + 4})^{n-1} \times$$

$$\cos\left(n \cos^{-1} \frac{x}{a}\right) \dots (72)$$

$$x \leq -a,$$

$$\varepsilon_r(x) = -\frac{2n_0}{E} \cdot \frac{T}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} (\rho - \sqrt{\rho^2 + 4}) \times$$

$$\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)^n = -\frac{2n_0}{E} \cdot \frac{T}{N} \times$$

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a - \frac{1}{2}(\rho - \sqrt{\rho^2 + 4})(a + \sqrt{x^2 - a^2})} \dots (73)$$

以上で ひずみ の分布も求まった。ひずみの分布も
 T の小さい間は、 T に比例した相似な分布をとる。

5. 数 値 計 算

(i) 積分 I_j の計算 (35) で表わされる積分は、
(34), (36), (37) の関係により p あるいは η の値に
対して計算できる。計算結果を第 5 図に示す。

第 5 図

(ii) A_{nm} の計算 方程式 (42) の中に表われる
係数 A_{nm} は (33) により、 I_j で表わされる。これを
 m, n, η の値に対して計算した結果は第 6 図に示
す。

(iii) α_n および β_n の計算 α_n および β_n は
(39) から (42) までの関係で求まるが、この場合円板

の材料、大きさ、圧力の大きさ等に関する数値が入
ってくるので、例を Sachs⁽⁶⁾ の 2 個の接触回転円板
の実験(Nr. 464) にとって計算する。両円板は鋼製で
直径は共に 300 mm、円板の厚さは 2.5 mm、駆動輪
の回転数 35 rpm であり、全垂直圧力は 6.67 kg で
ある。測定された量は接線合力 T および平均の すべ
り である。実験より求められた最大接線力は 2.74
kg であった。これらの数値より、

第 6 図

$$R_1 = R_2 = 150 \text{ mm}, \omega = 2\pi \times 35/60 = 3.67 \text{ s}^{-1}$$

$$N = 6.67/2.5 = 2.66 \text{ kg/mm},$$

$$E = 2100 \text{ kg/mm}^2$$

$$T_{\max} = 2.74/2.5 = 1.1 \text{ kg/mm},$$

$$\mu = T_{\max}/N = 0.41$$

また $\kappa' = 0.44 \text{ s/mm}$ と仮定する。これらの数値で

第 7 図

(42) の連立方程式を解いて、 α_n を η に対して求めたものが第 8 図であり、(40)、(41) により β_n と η との関係求めた結果を第 7 図に示す。

第 8 図

(iv) $T/T_{\max}$ と η との関係 η の値は C 点の位置($\eta=c/a$)を示す。(45) により η が定まれば $T/T_{\max}$ は定まる。これを第 9 図に示す。 $T/T_{\max}$ が 0.584 より小さいときは C 点は B 点に一致し($\eta=-1$)、 $T/T_{\max}$ が 1 になったとき C 点は A 点に一致する($\eta=1$)。

第 9 図

(v) s と η との関係 η と α_n は (iii) によって求まっているから、(46) により、 η と s との関係は求まる。これを第 10 図に示す。 s が 0 と 0.001 048

第 10 図

との間では、 $\eta=-1$ すなわち接触部分のすべり速度は $v_{s1}(=0.93 \text{ mm/s})$ を越えない。

(vi) T/N と s との関係 (iv) と (v) とより $T/T_{\max}$ あるいは T/N と s との関係が求まる。(v) で $\eta=-1$ に対応する $s=0.001 048$ 以下のときは、直接 (67) より求めた。この計算結果を第 10 図に示す。図中に示した×点は Sachs の実験点を示す。実験と計算とのきわめてよく一致する。

第 11 図

(vii) 接線力の分布 (47)、(49) より接触領域内における接線力の分布 $t(x)$ が求まる。これを第 12 図に示す。 $T/T_{\max}=0.584$ 以下では (68) により、大きさが $T/T_{\max}$ に比例し $T/T_{\max}=0.584$ の分布と

第 12 図 接線力の分布

相似な形となる。接線力の分布は圧力の分布のように入力分布とはならず、接触部の出口の方が入口にくらべて接線力を大きく負担する。駆動モーメントが大きくなって、 $T/T_{\max}$ に達すると滑走（あるいは空転）の状態に入り、接触領域内いたるところ、一様な摩擦係数となるために接線力分布は圧力分布と相似な形をとる。

(viii) 接線力による ひずみ $\varepsilon_t(x)$ の分布 (51)

から (55) までの式を用いて計算した結果を第 13 図に示す。 $T/T_{\max}=0.584$ 以下では (71), (72), (73) に

第 13 図 ひずみの分布

より T/N に比例した大きさで $T/T_{\max}=0.584$ の分布と相似な分布をとる。この図より次のことがわかる。接触部より遠い所にある部分はひずみなく、しだいに接触部に近づくにつれて接線力のため縮みを生じ、接触部の入口で最大ひずみとなり、それよりまた縮みは少なくなると伸びになり、出口の所で最大伸びを生じ、しだいに

ひずみなしの状態に帰ってゆく。実際に生ずる切線方向のひずみは、接触部分に分布する圧力、 $n_0\sqrt{1-x^2/a^2}$ によってさらに、 $(\nu/E)n_0\sqrt{1-x^2/a^2}$ だけのひずみが附加される。 ν はポアソン比である。ひずみの分布と s がわかったから、(4) により接触面内のすべり速度の分布も求まる。また圧力および接線力の分布が明らかにされたから弾性力学に従って計算を行えば、内部の応力も

ひずみも求めることができる。

6. 横力が作用してころがる場合

前節までの考察は車輪の進行方向と、力の作用する方向とが同一である場合であったが、車輪の横方向の運動を論ずるに必要な、横力と運動との関係についても、横すべり速度は、それが小さい間は、横力と比例関係にあることを証することができるが詳細は紙面の関係で省略する。

7. 結 語

第 1 報、第 2 報でころがり接触のうち弾性に基因するものの機構を明らかにし、エネルギーの損失を量的に示した。また接触部に作用する接線力分布も求めることができた。ただすべり速度 0 の近傍のすべり摩擦係数の性質が、実験的に必ずしも明らかでないために、妥当なかん数形を仮定してある。それゆえ、この点の実験的に明らかされて、始めてころがり摩擦の本質をつけるであろう。

この報告で示した方法により、ころがり接触をする物体の接触部内の圧力分布および接線力分布も求まり、接触部強さを計算するのに役立ち、接線力とすべり率との関係は、車輪を制動した場合の回転から滑走に移る関係や、粘着力の問題、あるいは摩擦駆動における誤差の問題に役に立つだろう。また前進方向ならびに横方向のすべり率が、その方向の力が小さい間は、その方向の力に比例するという関係は、車両の運動を解析する上に重要である。

最後にこの研究をするにあたり、討論や、お世話下さった池田、中田両部長、疋田、松平、西野技官その他の方々に厚く感謝いたします。

注：一

- (1) 昭和 23 年 11 月 14 日 連合応用力学講演会において講演、原稿受付 昭和 24 年 4 月 19 日。
- (2) 正員、鐵道技術研究所。
- (3) 第 25 期定時總會において講演、論文要旨は機械學會誌 361 號。
- (4) 第 1 報参照。
- (5) Ann. d. Phys., **38** (1912), 126.
- (6) Z. f. Angew. Math. u. Mech., **4** (1924), 1.