$$\theta = \frac{S}{h_2} \dots\dots\dots(25)$$

直ちに定常温度に達する。

$x \equiv a$ のところでは (24) 式から

$$\theta = \frac{S}{h_2} + \frac{4S}{\pi h_2} \sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} e^{-(2n+1)^2 \tau} \dots\dots\dots(26)$$

初めは指数法則よりも、ゆるやかに定常温度に達する。

h_2 が大きいから (25) および (26) 式の θ はほとんど 0 に近い。

以上を要約すると導体の温度を上昇せしむるには h_2 を小にし、導体の温度を上昇せしめないためには h_2 を大にしたらよい。 h_1 の大小は h_2 にくらべて第 2 次的であることが判然としたわけである。

この研究は文部省の科学研究費を受けて行つたもので撰筆するに当り感謝の意を表する。

注：—

(1) 昭和 24 年 10 月 16 日 関西工学連合講演會において講演，原稿受付 昭和 24 年 12 月 5 日。

(2) 正員，神戸大学工学部。

(3),(4) Rothe-Ollendroff-Pohlhausen, Funktionentheorie und ihre Anwendung in der Technik, 1931, s. 141.

熱流による有限の長さの棒の熱伝導⁽¹⁾ (第 2 報)

熱流が時間の周期かん数の場合

片岡 秀吉⁽²⁾

Heat Conduction of a Finite Rod due to a given Flow of Heat (Part II)

Some Cases in Flow of Heat with Periodic Changes

by Hidekichi KATAOKA

Let $Q(t)$ be the rate of flow of heat from heat source per unit contacting area per unit time. We shall discuss in this paper in previous problem the following 4 cases, $Q(t) = \gamma \sin \omega(t-\beta)$, $S - \gamma \sin \omega(t-\beta)$, $\gamma \cos \omega(t-\beta)$, $S - \gamma \cos \omega(t-\beta)$.

緒 言

長さ a なる均質棒の一端に熱源を有し、これより毎時棒との単位接触面積につき熱量 $Q(t)$ を供給する。棒の他端および熱源の棒とは反対側より熱が放散する場合の一元的熱伝導の問題である。第 1 報は $Q(t) = \text{定数}$ の場合であつたが、第 2 報においては $Q(t)$ が時間の周期かん数である場合について考究する。この理論は近似的に電機、電気熔接機または電気爐等の設計資料となる。

この場合には (1) 式とにおいて第 1 報第 2 節と同様に計算すると (2) 式を得る。

第 1 図

$$Q(t) = -\frac{\gamma}{2\pi} \times \mathcal{R} \int_{(W)} \frac{e^{p(t-\beta)}}{p-i\omega} dp \dots\dots(1)$$

ただし積分路 W は p -平面上において点 $p=i\omega$ を、微小な虚数軸の右側の半円周によつて避けた虚数軸に沿う直線である。(第 1 図) W に沿うて下方から上方に

向う積分を記号 (W) にて表わす。

1. 熱流 $Q(t) = \gamma \sin \omega(t-\beta)$; γ

および ω は定数なる場合の解

$$\theta = -\frac{\alpha}{\lambda} \gamma \mathcal{R} \int_{(W)} \frac{\left\{ \frac{h_1 \alpha}{\lambda \sqrt{p}} \sin \frac{\sqrt{p}}{\alpha} (a-x) + \cos \frac{\sqrt{p}}{\alpha} (a-x) \right\} e^{p(t-\beta)}}{(p-i\omega) \sqrt{p} \left\{ \left(1 + \frac{h_1 h_2 \alpha^2}{\lambda^2 p} \right) \sin \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} + \frac{(h_1 + h_2) \alpha}{\lambda \sqrt{p}} \cos \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} \right\}} dp \dots\dots(2)$$

次に p -平面上において、原点を中心とし、半径 $r = \infty$ の円周の任意の部分 K にて表わす。いま K に沿う (2) 式の積分を考えると、その被積分かん数は次に示す式*

$$* e^{-\frac{\sqrt{r} x}{\alpha} \cos \frac{\varphi}{2}} / \sqrt{r}; \quad \text{ただし } \varphi = \angle(p), \quad r = |p|$$

に比例するから、 $r \rightarrow \infty$ に相当する K に沿う (2) 式の積分は 0 となる。よつて

$$[\theta]_{t=\beta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \gamma \mathcal{R} \oint_{(W+K_r)} \frac{\frac{h_1 \alpha}{\lambda \sqrt{p}} \sin \frac{\sqrt{p}}{\alpha} (a-x) + \cos \frac{\sqrt{p}}{\alpha} (a-x)}{(p-i\omega) \sqrt{p} \left\{ \left(1 + \frac{h_1 h_2 \alpha^2}{\lambda^2 p} \right) \sin \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} + \frac{(h_1 + h_2) \alpha}{\lambda \sqrt{p}} \cos \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} \right\}} dp$$

ここに積分路は W と K 円周の虚数軸より右半分 K_r とよりなる閉曲線 (第2図) である。

上の積分の極は $p=i\omega$ および

$$(h_1 h_2) \cos \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} *$$

第 2 図

第 3 図

$$* + \left(\frac{\lambda \sqrt{p}}{\alpha} + \frac{h_1 h_2 \alpha}{\lambda \sqrt{p}} \right) \sin \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} = 0 \quad (3)$$

の根である。しかるに (3) 式の根は第1報に述べたようにすべての負の実数であるから、上の積分は積分路内に極を有していない。ゆえに

$$[\theta]_t = \beta = 0$$

すなわち (2) 式は始条件を満足する。よつて (2) 式はこの場合の解である。

2. 解の展開

解 (2) 式を展開しよう。 K 円周の虚数軸より左半分を K_l にて表わすと (2) 式の積分は、 $t > \beta$ なるとき積分路 K_l に沿うては 0 となるから (2) 式は次式のごとく積分路を変更してもよい。

$$\theta = - \frac{\alpha}{2\pi} \gamma \int_{(W+K_l)} \frac{\left\{ \frac{h_1 \alpha}{\lambda \sqrt{p}} \sin \frac{\sqrt{p}}{\alpha} (a-x) + \cos \frac{\sqrt{p}}{\alpha} (a-x) \right\} e^{p(t-\beta)} dp}{(p-i\omega) \sqrt{p} \left\{ \left(1 + \frac{h_1 h_2 \alpha^2}{\lambda^2 p} \right) \sin \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} + \frac{(h_1+h_2)\alpha}{\lambda \sqrt{p}} \cos \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} \right\}} \quad (4)$$

ただし積分路 $W+K_l$ は W と K_l とよりなる閉曲線で第3図に示すものである。

$p=i\omega$ における留数を求めると

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left\{ \phi_1 \cos \omega(t-\beta) - \phi_2 \sin \omega(t-\beta) \right\} + i \left\{ \phi_1 \sin \omega(t-\beta) + \phi_2 \cos \omega(t-\beta) \right\} \Psi(a) \quad (5)$$

したがつて $p=i\omega$ に対する θ の項 $\theta_{s,\infty}$ は

$$\theta_{s,\infty} = \frac{\alpha \gamma}{\lambda} \frac{\phi_1 \sin \omega(t-\beta) + \phi_2 \cos \omega(t-\beta)}{\sqrt{2\omega} \Psi(a)} \quad (6)$$

いま $C = \cos \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{a-x}{\alpha}$, $S = \sin \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{a-x}{\alpha}$, $c = \cos \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{a-x}{\alpha}$, $s = \sin \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{a-x}{\alpha}$ にて表わし、

また $C_0 = (C)_{x=0}$, $S_0 = (S)_{x=0}$, $c_0 = (c)_{x=0}$, $s_0 = (s)_{x=0}$ にて表わすと

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \frac{\alpha^2 h_1 (h_1 + h_2)}{\lambda^2 \omega} \left\{ c_0 C_0 (sC + cS) + s_0 S_0 (sC - cS) \right\} + \frac{\sqrt{2} h_1^2 h_2 \alpha^3}{\lambda^3 \omega^{3/2}} (c_0 c S_0 S + s_0 s C_0 C) \\ & + \frac{h_1 h_2 \alpha^2}{\lambda^2 \omega} \left\{ c_0 S_0 (cC - sS) + s_0 C_0 (sS + cC) \right\} + \frac{\sqrt{2} \alpha}{\lambda \sqrt{\omega}} \left[h_1 \{ c_0 C (sS_0 + cC_0) + s_0 S (sS_0 - cC_0) \} \right. \\ & \left. + h_2 (c_0 c C_0 C + s_0 s S_0 S) \right] + c_0 S_0 (sS + cC) + s_0 C_0 (sS - cC) \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 = & \frac{\alpha^2 h_1 (h_1 + h_2)}{\lambda^2 \omega} \left\{ c_0 C_0 (sC - cS) - s_0 S_0 (sC + cS) \right\} + \frac{\sqrt{2} \alpha^3 h_1^2 h_2}{\lambda^3 \omega^{3/2}} (c_0 s S_0 C - s_0 c C_0 S) \\ & + \frac{h_1 h_2 \alpha^2}{\lambda^2 \omega} \left\{ c_0 S_0 (cC + sS) + s_0 C_0 (sS - cC) \right\} + \frac{\sqrt{2} \alpha}{\lambda \sqrt{\omega}} \left[h_1 \{ c_0 S (sC_0 - cS_0) - s_0 C (sC_0 + cS_0) \} \right. \\ & \left. + h_2 (s_0 c S_0 C - s_0 c S_0 C) \right] + c_0 S_0 (sS - cC) - s_0 C_0 (sS + cC) \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(a) = & \frac{\alpha^2 (h_1 + h_2)^2}{\lambda^2 \omega} (s_0^2 S_0^2 + c_0^2 C_0^2) + \frac{h_1^2 h_2^2 \alpha^4}{\lambda^4 \omega^2} (s_0^2 C_0^2 + c_0^2 S_0^2) + \frac{\sqrt{2} \alpha^3 h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{\lambda^3 \omega^{3/2}} (S_0 C_0 + s_0 c_0) \\ & + \frac{\sqrt{2} \alpha (h_1 + h_2)}{\lambda \sqrt{\omega}} (S_0 C_0 - s_0 c_0) + s_0^2 C_0^2 + c_0^2 S_0^2 \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

次に (3) 式の根における (4) 式の積分の留数を求めよう。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \left(1 + \frac{h_1 h_2 \alpha^2}{\lambda^2 p} \right) \sin \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} + \frac{(h_1 + h_2) \alpha}{\lambda \sqrt{p}} \cos \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} \right\} \\ & = \frac{1}{2 \sqrt{p}} \frac{a}{\alpha} \left[\left\{ \frac{(h_1 + h_2) \alpha}{\lambda \sqrt{p}} - \frac{2 h_1 h_2 \alpha^3}{\lambda^2 p^{3/2}} \right\} \sin \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} + \left\{ \left(1 + \frac{h_1 h_2 \alpha^2}{\lambda^2 p} \right) - \frac{(h_1 + h_2) \alpha^2}{\lambda a p} \right\} \cos \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} \right] \end{aligned}$$

ゆえに

$$(p-i\omega)\sqrt{p} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \left(1 + \frac{h_1 h_2 a^2}{\lambda^2 p} \right) \sin \frac{\sqrt{p} a}{a} + \frac{(h_1+h_2)a}{\lambda \sqrt{p}} \cos \frac{\sqrt{p} a}{a} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{a^2 \nu_s^2}{a^2} + i\omega \right) \frac{a}{\alpha} \left[\left\{ \frac{(h_1+h_2)a}{\lambda \nu_s} + \frac{2h_1 h_2 a^2}{\lambda^2 \nu_s^3} \right\} \sin \nu_s + \left\{ \left(1 - \frac{h_1 h_2 a^2}{\lambda^2 \nu_s^2} \right) + \frac{(h_1+h_2)a}{\lambda \nu_s^2} \right\} \cos \nu_s \right]$$

ここに $p = -q^2 = -\frac{a^2}{\alpha^2} \nu_s^2$ にして、これを (3) 式

$$* \frac{h_1+h_2}{\frac{\lambda}{a} \nu_s - \frac{h_1 h_2 a}{\lambda \nu_s}} = \tan \nu_s \quad \dots\dots\dots (10)$$

に代入すると ν_s は次の方程式の第 s 番目の正根で

ある.*

(10) 式の根に対する (4) 式の θ の項は

$$\frac{2a^2\omega\gamma}{\lambda a} \frac{\left[\frac{h_1 a}{\lambda \nu_s} \sin \left\{ \nu_s \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} + \cos \left\{ \nu_s \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} \right] e^{-\frac{a^2 \nu_s^2}{\alpha^2} (t-\beta)}}{\left(\frac{a^4 \nu_s^4}{a^4} + \omega^2 \right) \left[\frac{a}{\lambda \nu_s} \left(h_1 + h_2 + \frac{2h_1 h_2 a}{\lambda \nu_s^2} \right) \sin \nu_s + \left\{ 1 + \frac{a}{\lambda \nu_s^2} \left(h_1 + h_2 - \frac{h_1 h_2 a}{\lambda} \right) \cos \nu_s \right\} \right]} \quad \dots\dots\dots (11)$$

したがって (4) 式の θ を θ_s にて表わすと

$$\theta_s = \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{2\omega\lambda}} \frac{\phi_1 \sin \omega(t-\beta) + \phi_2 \cos \omega(t-\beta)}{\Psi(a)}$$

$$+ \frac{2a^2\gamma\omega}{\lambda a} \sum_1^\infty \frac{\left\{ \frac{h_1 a}{\lambda \nu_s} \sin \nu_s \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \cos \nu_s \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} e^{-\frac{a^2 \nu_s^2}{\alpha^2} (t-\beta)}}{\left(\frac{a^4 \nu_s^4}{a^4} + \omega^2 \right) \left[\frac{a}{\lambda \nu_s} \left(h_1 + h_2 + \frac{2h_1 h_2 a}{\lambda \nu_s^2} \right) \sin \nu_s + \left\{ 1 + \frac{a}{\lambda \nu_s^2} \left(h_1 + h_2 - \frac{h_1 h_2 a}{\lambda} \right) \cos \nu_s \right\} \right]} \quad \dots\dots\dots (12)$$

(12) 式は非常に複雑であるからその概念を得るために次に特別の場合について考える。

$$** + c_0 S_0 (sS - cC) - s_0 C_0 (sS + cC) \equiv (\phi_2)_{h_2 \rightarrow 0} \quad \dots\dots\dots (14)$$

3. 熱源の保熱壁が完全に熱を防ぐ場合

この場合には $h_2 \rightarrow 0$ に考えてよい。したがって (7), (8) および (9) 式から

$$\phi_1 = \frac{h_1^2 a^2}{\lambda^2 \omega} \left\{ c_0 C_0 (sC + cS) + s_0 S_0 (sC - cS) \right\}$$

$$+ \frac{\sqrt{2} h_1 a}{\lambda \sqrt{\omega}} \left\{ c_0 C (sS_0 + cC_0) + s_0 S (sS_0 - cC_0) \right\}$$

$$+ c_0 S_0 (sS + cC) + s_0 C_0 (sS - cC) \equiv (\phi_1)_{h_2 \rightarrow 0} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\phi_2 = \frac{h_1^2 a^2}{\lambda^2 \omega} \left\{ c_0 C_0 (sC - cS) - s_0 S_0 (sC + cS) \right\}$$

$$+ \frac{\sqrt{2} h_1 a}{\lambda \sqrt{\omega}} \left\{ c_0 S (sC_0 - cS_0) - s_0 C (sC_0 + cS_0) \right\} **$$

$$(\theta_s)_{h_2 \rightarrow 0} = (\theta_{s,\infty})_{h_2 \rightarrow 0} + \frac{2a^2\gamma\omega}{\lambda a} \sum_1^\infty \frac{\left[\frac{h_1 a}{\lambda \nu_s} \sin \left\{ \nu_s \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} + \cos \left\{ \nu_s \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} \right] e^{-\frac{a^2 \nu_s^2}{\alpha^2} (t-\beta)}}{\left(\frac{a^4 \nu_s^4}{a^4} + \omega^2 \right) \left[\frac{a h_1}{\lambda \nu_s} \sin \nu_s + \left(1 + \frac{a h_1}{\lambda \nu_s^2} \right) \cos \nu_s \right]} \quad \dots\dots\dots (18)$$

さらに $h_1 \gg 1$ とすれば (17) 式から

$$\nu_s = s \frac{\pi}{2}, \quad s = 1, 3, 5, \dots\dots$$

したがって (13), (14) および (15) 式から

$$(\phi_1)_{h_2 \rightarrow 0} = \frac{h_1^2 a^2}{\lambda^2 \omega} \left\{ c_0 C_0 (sC + cS) + s_0 S_0 (sC - cS) \right\} *$$

$$(\theta_s)_{h_2 \rightarrow 0} = \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{2\omega\lambda}} \sqrt{\frac{s^2 C^2 + c^2 S^2}{c_0^2 C_0^2 + s_0^2 S_0^2}} \sin \{ \omega(t-\beta) - \delta \}$$

$$+ \frac{8\omega a T \gamma}{\lambda \pi^2} \sum_{n=1,2,3,\dots}^n \frac{(-1)^n \sin \left\{ \frac{(2n+1)}{2} \pi \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\}}{\{(2n+1)^4 + \omega^2 T^2\}} e^{-(2n+1)^2 \tau} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\Psi(a) = \frac{h_1^2 a^2}{\lambda^2 \omega} (c_0^2 C_0^2 + s_0^2 S_0^2)$$

$$+ \frac{\sqrt{2} h_1 a}{\lambda \sqrt{\omega}} (S_0 C_0 - s_0 c_0) + (s_0^2 C_0^2 + c_0^2 S_0^2)$$

$$\equiv (\Psi(a))_{h_2 \rightarrow 0} \quad \dots\dots\dots (15)$$

よつて (12) 式から

$$(\theta_{s,\infty})_{h_2 \rightarrow 0} = \frac{\alpha\gamma}{\lambda}$$

$$\times \frac{(\phi_1)_{h_2 \rightarrow 0} \sin \omega(t-\beta) + (\phi_2)_{h_2 \rightarrow 0} \cos \omega(t-\beta)}{\sqrt{2\omega} (\Psi(a))_{h_2 \rightarrow 0}} \quad \dots\dots\dots (16)$$

しかるにこの場合には (10) 式から

$$\nu_s \tan \nu_s = \frac{h_1 a}{\lambda} \quad \dots\dots\dots (17)$$

よつて (12) 式から

$$* (\phi_2)_{h_2 \rightarrow 0} = \frac{h_1^2 a^2}{\lambda^2 \omega} \left\{ c_0 C_0 (sC - cS) - s_0 S_0 (sC + cS) \right\}$$

$$(\Psi(a))_{h_2 \rightarrow 0} = \frac{h_1^2 a^2}{\lambda^2 \omega} (c_0^2 C_0^2 + s_0^2 S_0^2)$$

ゆえに (16) および (18) 式から

ただし

$$\tan \delta = \frac{s_0 S_0 (sC + cS) - c_0 C_0 (sC - cS)}{c_0 C_0 (sC + cS) + s_0 S_0 (sC - cS)} \quad \dots\dots(20) *$$

$$(\theta_s)_{\substack{h_2 \rightarrow 0 \\ h_1 \rightarrow \infty}}^{x=0} = \frac{\alpha \gamma}{\omega \lambda} \sqrt{\frac{s_0^2 C_0^2 + c_0^2 S_0^2}{c_0^2 C_0^2 + s_0^2 S_0^2}} \sin \{ \omega(t - \beta) - \delta_0 \} + \frac{8 \omega a T \gamma}{\lambda \pi^2} \sum_{1,3,5,\dots}^s \frac{e^{-s^2 \tau}}{s^4 + \omega^2 T^2} \quad \dots\dots(22)$$

ただし

$$\tan \delta_0 = \frac{S_0 C_0 - s_0 c_0}{S_0 C_0 + s_0 c_0} \quad \dots\dots(23)$$

 $a \ll 1$ とすれば **

$$(\theta_s)_{\substack{h_2 \rightarrow 0 \\ h_1 \rightarrow \infty}}^{x=a} = \frac{\gamma(a-x)}{\lambda} \sin \{ \omega(t - \beta) - \delta_a \} + \frac{4 \omega T \gamma(a-x)}{\lambda \pi} \sum_{0,1,2,3,\dots}^n \frac{(-1)^n e^{-(2n+1)^2 \tau}}{(2n+1)^3 + \frac{\omega^2 T^2}{(2n+1)}} \quad \dots\dots(24)$$

ただし

$$\tan \delta_a = \tan \frac{\sqrt{\omega a}}{\sqrt{2 \alpha}} \tan \frac{\sqrt{\omega a}}{\sqrt{2 \alpha}} \quad \dots\dots(25)$$

(22) 式から熱源またはその近くの温度は初めには指数法則よりもすみやかに定常温度に達し, (25) 式から棒の放熱端の近くの温度は初めには指数法則よりもゆるやかに定常温度に達することがわかる。

4. 熱源に保熱壁がなく, 強制通風によつて放散係数を非常に大きくした場合 ($h_2 \gg 1$ に相当する場合)

h_2 が大きいから, これに比して h_1 は 0 とみなしうるとしたら次のようになる。

(10) 式から $h_1 \rightarrow 0$ のときには ***

$$(\theta_s)_{h_1 \rightarrow 0} = \frac{\alpha \gamma}{\sqrt{2 \omega \lambda}} \frac{(\phi_1)_{h_1 \rightarrow 0} \sin \omega(t - \beta) + (\phi_2)_{h_1 \rightarrow 0} \cos \omega(t - \beta)}{(\Psi(a))_{h_1 \rightarrow 0}} \quad \dots\dots(30)$$

および

$$(\theta_s)_{h_1 \rightarrow 0} = (\theta_s)_{h_1 \rightarrow 0} + \frac{2 \alpha^2 \omega \gamma}{\lambda a} \sum_1^s \frac{\cos \left\{ \nu_s \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} e^{-\frac{\alpha^2 \nu_s^2}{a^2} (t - \beta)}}{\left(\frac{\alpha^4 \nu_s^4}{a^4} + \omega^2 \right) \left[\frac{a h_2}{\lambda \nu_s} \sin \nu_s + \left(1 + \frac{a h_2}{\lambda \nu_s^2} \right) \cos \nu_s \right]} \quad \dots\dots(31)$$

さらに $h_2 \gg 1$ とすれば (26) 式から

$$\nu_s = s \frac{\pi}{2}, \quad s = 1, 3, 5, \dots\dots$$

また (27), (28) および (29) 式から

$$(\phi_1)_{h_1 \rightarrow 0} = \frac{\sqrt{2 \alpha h_2}}{\lambda \sqrt{\omega}} (c_0 c C_0 C + s_0 s S_0 S) *$$

$$(\theta_s)_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \gg 1}} = \frac{\gamma}{h_2} \sqrt{\frac{s^2 S^2 + c^2 C^2}{c_0^2 C_0^2 + s_0^2 S_0^2}} \sin \{ \omega(t - \beta) - \delta' \} + \frac{4 \omega T \gamma}{h_2 \pi} \sum_{0,1,2,3,\dots}^n \frac{(-1)^n \cos \left\{ \frac{2n+1}{2} \pi \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} e^{-(2n+1)^2 \tau}}{(2n+1)^3 + \frac{T^2 \omega^2}{2n+1}} \quad \dots\dots(32)$$

ただし

$$\tan \delta' = \frac{-s_0 c S C_0 + s_0 c S_0 C}{c_0 c C_0 C + s_0 s S_0 S} \quad \dots\dots(33)$$

 $x=0$ のところ, すなわち熱源またはその近くの温 **

$$* T = \frac{4 a^2}{\pi^2 \alpha^2}, \quad \frac{t - \beta}{T} = \tau \quad \dots\dots(21)$$

 $x=0$ すなわち熱源のごく近くにおいては

$$** (\theta_s)_{\substack{h_2 \rightarrow 0 \\ h_1 \rightarrow \infty}}^{x=0} = \frac{a}{\lambda} \gamma \sin \omega(t - \beta) = \frac{a}{\lambda} Q(t), \quad \delta_0 = 0$$

これは当然予期される結果である。

 $a - x \ll 1$ すなわち棒の放熱端の近くの温度は

$$*** \nu_s \tan \nu_s = \frac{h_2 \tau}{\lambda} \quad \dots\dots(26)$$

また $h \rightarrow 0$ のときには (13), (14) および (15) 式から

$$(\phi_1)_{h_1 \rightarrow 0} = \frac{\sqrt{2 \alpha h_2}}{\lambda \sqrt{\omega}} (c_0 c C_0 C + s_0 s S_0 S) + c_0 S_0 (c C + s S) + s_0 C_0 (s S - c C) \quad \dots\dots(27)$$

$$(\phi_2)_{h_1 \rightarrow 0} = \frac{\sqrt{2 \alpha h_2}}{\lambda \sqrt{\omega}} (c_0 s C_0 S - s_0 c S_0 C) + c_0 S_0 (s S - c C) - s_0 C_0 (s S + c C) \quad \dots\dots(28)$$

$$(\Psi(a))_{h_1 \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2 h_2^2}{\lambda^2 \omega} (c_0^2 C_0^2 + s_0^2 S_0^2) + \frac{\sqrt{2 \alpha h_2}}{\lambda \sqrt{\omega}} (S_0 C_0 - s_0 c_0) + s_0^2 C_0^2 + c_0^2 S_0^2 \quad (29)$$

(12) 式から

$$* (\phi_2)_{h_1 \rightarrow 0} = \frac{\sqrt{2 \alpha h_2}}{\lambda \sqrt{\omega}} (c_0 s C_0 S - s_0 c S_0 C)$$

$$(\Psi(a))_{h_1 \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2 h_2^2}{\lambda^2 \omega} (c_0^2 C_0^2 + s_0^2 S_0^2)$$

ゆえに (30) および (31) 式から

** 度は

$$\left(\theta_s \right)_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \gg 1}}^{x=0} = \frac{\gamma}{h_2} \sin \omega(t - \beta) = \frac{Q(t)}{h_2} \quad \dots\dots(34)$$

これは当然予期せられる結果である。 $h_2 \gg 1$ なるに

より温度上昇は小さい。また直ちに定常温度に達する。

$a-x \ll 1$ すなわち棒の放熱端の近くの温度は

$$\begin{aligned} \left(\theta_s\right)_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \gg 1}}^{x \neq a} &= \frac{\gamma}{h_2 \sqrt{c_0^2 C_0^2 + s_0^2 S_0^2}} \sin \{\omega(t-\beta) - \delta_a'\} \\ &+ \frac{4\gamma\omega T}{h_2\pi} \sum_{n=0,1,2,3,\dots} \frac{(-1)^n e^{-(2n+1)^2\tau}}{(2n+1)^3 + \frac{T^2\omega^2}{2n+1}} \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

ここに *

$$\theta_c = \frac{\alpha}{2\pi} \gamma \int \frac{\left\{ \frac{h_1\alpha}{\lambda\sqrt{p}} \sin \frac{\sqrt{p}}{\alpha} (a-x) + \cos \frac{\sqrt{p}}{\alpha} (a-r) \right\} e^{p(t-\beta)}}{(p-i\omega)\sqrt{p} \left\{ \left(1 + \frac{h_1 h_2 \alpha^2}{\lambda^2 p}\right) \sin \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} + \frac{(h_1+h_2)\alpha}{\lambda\sqrt{p}} \cos \frac{\sqrt{p} a}{\alpha} \right\}} dp \dots\dots\dots(37)$$

$$\theta_{c,\infty} = \frac{\alpha\gamma}{\lambda} \frac{\phi_1 \cos \omega(t-\beta) - \phi_2 \sin \omega(t-\beta)}{\sqrt{2\omega\Psi(a)}} \dots\dots\dots(38)$$

$$\begin{aligned} \theta_c = \theta_{c,\infty} - \frac{2\alpha^4\gamma}{\lambda a^3} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{h_1 a}{\lambda\nu_s} \sin \nu_s \left(1 - \frac{x}{a}\right) + \cos \nu_s \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right\} e^{-\frac{\alpha^2\nu_s^2}{a^2}(t-\beta)}}{\left(\frac{\alpha^4\nu_s^2}{a^4} + \frac{\omega^2}{\nu_s^2}\right) \left[\frac{a}{\lambda\nu_s} \left(h_1+h_2 + \frac{2h_1 h_2 a}{\lambda\nu_s^2}\right) \sin \nu_s + \left\{1 + \frac{a}{\lambda\nu_s^2} \left(h_1+h_2 - \frac{h_1 h_2 a}{\lambda}\right)\right\} \cos \nu_s \right]} \dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

6. 特別な場合

(39) 式の概念を得るために二つの特別な場合を考えよう。

(i) h_2 に比して h_1 が非常に大きい場合 (7), (8), (9) および (10) 式から $h_2 \rightarrow 0$, $h_1 \gg 1$ と考えたと **

$$\begin{aligned} \left(\theta_c\right)_{\substack{h_2 \rightarrow 0 \\ h_1 \gg 1}}^{x \neq a} &= \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\omega\lambda}} \sqrt{\frac{s^2 C^2 + c^2 S^2}{s_0^2 S_0^2 + c_0^2 C_0^2}} \cos \{\omega(t-\beta) - \delta\} \\ &- \frac{8\alpha\gamma}{\lambda\pi^2} \sum_{n=0,1,2,3,\dots} \frac{(-1)^n \sin \left\{ \frac{2n+1}{2} \pi \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right\} e^{-(2n+1)^2\tau}}{(2n+1)^2 + \frac{\omega^2 T^2}{(2n+1)^2}} \dots\dots\dots(40) \end{aligned}$$

δ は (20) 式によつて与えられる。

$$\left(\theta_c\right)_{\substack{h_2 \rightarrow 0 \\ h_1 \gg 1}}^{x=0} = \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\omega\lambda}} \sqrt{\frac{s_0^2 C_0^2 + c_0^2 S_0^2}{s_0^2 S_0^2 + c_0^2 C_0^2}} \cos \{\omega(t-\beta) - \delta_0\} - \frac{8\alpha\gamma}{\lambda\pi^2} \sum_{s=1,2,3,\dots}^s \frac{e^{-s^2\tau}}{s^2 + \frac{\omega^2 T^2}{s^2}} \dots\dots\dots(41)$$

δ_0 は (23) 式によつて与えられる。

(41) 式において $a \ll 1$ なるときは ***

$$\left(\theta_c\right)_{\substack{h_2 \rightarrow 0 \\ h_1 \gg 1}}^{x \neq a} = \frac{\gamma(a-x)}{\lambda\sqrt{s_0^2 S_0^2 + c_0^2 C_0^2}} \cos \{\omega(t-\beta) - \delta_a\} - \frac{4\gamma(a-x)}{\lambda\pi} \sum_{n=0,1,2,\dots} \frac{(-1)^n e^{-(2n+1)^2\tau}}{(2n+1) + \frac{\omega^2 T^2}{(2n+1)^3}} \dots\dots\dots(42)$$

(ii) h_1 に比して h_2 が非常に大きい場合 (7), (8), (9) および (10) 式から $h_1 \rightarrow 0$, $h_2 \gg 1$ と考えたと

$$\begin{aligned} \left(\phi_1\right)_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \gg 1}} &= \frac{\sqrt{2\alpha h_2}}{\lambda\sqrt{\omega}} (c_0 c C_0 C + s_0 s S_0 S) * \\ \left(\theta_c\right)_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \gg 1}} &= \frac{\gamma}{h_2} \sqrt{\frac{s^2 S^2 + c^2 C^2}{s_0^2 S_0^2 + c_0^2 C_0^2}} \cos \{\omega(t-\beta) - \delta'\} \end{aligned}$$

$$* \tan \delta_a' = \tan \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{a}{\alpha} \tan \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{a}{\alpha} \dots\dots\dots(36)$$

h_2 が非常に大きいから温度上昇は低いが、しかし初めには指数法則よりゆるやかに定常状態に達する。

5. 熱流 $Q(t) = \gamma \cos \omega(t-\beta)$

なる場合の解

この場合の温度を θ_c とすれば第1報第2節と同様にして

$$** \left(\phi_1\right)_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_1 \gg 1}} = \frac{\alpha^2 h_1^2}{\lambda^2 \omega} \left\{ c_0 C_0 (sC + cS) + s_0 S_0 (sC - cS) \right\}$$

$$\left(\phi_2\right)_{\substack{h_2 \rightarrow 0 \\ h_1 \gg 1}} = \frac{\alpha^2 h_1^2}{\lambda^2 \omega} \left\{ c_0 C_0 (sC - cS) - s_0 S_0 (sC + cS) \right\}$$

$$\left(\Psi(a)\right)_{\substack{h_2 \rightarrow 0 \\ h_1 \gg 1}} = \frac{\alpha^2 h_1^2}{\lambda^2 \omega} (s_0^2 S_0^2 + c_0^2 C_0^2)$$

$$\nu_s = s \frac{\pi}{2}, \quad s = 1, 3, 5 \dots\dots$$

$$*** \left(\theta_c\right)_{\substack{h_2 \rightarrow 0 \\ h_1 \gg 1}}^{x=0} = \frac{a}{\lambda} Q(t), \quad t \neq \beta$$

(40) 式において $x \neq a$ のところでは

$$* \left(\phi_2\right)_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \gg 1}} = \frac{\sqrt{2\alpha h_2}}{\lambda\sqrt{\omega}} (s c_0 S C_0 - s_0 c S_0 C)$$

$$\left(\Psi(a)\right)_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \gg 1}} = \frac{\alpha^2 h_2^2}{\lambda^2 \omega} (s_0^2 S_0^2 + c_0^2 C_0^2)$$

$$- \frac{4\gamma}{h_2\pi} \sum_{n=0,1,2,\dots}^n \frac{(-1)^n \cos \left\{ \frac{2n+1}{2} \pi \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} e^{-(2n+1)^2 \tau}}{(2n+1)^2 + \frac{\omega^2 T^2}{(2n+1)^2}} \dots\dots\dots (43)$$

$$\left(\theta_c \right)_{\substack{x=0 \\ h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \gg 1}} = \frac{\gamma}{h_2} \cos \omega(t-\beta), \quad t \neq \beta \dots\dots\dots (44)$$

$$\left(\theta_c \right)_{\substack{x \neq a \\ h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \gg 1}} = \frac{\gamma}{h_2 \sqrt{s_0^2 S_0^2 + c_0^2 C_0^2}} \cos \{ \omega(t-\beta) - \delta_a' \} - \frac{4\gamma}{\pi h_2} \sum_{n=0,1,2,\dots}^n \frac{(-1)^n e^{-(2n+1)^2 \tau}}{(2n+1)^2 + \frac{\omega^2 T^2}{(2n+1)^2}} \dots\dots\dots (45)$$

すなわち熱源の温度は直ちに定常温度に達するが、棒の放熱端の近くの温度は初めは指数法則よりもゆるやかに定常温度に達する.*

* 7. 熱流 $Q(t) = S - \gamma \sin \omega(t-\beta)$ なる場合

このときには

$$Q(t) = \frac{S}{2\pi i} \int_{(W_0)} \frac{e^{p(t-\beta)}}{p} dp - \frac{\gamma}{2\pi} \mathcal{R} \int_{(W)} \frac{e^{p(t-\beta)}}{p-i\omega} dp = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{R} \int_{(W_2)} \left(\frac{iS}{p} - \frac{\gamma}{p-i\omega} \right) e^{p(t-\beta)} dp$$

第4図

ここに積分路 W_2 は p 平面上において原点 $p=0$ および $p=i\omega$ を、それぞれ微小な虚数軸の右側の半円周によつて避けた虚数軸に沿う直線 (第4図) である。よつて第1報(2)式は

$$** = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{R} \int_{(W_2)} \left(\frac{iS}{p} - \frac{\gamma}{p-i\omega} \right) e^{p(t-\beta)} dp \dots\dots\dots (46)$$

となる。この第1報の(2)式の代りに(46)式を用いて第1報第2節と同様にすると θ は $Q(t)=S$ の結果から $Q(t)=\gamma \sin \omega(t-\beta)$ の結果を引いたものになる。

ゆえに、この場合の θ を θ_1 にて表わすと

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + h_2 \theta & ** \\ \theta_1 = S & \frac{1 + \frac{h_1}{\lambda}(a-x)}{h_1 + h_2 + \frac{h_1 h_2 a}{\lambda}} - \frac{\alpha \gamma}{\sqrt{2} \omega \lambda} \frac{\phi_1 \sin \omega(t-\beta) + \phi_2 \cos \omega(t-\beta)}{\Psi(a)} - \frac{2}{\lambda} \sum_{s=1,2,3,\dots}^s \left\{ \frac{aS}{\nu_s^2} + \frac{\alpha^2 \omega \gamma}{a \left(\frac{\alpha^4 \nu_s^4}{a^4} + \omega^2 \right)} \right\} \\ & \times \left[\frac{h_1 a}{\lambda \nu_s} \sin \nu_s \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \cos \nu_s \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right] e^{-\frac{\alpha^2 \nu_s^2}{a^2} (t-\beta)} \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

特別な場合 (i) $h_2 \rightarrow 0, h_1 \rightarrow \infty$ の場合

$$\begin{aligned} \left(\theta_1 \right)_{\substack{h_2 \rightarrow 0 \\ h_1 \rightarrow \infty}} &= \frac{1}{\lambda} \left[S(a-x) - \frac{\alpha \gamma}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{s_0^2 C_0^2 + c_0^2 S_0^2}{c_0^2 C_0^2 + s_0^2 S_0^2}} \sin \{ \omega(t-\beta) - \delta \} \right] \\ &- \frac{8a}{\lambda \pi^2} \sum_{n=0,1,2,3,\dots}^n (-1)^n \left\{ \frac{S}{(2n+1)^2} + \frac{\omega T \gamma}{(2n+1)^4 + \omega^2 T^2} \right\} \sin \left\{ \frac{(2n+1)}{2} \pi \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} e^{-(2n+1)^2 \tau} \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

$x=0$ のところの温度

$$\begin{aligned} \left(\theta_1 \right)_{\substack{x=0 \\ h_2 \rightarrow 0 \\ h_1 \rightarrow \infty}} &= \frac{1}{\lambda} \left[aS - \frac{\alpha \gamma}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{s_0^2 C_0^2 + c_0^2 S_0^2}{c_0^2 C_0^2 + s_0^2 S_0^2}} \sin \{ \omega(t-\beta) - \delta_0 \} \right] \\ &- \frac{8a}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=0,1,2,\dots}^n \left[\frac{S}{(2n+1)^2} + \frac{\omega T \gamma}{(2n+1)^4 + \omega^2 T^2} \right] e^{-(2n+1)^2 \tau} \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

熱源の近くの温度は初めは指数法則よりもすみやかに定常温度に達する。 $a \ll 1$ なるときは

$$\left(\theta_1 \right)_{\substack{x=0 \\ a \ll 1 \\ h_2 \rightarrow 0 \\ h_1 \rightarrow \infty}} = \frac{a}{\lambda} \{ S - \gamma \sin \omega(t-\beta) \} = \frac{a}{\lambda} Q(t), \quad t \neq \beta \dots\dots\dots (50)$$

これは当然の結果であつて、直ちに定常温度に達するのである。棒の放熱端の近くにおいては

$$\begin{aligned} \left(\theta_1 \right)_{\substack{x \neq a \\ h_2 \rightarrow 0 \\ h_1 \rightarrow \infty}} &= \frac{a-x}{\lambda} \left[S - \gamma \sin \{ \omega(t-\beta) - \delta_a \} \right] \\ &- \frac{4(a-x)}{\lambda \pi} \sum_{n=0,1,2,\dots}^n \left(\frac{S}{2n+1} + \frac{\omega T \gamma}{(2n+1)^3 + \frac{\omega^2 T^2}{2n+1}} \right) (-1)^n e^{-(2n+1)^2 \tau} \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

棒の放熱端の近くの温度は初めは指数法則よりもゆるやかに定常温度に達す。

(ii) $h_2 \gg 1, h_1 \rightarrow 0$ の場合

$$\begin{aligned} (\theta_1)_{h_2 \gg 1}^{h_1 \rightarrow 0} &= \frac{1}{h_2} \left(S - \gamma \sqrt{\frac{s^2 S^2 + c^2 C^2}{c_0^2 C_0^2 + s_0^2 S_0^2}} \sin \{ \omega(t - \beta) - \delta' \} \right) \\ &- \frac{4}{\pi h_2} \sum_{n=0,1,2,3,\dots}^n (-1)^n \left\{ \frac{S}{2n+1} + \frac{\omega T \gamma}{(2n+1)^3 + \frac{T^2 \omega^2}{2n+1}} \right\} \cos \left\{ \frac{2n+1}{2} \pi \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} e^{-(2n+1)^2 \tau} \dots (52) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } (\theta_1)_{h_2 \gg 1}^{x=0} = \frac{S - \gamma \sin \omega(t - \beta)}{h_2} = \frac{Q(t)}{h_2}, \quad t \neq \beta \dots (53)$$

$$\begin{aligned} (\theta_1)_{h_2 \gg 1}^{x=a} &= \frac{1}{h_2} \left[S - \gamma \sqrt{\frac{s^2 S^2 + c^2 C^2}{c_0^2 C_0^2 + s_0^2 S_0^2}} \sin \{ \omega(t - \beta) - \delta_a' \} \right] \\ &- \frac{4}{\pi h_2} \sum_{n=0,1,2,\dots}^n (-1)^n \left\{ \frac{S}{2n+1} - \frac{\gamma \omega T}{(2n+1)^3 + \frac{T^2 \omega^2}{2n+1}} \right\} e^{-(2n+1)^2 \tau} \dots (54) \end{aligned}$$

熱源の近くの棒の温度は直ちに定常状態に達するが、棒の放熱端の温度は初めは指数法則よりもゆるやかに定常状態に達する。

8. 熱流 $Q(t) = S - \gamma \cos \omega(t - \beta)$ なる場合

このときには

$$Q(t) = \frac{1}{2\pi} \oint_{(W_2)} \left(\frac{S}{p} - \frac{\gamma}{p - i\omega} \right) e^{p(t - \beta)} dp$$

に着目して同様に計算を行うと次の結果を得る。この場合の温度を θ_2 にて表わす。

$$\begin{aligned} (\theta_2)_{h_2 \rightarrow 0}^{h_1 \rightarrow \infty} &= \frac{1}{\lambda} \left[S(a - x) - \frac{\alpha \gamma}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{s^2 C^2 + c^2 S^2}{c_0^2 C_0^2 + s_0^2 S_0^2}} \cos \{ \omega(t - \beta) - \delta \} \right] \\ &- \frac{8a}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=0,1,2,\dots}^n \left[\frac{S}{(2n+1)^2} - \frac{\gamma}{(2n+1)^2 + \frac{\omega^2 T^2}{(2n+1)^2}} \right] (-1)^n \sin \left\{ (2n+1) \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} e^{-(2n+1)^2 \tau} \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\theta_2)_{h_2 \rightarrow 0}^{x=0} &= \frac{1}{\lambda} \left[aS - \frac{\gamma \alpha}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{s_0^2 C_0^2 + c_0^2 S_0^2}{s_0^2 S_0^2 + c_0^2 C_0^2}} \cos \{ \omega(t - \beta) - \delta_0 \} \right] \\ &- \frac{8a}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=0,1,2,\dots}^n \left(\frac{S}{(2n+1)^2} - \frac{\gamma}{(2n+1)^2 + \frac{\omega^2 T^2}{(2n+1)^2}} \right) e^{-(2n+1)^2 \tau} \dots (56) \end{aligned}$$

熱源の近くの温度は初めは指数法則よりもすみやかに定常温度に達する。

$$\begin{aligned} (\theta_2)_{h_2 \rightarrow 0}^{a \ll 1} &= \frac{a}{\lambda} Q(t), \quad t \neq \beta \\ (\theta_2)_{h_2 \rightarrow 0}^{x=a} &= \frac{a-x}{\lambda} \left[S - \gamma \sqrt{\frac{s^2 S^2 + c^2 C^2}{s_0^2 S_0^2 + c_0^2 C_0^2}} \cos \{ \omega(t - \beta) - \delta_a \} \right] \\ &- \frac{4(a-x)}{\pi \lambda} \sum_{n=0,1,2,\dots}^n \left(\frac{S}{2n+1} - \frac{\gamma}{(2n+1)^2 + \frac{\omega^2 T^2}{(2n+1)^2}} \right) (-1)^n e^{-(2n+1)^2 \tau} \dots (57) \end{aligned}$$

棒の放熱端の近くの温度は初めは指数法則よりもゆるやかに定常温度に達する。つぎに

$$\begin{aligned} (\theta_2)_{h_2 \gg 1}^{h_1 \rightarrow 0} &= \frac{1}{h_2} \left[S - \gamma \sqrt{\frac{s^2 S^2 + c^2 C^2}{s_0^2 S_0^2 + c_0^2 C_0^2}} \cos \{ \omega(t - \beta) - \delta' \} \right] \\ &- \frac{4}{\pi h_2} \sum_{n=0,1,2,\dots}^n \left(\frac{S}{2n+1} - \frac{\gamma}{(2n+1)^2 + \frac{\omega^2 T^2}{(2n+1)^2}} \right) (-1)^n \cos \left\{ (2n+1) \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} e^{-(2n+1)^2 \tau} \quad (58) \end{aligned}$$

$$(\theta_2)_{h_2 \gg 1}^{x=0} = \frac{Q(t)}{h_2}, \quad t \neq \beta \quad \text{熱源の近くの温度は直ちに定常温度に達する。}$$

$$\begin{aligned} (\theta_2)_{h_2 \gg 1}^{x=a} &= \frac{1}{h_2} \left[S - \gamma \sqrt{\frac{s^2 S^2 + c^2 C^2}{s_0^2 S_0^2 + c_0^2 C_0^2}} \cos \{ \omega(t - \beta) - \delta_a' \} \right] \\ &- \frac{4}{\pi h_2} \sum_{n=0,1,2,\dots}^n (-1)^n \left[\frac{S}{2n+1} - \frac{\gamma}{(2n+1)^2 + \frac{\omega^2 T^2}{(2n+1)^2}} \right] e^{-(2n+1)^2 \tau} \dots (59) \end{aligned}$$

放熱端の近くの温度は初めは指数法則よりもゆるやかに定常温度に達す。

なお任意の周期かん数は、これを Fourier 級数に展開しうる場合には $Q(t) = \gamma \sin \omega(t - \beta)$ および $Q(t) = \gamma \cos \omega(t - \beta)$ の結果を用いて求めることができる。

この研究は文部省の科学研究費を受けて行つたもので、
で撰筆するにあつて謝意を表します。

注：—

(1) 昭和 24 年 10 月 16 日 関西工学連合講演会において講演。
原稿受付 昭和 25 年 5 月 12 日。

(2) 正員、神戸大学工学部。

平面板面における自然対流による熱伝達の研究 (第1報)⁽¹⁾

菅 原 菅 雄⁽²⁾ 岐 美 格⁽³⁾

Studies of Surface Heat Transmission by Natural Convection on Flat plate (1st Report)

by Suga SUGAWARA and Itaru MICHIOYOSHI

In this paper, we studied theoretically the heat transmission by the natural convection from a vertical flat plate to the gas which is in contact with the plate.

At first, we showed that coefficient of surface heat transmission analyzed by means of the energy equation for the temperature boundary layer, coincided very well with Schmidt's and Beckmann's experimental results.

And then we analyzed the surface heat transmission in the case of variable temperature in the direction of x , that is in case of 1. $T_1 - T_0 = Bx^\beta$, and 2. $T_1 - T_0 = A + Bx$,

where T_1 = temperature of flat plate

T_0 = temperature of cold gas

B, β = constant

A = constant. ($\neq 0$)

1. 緒 言

この論文は自然対流により、垂直平面板からこれに接する気体に熱が移動する場合における理論的研究である。従来、この種の熱移動に関しては、Schmidt および Beckmann⁽⁴⁾ が、空気に対して実験を行い、また Pohlhausen は微分方程式をべき級数によつて解析し、Schmidt 等の実験結果を用いて、温度分布速度分布を計算している。しかし、その計算が非常に面倒であることにかんがみ、筆者らはこれを近似的に取り扱い、温度境界層に対するエネルギー方程式を用いて計算しようとするものであつて、この方法による結果は板面附近の状態に関しては十分な精度をもつことが期待される。

さらにこの方法により、板面の温度が高さの方向に変化する場合おも計算し、工学設計上有用な資料を与えようとするものである。

2. 垂直平面板面における自然対流による熱伝達の常微分方程式

第1図において、 $1-1$ は高さ方向に温度変化のある垂直平面板を示す。いま板の最下端を座標の原点にとり、その板に沿うて高さの方向に x 軸、板に垂直の

方向に y 軸をとり、 x 方向の分速度を u 、 y 方向のそれを v とする。しかして自然対流が、定常状態において2次元流れをすると考え、気体の動粘性係数を ν 、

第 1 図

温度伝播率を a として、それらが温度により変化しないとすれば、自然対流による熱伝達の基礎微分方程式は次式のようなになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \frac{T - T_0}{T_0} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots (1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \dots (2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots (3)$$

ここに、 T は気体の絶対温度で、 T_0 は板より十分離