断面のこわさが階段的に変る はりの横座屈⁽¹⁾近 藤 誠 治⁽²⁾The Lateral Buckling of the Beams with Cross Section
which discontinuously changes by Steps

by Seiji KONDO

In these papers, writer deals with the lateral buckling of beam with cross section which discontinuously changes by steps. The differential equation of equilibrium for the small angle of twist is used as follows:—

$$\frac{d}{du} \left(C \frac{d\theta}{du} \right) + \frac{M^2}{B} \theta = 0$$

B and C are the flexural and torsional rigidity of the beam sections. The angle and its first derivative θ' can be found by integration, and takes the form as the next expression for the portion of the beam.

$$\begin{aligned} \theta_n &= A_{n1} F_{n1}(k_n u) + B_{n1} F_{n2}(k_n u) \\ \theta_n' &= A_{n2} F_{n1}'(k_n u) + B_{n2} F_{n2}'(k_n u) \end{aligned}$$

The boundary conditions have two kinds in this case. The one is that of beam ends, and the other is that of the continuation of the seams in the portions. At the k th sections and $k+1$ th sections, the next relations are formed.

$$\theta_k = \theta_{k+1}, \quad C_k \theta_k' = C_{k+1} \theta_{k+1}'$$

Eliminating the integration constants, we can determine the critical moment expressed as follows:—

$$M_{cr} = \mu \sqrt{\frac{B_0 C_0}{L}}$$

where μ is the coefficient depending upon the kind of load, the state of the beam sections, and number of their steps. It can be found by trial-error-method in general.

As the numerical examples, the critical moment and critical load of the beam with two steps in the sections are determined.

薄肉で高さの高い断面をもった はりの横座屈の計算で、ここでは断面のこわさが階段的に急激に変るものを取り扱う。

1. 基 本

はりの横座屈に対するねじり角を示す微分方程式は B, C をそれぞれ はりの断面の曲げおよびねじりこわさ, M を曲げモーメントとすると次の式で表わされる。

第 1 図

$$\frac{d}{dx} \left(C \frac{d\theta}{dx} \right) + \frac{M^2}{B} \theta = 0 \quad (1)$$

いま、はりを第 1 図のごとく $l_1, l_2, \dots, l_n$ なる部分にわかし、断面のこわさがその部分と次の部分の境目で急激に変わるものとする。(1) 式を満足する解およびその第 1 次微係数をおのおのの部分に対して求めそれぞれ次の形で表わすことにする。

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= A_1 F_{11}(k_1 x) + B_1 F_{12}(k_1 x), \\ \theta_1' &= A_1 F_{11}'(k_1 x) + B_1 F_{12}'(k_1 x), \\ \theta_2 &= A_2 F_{21}(k_2 x) + B_2 F_{22}(k_2 x), \\ \theta_2' &= A_2 F_{21}'(k_2 x) + B_2 F_{22}'(k_2 x), \\ &\dots, \\ \theta_n &= A_n F_{n1}(k_n x) + B_n F_{n2}(k_n x), \\ \theta_n' &= A_n F_{n1}'(k_n x) + B_n F_{n2}'(k_n x) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

安定条件は (2) 式にふくまれる積分定数を はりの境界条件に応じて消去することから導ける。境界条件と

しては はり の両端におけるものと断面の変り目における連続条件とである。断面の変り目では応力分布も一様でなく変形も複雑であるが、ねじり角 θ とねじりモーメント $C\theta'$ を連続とする⁽⁴⁾。すなわち k 番目の断面の継目において

$$\theta_k = \theta_{k+1}, \quad C_k \theta'_k = C_{k+1} \theta'_{k+1} \quad (3)$$

とおく。たとえば両端が単にねじれないように支持された はり では*

$$\begin{vmatrix} F_{11}(k_1 l_0) & F_{12}(k_1 l_0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ F_{11}(k_1 l_1) & F_{12}(k_1 l_1) & -F_{21}(k_2 l_1) & -F_{22}(k_2 l_1) & \cdots & 0 \\ C_1 F_{11}'(k_1 l_1) & C_1 F_{12}'(k_1 l_1) & -C_2 F_{21}'(k_1 l_1) & -C_2 F_{22}'(k_1 l_1) & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & F_{n1}(k_n l) & F_{n2}(k_n l) \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

座屈値は (5) を展開してその根を求むることから決定される。

2. 均一曲げモーメントを受けた はり

均一曲げモーメントを受けた はり の座屈モーメントを求める。断面のこわさがその基本なる値に対して x のかん数とし $B=B_0\phi$, $C=C_0\psi$ とおき, $u=x/l$ を導入すると (1) 式は

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \frac{1}{\phi} \frac{d\psi}{du} \frac{d\theta}{du} + \frac{k^2}{\phi\psi} \theta = 0 \quad (6)$$

$$k^2 = (M^2 l^2) / (B_0 C_0) \quad (7)$$

となり, (6) 式の解を はり のおのおのの部分について求め, (5) 式の根である (7) 式に示す k の値を求むることから座屈モーメントは次の形で決定される。

$$M_{cr} = \mu \pi \sqrt{\frac{B_0 C_0}{L}} \quad (8)$$

B_0 , C_0 は基準にとった断面のこわさで, L は はり の全長である。係数 μ は断面のこわさの変化する割合および変化の段の数によって定まる。

例題 1. 2 段の異なる一定断面をもった左右対称形はり では はり の半分を単位にとると境界条件は一端で $\theta_1=0$, 中央で $\theta_2'=0$ となり断面の継目では (3) 式を用いる。一定断面では $\psi=\text{定数}$ であるから (6) の解は単に円かん数となるので, (5) 式の展開式は次のようになる。

$$c_1 k_1 \cos k_1 \lambda \cos k_2 (1-\lambda) - c_2 k_2 \sin k_1 \lambda \sin k_2 \times (1-\lambda) = 0 \quad (9)$$

式中 λ は第 1 段の長さを無元化したものである。断面のこわさの変化する割合が与えられると (9) 式の k_1 または k_2 を決定することから (7) 式に従って座屈モーメント M の値が求められる。

しかるに幅 b , 高さ h になる長方形断面で横座屈

$$\left. \begin{array}{l} * \text{一端, } x=0, x=l \text{ にて } \theta_1=\theta_n=0, \\ \text{第 1 の継目, } x=l_1 \text{ にて } \theta_1=\theta_2, C_1 \theta'_1=C_2 \theta'_2 \\ \text{第 2 の継目, } x=l_2 \text{ にて } \theta_2=\theta_3, C_2 \theta'_2=C_3 \theta'_3 \\ \cdots \cdots \cdots \end{array} \right\} \quad (4)$$

(4) 式の条件の数は消去すべき積分定数と同じ数であるので, 安定条件式が導け, (2) 式を (4) 式に代入することより次の行列式の値が 0 であることが必要である。

を起すような高さの比較的高い断面のこわさは, それぞれ

$$B = \frac{b^3 h}{12} E, \quad C = \frac{b^3 h}{3} \left(1 - 0.63 \frac{6}{h}\right) G \quad (10)$$

として表わしうる。幅を一定として高さが $h_2=rh_1$ と変る場合次のごとくおく。

$$\left. \begin{array}{l} B_1/B_2 = h_1/h_2 = 1/r \equiv \alpha \\ C_1/C_2 = \{1 - 0.63(b/h_1)\} / \{1 - 0.63(b/h_2)\} \equiv \beta \\ k_1/k_2 = \sqrt{(B_2 C_2) / (B_1 C_1)} \equiv \gamma \end{array} \right\} \quad (11)$$

r がますと $\alpha \equiv \beta = 1/r$ となり, また $\gamma \equiv r$ となる。

第 2 図は β, γ の変化を示す。また h が一定で b が s 倍すなわち $b_2=sb_1$ と変る場合も同様に考えることができる。

第 2 図

さて (11) 式の β, γ を (9) 式に代入すると

$$\tan(k_1 \lambda) \tan\left\{\frac{k_1}{\gamma} (1-\lambda)\right\} = \beta \gamma \quad (12)$$

となり、これより根 k_1 の値を求めるには試索法による。第 3 図は $b/h_1=0.1$ とし断面の高さ変る場合について座屈値の変化を求めたものである。座屈値は r すなわち高さの増す割合が大きいほど大きく、また λ すなわち第 1 段の はり の長さが全長 1 に対して

第 3 図

小さいほど大きくなり、 $r=1$ または $\lambda=1$ では共に全長一定断面形の はり となる。

一定断面が 3 段に変る 左右対称形はり の座屈条件式は

$$C_1 C_2 k_1 k_2 \cos k_1 \lambda_1 \cos k_2 \lambda_2 \cos k_3 \lambda_3 - C_1 C_3 k_1 k_3 \cos k_1 \lambda_1 \sin k_2 \lambda_2 \sin k_3 \lambda_3 - C_2 C_3 \sin k_1 \lambda_1 \cos k_2 \lambda_2 \sin k_3 \lambda_3 - C_2^2 k_2^2 \sin k_1 \lambda_1 \sin k_2 \lambda_2 \cos k_3 \lambda_3 = 0 \quad (13)$$

となる。 λ は各段の長さである。 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1/3$, $h_2/h_1=h_3/h_2=r$ とした場合の座屈値を第 1 段の断面のこわさに関係づけたものを第 4 図に示す。断面の変

第 4 図

る段の数がこれ以上の場合の座屈条件式も同様にして求めるが式が複雑となり、数値計算は困難となる。

例題 2. 一部分に漸変部をもつ段付はり。 $B=B_0 u^m$, $C=C_0 u^n$ に従って漸変する場合の (6) 式の解はベッセルかん数で表わされ

$$\left. \begin{aligned} \theta &= u^p \{ A J_\nu(k_1 u^q) + B J_{-\nu}(k_1 u^q) \} \\ \theta' &= k_1 q u^{p+q-1} \{ A J_{\nu-1}(k_1 u^q) - B J_{-\nu+1}(k_1 u^q) \} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

のごとき形をとる⁽⁶⁾。この形で漸変する部分を両端にもち中央部に一定断面をもつ 左右対称形はり が均一曲げモーメントを受けて座屈する条件式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \lambda_1^{q-1} q C_1 k_1 \{ J_\nu(k_1 \lambda_0^q) J_{-\nu+1}(k_1 \lambda_1^q) \\ & + J_{-\nu}(k_1 \lambda_0^q) J_{\nu-1}(k_1 \lambda_1^q) \} \cos k_2 (1-\lambda_1) \\ & + C_2 k_2 \{ J_\nu(k_1 \lambda_0^q) J_{-\nu}(k_1 \lambda_1^q) \\ & - J_{-\nu}(k_1 \lambda_0^q) J_\nu(k_1 \lambda_1^q) \} \sin k_2 (1-\lambda_1) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

この式の数値計算にあたり $m=n$ としてベッセルかん数を円かん数に代え、 $C_0/C_2=\beta$, $k_0/k_2=\gamma$ とおいて整理すると

$$\tan \left\{ \gamma k_2 \left(\frac{\lambda_1^{1-n} - \lambda_0^{1-n}}{1-n} \right) \right\} \tan k_2 (1-\lambda_1) = \frac{\beta \gamma}{\lambda_1^n} \quad (15)$$

となる。ただし C_0 , k_0 は両端の漸変部の基準となる値で断面としては現われない。また λ_0 は漸変部は原点において断面 0 となるのでその部分をさけた値で $\lambda_1 - \lambda_0$ は漸変部の長さで、 $1 - \lambda_1$ は中央の一定断面の長さである。 $\lambda_0=1/10$, $n=1/4$ とせる数値計算を行い中央の一定断面に関係づけた座屈値の係数を第 5 図に

第 5 図

示す。図示する座屈値は中央の h_2 を一定とし、 h_0 を次第に増加した場合で、座屈値が増大する範囲は中央

第 6 図

の一定部が細く短かく両端の漸変部がかえって大きい場合になる。

また中央部が漸変し両端に一定断面をもつ はり では (15) 式に相当する座屈条件式は次のようになる。

$$\tan k_1 \lambda; \tan \frac{k_1}{\gamma} \left(\frac{1 - \lambda_1^{1-n}}{1-n} \right) = \beta \gamma \lambda_1^n \dots (16)$$

第 6 図はこの式から座屈値を両端の一定断面に関係づけて求めたものである。中央の h_0 が大きくなれば座屈値はますが、一定断面の長さ λ の値に対して極大値をとる。(16) において $\lambda=0$ とするとレンズ形漸変はりとなり、 $\lambda=1$ とすれば全長一定断面となる。

漸変部と一定断面部との継目の こわさ が等しいものは前報 (6) で取り扱った。漸変部には他の形式で表わされるものも座屈値の計算を行うことができる。

3. 不均一曲げモーメントを受けた はり

集中荷重や分布荷重を受けると はり の曲げモーメントは長さの かん数 となり $M = aWu^s$ のごとき形式をとる。これを (1) に代入すると

$$\frac{d\theta^2}{du^2} + \frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{du} \frac{d\theta}{du} + \frac{k^2}{\varphi\psi} u^{2s}\theta = 0 \dots (17)$$

$$k^2 = (a^2 W^2 l^4) / (B_0 C_0) \dots (18)$$

となり、(18) 式の解は (14) 式と同一の形式をとる。この解を用いて座屈条件式を導き、その根を求めることから座屈荷重を次の形で表わす。

$$W_{cr} = \mu \frac{\sqrt{B_0 C_0}}{L^2} \dots (20)$$

分布荷重の場合には W は全荷重である。

例題 一定断面形の はり の場合 $\varphi = \psi = 1$ とおくとねじり角は次の形をとる。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= u^{\frac{1}{2}} \left\{ A J_{\frac{1}{2+1s}} \left(\frac{k_1}{1+s} u^{1+s} \right) \right. \\ &\quad \left. + B J_{-\frac{1}{2+2s}} \left(\frac{k_1}{1+s} u^{1+s} \right) \right\} \\ \theta' &= u^{\frac{1}{2}+s} k_1 \left\{ J_{\frac{1}{2+2s}-1} \left(\frac{k_1}{1+s} u^{1+s} \right) \right. \\ &\quad \left. - B J_{-\frac{1}{2+2s}+1} \left(\frac{k_1}{1+s} u^{1+s} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

となり、 s は集中荷重では 1、一様分布荷重では 2、水圧分布荷重では 3 である。たとえば自由端に一つの集中荷重をもつ 2 段に変わる 片持 はり の座屈条件式は

$$\begin{aligned} &\beta \gamma J_{\frac{3}{4}} \left(\frac{k_1}{2} \lambda^2 \right) \left\{ J_{\frac{1}{4}} \left(\frac{k_1}{2\gamma} \right) J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{k_1}{2\gamma} \lambda^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{k_1}{2\gamma} \right) J_{\frac{1}{4}} \left(\frac{k_1}{2\gamma} \lambda^2 \right) \right\} \\ &\quad - J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{k_1}{2} \lambda^2 \right) \left\{ J_{\frac{1}{4}} \left(\frac{k_1}{2\gamma} \right) J_{\frac{3}{4}} \left(\frac{k_1}{2\gamma} \lambda^2 \right) \right. \end{aligned}$$

$$\left. + J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{k_1}{2\gamma} \right) J_{-\frac{3}{4}} \left(\frac{k_1}{2\gamma} \lambda^2 \right) \right\} = 0 \dots (22)$$

となる。この式の数値計算はベッセル かん数表⁽⁷⁾を用いるが、表の刻みが荒く原点附近の値は不完全である。それでその部分に対しては漸近公式から かん数値 を求め (22) 式に代入して座屈荷重を求めたのが第

第 7 図

7 図である。全長一定断面は $\beta = \gamma = 1$ または $\lambda = 1$ の場合で $J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{k_1}{2} \right) = 0$ の根から決定される $W_{cr} = 4.013 \sqrt{B_1 C_1 / l^2}$ である。同様にして他の荷重を受ける 段付 はり の座屈条件式は導くことができるが、数値計算は かん数表 も出来ておらず困難である。

附 記

注⁽⁴⁾ に記した断面の変り目における連続の条件としてねじり角 θ の外に θ' をとるか、ねじりモーメント $C\theta'$ をとるかの適否を検討するために長方形断面の段付 はり のねじり実験を行った。実験としては弾性変形の大きな材料としてゴムを使用し、幅 10 mm、高さ 30 mm の長方形断面とし、幅を一定として高さを中心線に対して対称的に減じて段付試験片を作った。表面にポスターカラーを塗り、これに縦横に 3 mm ますの五盤目を作り、この線のねじれすなわち試験片の表面ねじり角を測定した。段のヒレットの半径は亀裂を生じないために約 1 mm とした。変形は約 5 倍に拡大して写真にとり、これをさらに 5 倍に引出し

第 8 図 $h_2/h_1 = 6/10$ の場合の表面ねじれ

てねじれ角を測った。第 8 図は $h_2/h_1=6/10$ の試験片 30 mm が 50° ねじれたときの写真である。

表面ねじれ角 φ はねじれ角 θ に比例するものとし

第 9 図 (a) は表面ねじれ角
(b) はその $\Delta\varphi/\Delta x$

表面ねじれ角のみを側った。第 9 図の下図は $h_2/h_1=6/10$ の試験片の表面角 φ で中央は断面のvari目である。同図の上の図は比ねじり角 θ' に相当する。 $\Delta\varphi/\Delta x$ を

$\Delta x=2/25$ mm として求めたものである。図中横の点線は実験上の $\Delta\varphi/\Delta x$ に断面のこわさ C を乗じた値を表わしたものである。この際の $\Delta\varphi/\Delta x$ は断面のvari目の左右の平均値をとった。その結果は図に示すように段階を生じた。

この段階の差は h_2/h_1 の値により異なり h_2/h_1 の値が 1 に近づくにつれて小さくなる。第 10 図は h_2/h_1 の種々の値に対して $\Delta\varphi/\Delta x$ の値を示したものである。 θ' すなわち $\Delta\varphi/\Delta x$ は段のある所で飛躍する。しかしこの飛躍は全く不連続ではなく両方から歩みよって見ることが見られるが、段の左右の値から見て連続的と

第 10 図 断面の高さを変えた場合の $\Delta\varphi/\Delta x$ の値

することは不適當であろう。ただ h_2/h_1 の値が 1 に近いものでは連続としてもさしつかえない。 $h_2/h_1=0.8$ 以上では θ' を採用するも $C\theta'$ を採用するも座屈値の差異は最大 5 % であり、第 3 図の細い点線は θ' を連続として求めた座屈値で $C\theta'$ をとった値より大きくなり、その程度は $h_2/h_1=5$ 以上において著しい。

結 言

段付はりの横座屈値を求めたが、その結果は段の変化する度合とその部合の長さの割合に左右されるが一般の形の座屈公式で表わすことができる。段の変化が大きいほど、および基準となる段の長さが短いほど座屈値は増大する。段の数が多くなると計算が困難で実用的でない。均一曲げモーメント以外の荷重を受けたはりではかん数表の關係で集中荷重以外は計算できない。連続条件としては段の変化がごく小さい所では比ねじれ角をとっても、ねじりモーメントをとってもよい。

本文は はりの横座屈に関する研究の続報で、注⁽⁴⁾に記した各先生方の指導に負うところが多い。深く感謝する。またこの研究に文部省科学研究費から補助を受けたことを感謝する。

注：—

(1) 昭和24年4月5日 第26期定時總會講演會において講演、

原稿受付 昭和24年5月14日。

(2) 正員、長岡工業專門學校。

(3) 筆者、機械學會誌、46卷311號71ページ (昭18—2)

(4) この條件についてさきに本會編輯員、東京大學 宮津、鶴戸口ならびに早稻田大學 高橋の 3 先生より十分討議を受けた。その後京都大學 中川先生からも討議していただいた。深甚なる感謝の意を表わす。

(5)、(6) 筆者、機械學會誌、51卷356號、172ページ (昭 23—5)。論文集未刊。

(6) JAHNKE-EMDE, Tables of Functions, 223.