円形孔を有する円板の降伏に関する Nádai 氏の解法について⁽¹⁾渡辺正紀⁽²⁾ 佐藤邦彦⁽³⁾On Nádai's Solution concerning the Yield of
Circular Plate with Round Hole

by Masanori WATANABE and Kunihiko SATO

The problem, concerning the yield of circular plate with round hole under internal pressure, is treated by Nádai in his famous book "Plasticity".⁽⁴⁾ To deal with residual stresses by plug weld, we followed his calculations and found one or two mistakes in it. Nádai gave the following solution,

$$r^2 = c^2 e^{\sqrt{3}\theta} \cdot \cos \theta \dots\dots\dots (30)$$

for the differential equation,

$$r \frac{d}{dr} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \theta. \dots\dots\dots (29)$$

Solution (30) is clearly mistake and must be corrected as follows,

$$r^2 = c^2 e^{\sqrt{3}\theta} / \cos \theta. \dots\dots\dots (a)$$

Therefore Nádai's equation (33) must be changed as equation (b) ;

$$r^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} b^2 e^{\sqrt{3}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} \cdot \cos \theta \dots\dots\dots (33)$$

$$r^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} b^2 e^{\sqrt{3}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} / \cos \theta. \dots\dots\dots (b)$$

The values of (b/a) , S_r and S_t corresponding to the assumed value of $\theta = \theta_a$ at inner hole were calculated from the above exact solution, and when the circular plate is under internal pressure, θ_a is between -60° and 30° , while, in Nádai's book Fig. 251, θ_a is between 30° and 120° .

1. 緒 言

Nádai 氏はその著書において、氏の塑性理論の一応用例として、中心に円形孔を有する薄い円板が半径方向の応力をうけて板全体が降伏状態にある場合を取り扱っている⁽⁴⁾。

著者らはたまたま類似の問題⁽⁶⁾を取り扱う機会を得、同氏の計算を検討してみたところ、式に一部誤りのあるのを発見した。同氏の著書は塑性学における最もまとまった書物として広く読まれているので、一部計算の誤謬を正し、実際に計算を行った結果を紹介することにする。

2. 基 本 式

まず第1図のごとく、薄い円板の半径を b 、円孔の半径を a とし、円孔の周辺に一樣な圧力 p が分布している場合を考えよう。このような場合、板面に垂直方向の応力は 0 であって、半径方向の応力 S_r および接線方向

第 1 図

の応力 S_t が主応力となる。したがってこの時の降伏の条件式は

$$S_t^2 - S_t S_r + S_r^2 = S_0^2 = \text{一定} \dots\dots\dots (2 \cdot 1)$$

となる。ここに S_0 は単純引張りにおける材料の降伏点である。

一方 S_t と S_r との間には応力の平衡方程式

$$r \frac{dS_r}{dr} = S_t - S_r \dots\dots\dots (2 \cdot 2)$$

が成立すべきである。

さてこの際、われわれの求めんとするものは S_t と S_r とであって、方程式は (2・1)、(2・2) の 2 個あり、これで条件は全部そろったわけである。すなわち問題は境界条件を満足する (2・1) および (2・2) の解を求めることに帰一する。

3. 解 法

(2・1) および (2・2) より直接法によって S_t および S_r の解を求めることは困難であるから、Nádai 氏は次のごとき巧妙な方法を用いている。

(2・1) は S_t および S_r を直角座標にとると、第2図に示すごとく だ円 の方程式であって、半長軸および半短軸の長さはそれぞれ

第 2 図

$$OA = \sqrt{2} S_0, \quad OG = \sqrt{2/3} S_0$$

である。ここで次のごとき置換えが行われている。

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{S_t + S_r}{2} = S_0 \sin \theta \\ S' &= \frac{S_t - S_r}{2} = \frac{S_0}{\sqrt{3}} \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot 1)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} S_r &= S - S' = \frac{2S_0}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \\ S_t &= S + S' = \frac{2S_0}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot 2)$$

となり、 S_t および S_r は共に θ なるパラメータにより表わすことができる。ここで Nádai 氏は θ の取り扱い方を誤っていると思われるので、原著には書いてないが、まず (3・1) の幾何学的意義を考えよう。

第 3 図

第 3 図において P 点は (2・1) を満足する だ円上の一点とす。P 点より長軸 OA に垂線を引き長軸を直径とする円との交点を U とすれば、 $\angle UOA$ は だ円の離心角とよばれるところのものである。いま

この離心角の余角、すなわち OU と短軸とのなす角を θ とすれば、(3・1) したがって (3・2) の関係が得られる。何となれば第 3 図において、

$$\begin{aligned} S_r &= OS = CR - SR = \frac{OQ}{\sqrt{2}} - \frac{PQ}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ OU \sin \theta - (UQ - UP) \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (OU \sin \theta - OU \cos \theta + UV \cos \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{2} S_0 (\sin \theta - \cos \theta) + \left(\sqrt{2} S_0 - \sqrt{\frac{2}{3}} S_0 \right) \cos \theta \right\} \\ &= S_0 \left(\sin \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \right) \\ &= \frac{2S_0}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_t &= PS = PT + QR = \frac{PQ}{\sqrt{2}} + \frac{QR}{\sqrt{2}} \\ &= S_0 \left(\sin \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \right) \\ &= \frac{2S_0}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

となるがゆえに

すなわち (3・1) または (3・2) におけるパラメータ θ は (2・1) を満足する だ円の離心角を表わしていることが確かめられた。

しかるに Nádai 氏の原著には第 4 図 (原著第 250 図) のごとき図が載せられている。いまかりに OG を

第 4 図

基準にとり時計の針のまわる方向をもって θ の正の方向とすれば、B 点は明らかに $+30^\circ$ で表わされる。しかし A 点、C 点は第 5 図に示すごとくそれぞれ $+90^\circ$ 、 -60° となる。これは Nádai 氏の第 4 図と一致しない。この点 Nádai 氏は θ をいかなる方法で定めているのか不明であるが、氏の第 4 図に示す結果を (3・2) に代入してみると第 1 表に示すがごとく不都合がある。すなわち B 点はよいが、A 点では S_r

第 5 図
第 1 表

	θ	S_r/S_0	S_t/S_0
A	-30°	-1	0
B	30°	0	1
C	120°	$2/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$

第 2 表

	θ	S_r/S_0	S_t/S_0
A	90°	1	1
B	30°	0	1
C	-60°	$-2/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$

が負となりかつ S_t が 0 となっている。これは図より明らかに不都合である。C 点も同様に $\theta=120^\circ$ とすれば不都合がおこる。

これを著者らの方法によれば第2表のごとく何らの不都合も認められない。

次に (2・1), (2・2) を解くに当り, 式の上に明らかに誤りがある。(3・1) または (3・2) は (2・1) を満足するものなるがゆえに, 結局われわれは (2・2) に (3・1) または (3・2) を代入して得られる

$$r \frac{d}{dr} \left\{ \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right\} = \cos \theta \quad (3 \cdot 3)$$

を解くこととなる。しかし Nádai 氏はこれを分離法によって積分し,

$$r^2 = c^2 e^{\sqrt{3}\theta} \cdot \cos \theta, \quad c^2: \text{積分定数} \quad (3 \cdot 4)$$

なる式を与えているが, これは誤りであって正しくは

$$r^2 = c^2 e^{\sqrt{3}\theta} / \cos \theta \quad (3 \cdot 5)$$

となるはずである⁽⁷⁾。

積分定数 c^2 は $r=b$ において $S_r=0$ なる境界条件より決定せられる。第5図において θ は $S_r=0$ なる B 点に相当した $\theta = \frac{\pi}{6}$ をとるべきである。した

がって (3・5) より

$$b^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot c^2 e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{6}} \quad (3 \cdot 6)$$

となり⁽⁷⁾, 結局 (3・5) は

$$r^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{b^2}{\cos \theta} \cdot e^{\sqrt{3} \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)} \quad (3 \cdot 7)$$

となる。

(3・2) および (3・7) によって S_t , S_r および r はパラメータ θ によって表わされたことになる。

次に孔縁 $r=a$ における $\theta=\theta_a$ の値を種々仮定し, それに相当した b/a および S_t , S_r の値を計算してみよう。 b/a の値は (3・7) より導かれた

$$\left(\frac{b}{a} \right)^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} - \theta_a \right)} \cdot \cos \theta_a \quad (3 \cdot 8)$$

より求められ, S_t , S_r は

$$\left. \begin{aligned} S_r &= \frac{2S_0}{\sqrt{3}} \sin \left(\theta_a - \frac{\pi}{6} \right) \\ S_t &= \frac{2S_0}{\sqrt{3}} \sin \left(\theta_a + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 9)$$

より計算せられる。計算の結果は第6図に示すごとくなる。

第 6 図

第6図において

$-60^\circ < \theta_a < 30^\circ$ なるとき $b/a > 1$, $S_r/S_0 < 0$

$30^\circ < \theta_a < 90^\circ$ なるとき $b/a < 1$, $S_r/S_0 > 0$

となっている。しかるに第2節において, 円板の半径を b , 円孔の半径を a と仮定せるがゆえに, $b/a > 1$ でなくてはならない。したがって $-60^\circ < \theta_a < 30^\circ$ なる場合を採り, この場合 $S_r < 0$ であるから, 第5図において BC の間は内圧をうけた場合に当る。

次に円板の半径を a , 円孔の半径を b とし, 円板の外周 $r=a$ において半径方向の力をうけて板全体が降伏状態にある場合は, 上と全く同様の方法によって (3・8), (3・9) と同じ形の式が導かれ, その計算結果

もまた第3図のごとくなる。ただしこの場合は $b/a < 1$ であるから、 $30^\circ < \theta_a < 90^\circ$ なる場合を採り、かつこのとき $S_r > 0$ であるから、第5図において AB の間は外周に引張りをうけた場合に当たる。

これを Nádai 氏の原著に記載せられている (3・4) より導いた

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{\sqrt{3}(\frac{\pi}{6} - \theta_a)} \cdot \frac{1}{\cos \theta_a} \quad \dots\dots (3 \cdot 10)$$

によって計算すれば、第6図点線のごとくなる。

しかるに Nádai 氏の原著には第7図(原著第251図)のごとくなっており、Nádai 氏はこの図をいかなる方法で求めたのか不明であるが、この結果は幸にも著者らが上に求めた、「 BC の間は内圧をうけた場合に当たり、 AB の間は引張りをうけた場合に当たる」という結果と一致している。

第 7 図

ちなみに与えられた内圧 p に対する応力分布を求めるには、 $r=a$ において $S_r = -p$ なる条件、すなわち

第 8 図 点線は Nádai 氏の式による計算値

$$p = \frac{2S_0}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta_a\right) \quad \dots\dots (3 \cdot 11)$$

より θ_a を決定すればよい。

内圧をうけて板全体が降伏状態にあるときの板の応力分布は (3・7) より導かれた

$$\left(\frac{r}{b}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{\sqrt{3}(\theta - \frac{\pi}{6})} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \quad \dots\dots (3 \cdot 12)$$

および (3・2) より計算できる。計算結果は第8図に示される。

しかるに Nádai 氏の原著のごとく、(3・4) より導かれた

$$\left(\frac{r}{b}\right)^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{\sqrt{3}(\theta - \frac{\pi}{6})} \cdot \cos \theta \quad \dots\dots (3 \cdot 13)$$

によって計算を行えば、第8図点線のごとくなる。

円孔の半径 a 、外半径 b なる円板が外縁 $r=b$ において半径方向の引張りをうけて板全体が降伏状態にある場合も、上と同様の方法で解くことができる。

すなわち板の各点において (2・1)、(2・2) が成立するから、 S_t 、 S_r は θ なるパラメータを用いて

$$\left. \begin{aligned} S_r &= \frac{2S_0}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \\ S_t &= \frac{2S_0}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned} \right\}$$

で表わされ、 r と θ との関係は

$$r^2 = c^2 e^{\sqrt{3}\theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta}$$

となる。 c^2 なる積分定数を円孔の内縁 $r=a$ において $S_r=0$ なる境界条件より決定すれば

$$r^2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \cdot e^{\sqrt{3}(\theta - \frac{\pi}{6})} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \quad \dots\dots (3 \cdot 14)$$

となる。

これによって板の応力分布を計算すれば第9図のごとくなる。

第 9 図 点線は Nádai 氏の式による計算値

4. 結 論

Nádai 氏の著書に記載せられている薄い円板の降伏についての計算中、誤りと思われる点を指摘し、正しい計算を行った。すなわち、 θ の値は第5図のごとく訂正すべきであり、また r と θ との関係式は

(3・5) のごとくなるべきである

注:—

- (1) 昭和24年2月5日 関西支部第164回講演会において講演，
原稿受付 昭和24年2月19日。
- (2) 正員，大阪大学工学部。
- (3) 正員，大阪大学工学部。
- (4) A. Nádai : Plasticity, 1931, pp. 189-194.
- (5) 溶接時発生する応力並びに残留応力に関する基礎研究として，円板の中心部を短時間加熱冷却した時の収縮応力を実験により測定し，かつこれを塑性学的に解析せんとした。本報告昭和24年11月造船協会講演会において発表。
- (6) 念のために計算順序を示しておく。(3・3) より変数分離により

$$\frac{d \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos \theta} = \frac{dr}{r}$$

$$\cdot \frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos \theta} \cdot d\theta = \frac{dr}{r}$$

$$(\sqrt{3} + \tan \theta) d\theta = 2 \cdot \frac{dr}{r}$$

$$\sqrt{3} \theta - \log(\cos \theta) = \log r^2 + c_1$$

$$\log(r^2 \cos \theta) = \sqrt{3} \theta - c_1$$

$$r^2 \cos \theta = e^{-c_1} \cdot e^{\sqrt{3} \theta}$$

$$e^{-c_1} = c^2 \quad \text{とすれば}$$

$$r^2 = c^2 \cdot e^{\sqrt{3} \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta}$$

となり (3・5) を得る。

- (7) (3・4) は一見印刷の誤りとも思われるが，Nádai 氏の原著には (3・6) の代りに

$$b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c^2 e^{\frac{\sqrt{3}}{6} \pi}$$

となつてゐる所からみると印刷の誤りとも思われぬ。

金 属 材 料 の 降 伏 点⁽¹⁾東 村 隆 雄⁽²⁾

Yield Point of Metal

by Takao TSUKAMURA

It has been said that material has proportional limit, elastic limit and yield point. But elastic limit is the beginning of molecular process in faults of lattice, and in technical experiment the measurement of such elastic limit is impossible and senseless. In precise technical experiment mild steel has yield point alone. Velocity of deformation of material is different from pulling speed and between elastic range and plastic. Since velocity of deformation increases at the beginning of slip, we can measure yield point by measuring the point at which velocity of deformation begins to increase. This can be measured by means of mirror type extensometer and the others. Therefore, we should adopt yield point alone and establish as follows; "As yield point, we decide the limit of stress, at which the first slip arises in material, or velocity of deformation of material begins to increase, in tensile test of definite constant elastic strain rate."

1. 緒 言

金属塑性学の研究においてはまず第一に弾性と塑性との限界を明らかにしておく必要がある。この限界はまた材料強度の観点からも重要であり通常弾性限界として知られ，材料には比例限度，弾性限度，降伏点の三つがあるとされている。しかし工学において使用される測定器の精度ではかかる3点の区別はつき難く，物性論的観点からもこれらの工学的意義ははなはだ不明である。

木谷教授は岩塩単結晶の光弾性による測定において，弾性限度は降伏点の下に可逆性の限度として存在することを明らかにし，降伏点は結晶内のすべり面中に初めてすべりが生ずる応力の限度であり，弾性限度は可逆性の限度であって格子欠陥における分子離脱の

初まりであるとせられた⁽³⁾。しかし工学において行われる実験ではこの意味の弾性限度の測定は不可能であるばかりでなくまた意義がない。Docherty, 黒田両氏によれば鋼においては降伏点に到るまで 応力-ひずみ関係は直線であって比例限度，弾性限度は認められない⁽⁴⁾。これは著者の実験においても確認され，降伏点を上記のごとくとするならば鋼以外の金属においても同様であった。

かくして弾性限度は存在しても工学的には意味がなく，また応力，ひずみ間に完全な比例関係の存在しないのは周知のことである。軟鋼程度のものを比例とするならば比例限度は降伏点に一致する。ゆえに工学においては弾性と塑性との限界として降伏点のみをとり，他の2点は使用すべきではない。