ν	一 端 固 定										
s	$\xi_1=0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	10/8	10/6	10/4	10/2	∞
0	4.493	3.60	2.83	2.25	1.86	$\pi/2$	1.288	0.990	0.686	0.286	0
1/8		3.59	2.72	2.14	1.68		1.147	0.833	0.550	0.258	
1/4		3.55	2.59	1.98	1.54	1.257	1.028	0.745	0.473	0.241	
1/2		3.45	2.31	1.72	1.34	1.079	0.873	0.630	0.391	0.217	
3/4		3.29	2.09	1.54	1.18		0.760	0.550	0.342	0.203	
1		3.06	1.92	1.41	1.08	0.854	0.685	0.503	0.305	0.185	
1 1/2		2.65	1.64	1.20	0.943		0.583	0.428	0.259	0.165	
2		2.34	1.46	1.06	0.844	0.655	0.518	0.382	0.232	0.152	
3		1.95	1.22	0.918	0.702		0.440	0.318	0.196	0.133	
4		1.71	1.05	0.791	0.612	0.472	0.382	0.275	0.172	0.120	
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

第 3 表

ν	0	$\pi/24$	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$\tan \nu$	0	0.131 7	0.267 9	0.414 2	0.577 4	1.000 0	1.732 1	3.732 1	∞
$1/\nu$	∞	7.639 4	3.819 7	2.546 4	1.909 8	1.273 2	0.954 9	0.763 9	0.636 6

注：一

(1) 昭和 25 年 3 月 3 日 福岡地方講演会において講演，原稿受付
昭和 25 年 3 月 23 日。

(2) 正員，鹿児島県立大学工学部。

(3) 高橋利衛，日本航空学会誌，9 卷 81 號「断面が任意に漸變す

る片持梁の振れ振動について」。

(4) 中川元，機械学会論文集，8 卷 32 號「簡単な規則に従う漸
變断面を有する片持梁の振れ振動数」。

(5) (3)，(4)論文参照。

534.121.2

だ円形膜の基本振動に対する一数值解法について⁽¹⁾宮 崎 孔 友⁽²⁾

On a Numerical Solution for Fundamental Vibrations of Elliptic Membranes

by Kōyū MIYAZAKI

In the present paper, the author has mentioned a new solution based on Lagrange's Formula of Interpolation as one of the numerical solutions of linear partial differential equations in the case of having a domain surrounded by an arbitrary closed curve, and has examined whether it is of general practical use by obtaining the answer of the heading problem through applying this new solution to it.

I. 緒 言

任意閉曲線を周辺に持つ線型偏微分方程式の新たな一数值解法として，Lagrange の補間公式より出発せる解法を述べ，この解法を表題の問題に適用してその解を求め，あわせて本解法の実用性を検討したものである。

II. 解 法 の 理 論

今，解を求めるべき微分方程式を，簡単のため，次のごとく仮定する。

$$P_0(x,y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Q_0(x,y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_1(x,y) \frac{\partial w}{\partial x} + Q_1(x,y) \frac{\partial w}{\partial y} + R(x,y)w + S(x,y) = 0 \cdots (1)$$

境界条件として，

$$\text{周辺において，} w = \text{Const.} \cdots (2)$$

まず，第 1 図のごとく，考慮すべき領域を， x 軸および y 軸方向にそれぞれ任意間隔にて分割し，得られる各格子点 (ξ, η) における偏微係数 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ， $\frac{\partial w}{\partial x}$

および $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ を, これらの格子点におけるかん数値 $w_{\xi, \eta}$ の代数和とし

てあらわせば, 前者は, その点を通る x 軸上の各格子点におけるかん数値のみの代数和としてあらわされ, 後者は, その点を通る y 軸上の各格子点におけるかん数

第 1 図

値のみの代数和としてあらわされることはあきらかである. すなわち, これらの偏微係数は, 一般に, 次の形式にて与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\xi, \eta} &= \sum_{\xi=0}^m c_{\xi} w_{\xi, \eta} \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\xi, \eta} &= \sum_{\eta=0}^n c_{\eta} w_{\xi, \eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに, m および n は, それぞれの場合における x 軸および y 軸方向についての分割数である.

さて, (3) 式における係数 c_{ξ} (および c_{η}) を決定するため, ラグランジュの補間公式を考慮する. すなわち $w(x)$

$$= \sum_{\xi=0}^m \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{\xi-1})(x-x_{\xi+1})\dots(x-x_m)}{(x_{\xi}-x_0)(x_{\xi}-x_1)\dots(x_{\xi}-x_{\xi-1})(x_{\xi}-x_{\xi+1})\dots(x_{\xi}-x_m)} w_{\xi} \dots\dots\dots (4)$$

(4) 式を, 逐次微分することにより, $w'(x), w''(x)$ が得られ, したがって, $w'(x_0), w'(x_1), \dots\dots\dots, w''(x_0), w''(x_1), \dots\dots\dots$ が容易に得られる. 今, その一例として, $m=4$ の場合を, 第 1 表に示す. ここに, h_1, h_2, h_3 および h_4 は, それぞれ, $x_0 \sim x_1, x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3$ および $x_3 \sim x_4$ の間隔をあらわす.

かくして, c_{ξ} (および c_{η}) が決定せられるゆえ, 次に (3) 式を原微分方程式に代入することにより, 一般に, n 元一次連立方程式が得られ, この方程式を解くことにより, 求むる近似解が得られる.

III. 微分方程式および境界条件

解を求めるべき微分方程式は, 周知のごとく次式によって与えられる.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K^2 w = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここに, K は求めるべき固有値であり, 境界条件としては,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots (6)$$

なるだ円上において, $w=0$ (7) である.

IV. 数 値 計 算

今, 第 2 図のごとく, だ円形膜の長径および短径を,

第 1 表

	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
w_1'	$-h_2(h_2+h_3)(h_2+h_3+h_4)$	$h_2(h_2+h_3)(-h_1+h_2+h_3+h_4)$	$h_1(h_2+h_3)(h_2+h_3+h_4)$	$-h_1h_2(h_2+h_3+h_4)$	$h_1h_2(h_2+h_3)$
w_2'	$h_2h_3(h_3+h_4)$	$-h_2(h_1+h_2)(h_3+h_4)$	$h_3(h_1+2h_2)(h_3+h_4)$	$h_2(h_1+h_2)(h_3+h_4)$	$-h_2h_3(h_1+h_2)$
w_3'	$-h_3h_4(h_2+h_3)$	$h_3h_4(h_1+h_2+h_3)$	$-h_4(h_2+h_3)(h_1+h_2+h_3)$	$-h_3(h_2+h_3)(h_1+h_2+h_3)$	$h_3(h_2+h_3)(h_1+h_2+h_3)$
w_1''	$h_2(h_2+h_3) + (2h_2+h_3)(h_2+h_3+h_4)$	$-h_2(h_2+h_3) + h_1(3h_2+2h_3+h_4)$	$h_1(2h_2+h_3)(h_2+h_3+h_4)$	$-h_3(h_2+h_3)(h_1+h_2+h_3)$	$h_2(h_2+h_3) - h_1(2h_2+h_3)$
w_2''	$h_3(h_3+h_4) - h_2(2h_3+h_4)$	$(h_1+h_2)(2h_3+h_4) - h_3(h_3+h_4)$	$h_2(h_1+h_2) + h_3(h_3+h_4)$	$-h_2(h_1+h_2) + (h_1+2h_2)(h_3+h_4)$	$h_2(h_1+h_2) - h_3(h_1+2h_2)$
w_3''	$h_3(h_2+h_3) - h_4(h_2+2h_3)$	$h_4(h_1+h_2+2h_3) - h_3(h_1+h_2+h_3)$	$(h_2+h_3)(h_1+h_2+h_3) - h_4(h_1+2h_2+2h_3)$	$-h_3(h_2+h_3) + h_4(h_1+2h_2+2h_3)$	$h_3(h_2+h_3) + (h_2+2h_3)(h_1+h_2+h_3)$
	1	1	1	1	1
	$h_1(h_1+h_2)(h_1+h_2+h_3) \times (h_1+h_2+h_3+h_4)$	$h_1h_2(h_2+h_3)(h_2+h_3+h_4)$	$h_2h_3(h_1+h_2)(h_3+h_4)$	$h_3h_4(h_2+h_3)(h_1+h_2+h_3)$	$h_4(h_3+h_4)(h_2+h_3+h_4) \times (h_1+h_2+h_3+h_4)$

例: $w_1'' = 2 \left\{ \begin{aligned} &h_2(h_2+h_3) + (2h_2+h_3)(h_2+h_3+h_4) \\ &+ h_1(h_1+h_2)(h_1+h_2+h_3) \end{aligned} \right\} w_0 + \dots\dots\dots + \left\{ \begin{aligned} &h_2(h_2+h_3) - h_1(2h_2+h_3) \\ &+ h_4(h_3+h_4)(h_2+h_3+h_4) \end{aligned} \right\} w_4$

それぞれ 4 等分し、得られる 9 個の格子点におけるかん数値を、それぞれ図のごとく仮定する。

第 2 図

さて、第 1 表を用いて、微分方程式(5)を

A, B, C および D の各点において、代数式に変換すれば、

$$A: x \text{ 軸方向について, } h_1=h_2=h_3=h_4=\frac{1}{2}a$$

$$y \quad " \quad " \quad h_1=h_2=h_3=h_4=\frac{1}{2}b$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} \left(\frac{16}{3}C - 10A + \frac{16}{3}C \right) + \frac{1}{b^2} \left(\frac{16}{3}B - 10A + \frac{16}{3}B \right) + K^2A = 0 \quad (8)$$

$$B: x \text{ 軸方向について, } \begin{cases} h_1=h_4=\frac{\sqrt{3}-1}{2}a \\ h_2=h_3=\frac{1}{2}a \end{cases}$$

$$y \quad " \quad " \quad h_1=h_2=h_3=h_4=\frac{1}{2}b$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} \left(6D - \frac{32}{3}B + 6D \right) + \frac{1}{b^2} \left(-\frac{20}{3}B + 2A + \frac{16}{3}B \right) + K^2B = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(K^2 - 10 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right) A + \frac{32}{3b^2} B + \frac{32}{3a^2} C \\ & \frac{2}{b^2} A + \left\{ K^2 - \frac{16}{3} \left(\frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right\} B \\ & \frac{2}{a^2} A + \left\{ K^2 - \frac{16}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) \right\} C + \frac{12}{b^2} D \\ & \frac{16}{3a^2} B + \frac{16}{3b^2} C + \left\{ K^2 - 12 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right\} D = 0 \end{aligned} \right. \quad (12)$$

(12)式より

$$\therefore \begin{vmatrix} K^2 - 10 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right), & \frac{32}{3b^2}, & \frac{32}{3a^2}, & 0 \\ \frac{2}{b^2}, & K^2 - \frac{16}{3} \left(\frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right), & 0, & \frac{12}{a^2} \\ \frac{2}{a^2}, & 0, & K^2 - \frac{16}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right), & \frac{12}{b^2} \\ 0, & \frac{16}{3a^2}, & \frac{16}{3b^2}, & K^2 - 12 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

(13)式より、K の値を求めることができ、したがって、(12)式より、たとえば、A の値を、1 と仮定することにより、B, C および D の値をもとめることができる。

次に、a および b に、適当なる二つの値を代入した場合の解を求めることとする。

(i) $a=b=1$ (円の場合)

この場合には、 $B=C$ となるゆえ、(13)式より

$$* \quad + \frac{4}{3}B) + K^2B = 0 \quad (9)$$

$$C: x \text{ 軸方向について, } h_1=h_2=h_3=h_4=\frac{1}{2}a$$

$$y \quad " \quad " \quad \begin{cases} h_1=h_4=\frac{\sqrt{3}-1}{2}b \\ h_2=h_3=\frac{1}{2}b \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} \left(-\frac{20}{3}C + 2A + \frac{4}{3}C \right) + \frac{1}{b^2} \left(6D - \frac{32}{3}C + 6D \right) + K^2C = 0 \quad (10)$$

$$D: x \text{ 軸方向について, } \begin{cases} h_1=h_4=\frac{\sqrt{3}-1}{2}a \\ h_2=h_3=\frac{1}{2}a \end{cases}$$

$$y \quad " \quad " \quad \begin{cases} h_1=h_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}b \\ h_2=h_3=\frac{1}{2}b \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} \left(-12D + \frac{16}{3}B \right) + \frac{1}{b^2} \left(-12D + \frac{16}{3}C \right) + K^2D = 0 \quad (11)$$

(8), (9), (10) および (11) 式を整頓すれば

$$\left\{ \begin{aligned} & = 0 \\ & + \frac{12}{a^2} D = 0 \\ & + \frac{12}{b^2} D = 0 \\ & K^2 - 12 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) D = 0 \end{aligned} \right. \quad (12)$$

$$\begin{vmatrix} K^2 - 20, & \frac{64}{3}, & 0 \\ 2, & K^2 - 16, & 12 \\ 0, & \frac{32}{3}, & K^2 - 24 \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

$$\therefore 3K^6 - 180K^4 + 3040K^2 - 12288 = 0 \quad (15)$$

基本振動につき、K の最小根を求めれば

$$K = 2.4027 \quad (16)$$

$$\therefore A=1, B=C=0.661, D=0.391 \dots (17)$$

(16)式における, $K=2.4027$ なる値を, 解析解 $K=2.4048$ と比較すれば, 0.1% の誤差がある.

$$(ii) \quad a=1, b=\frac{2}{3}$$

(13)式より,

$$\begin{vmatrix} K^2 - \frac{65}{2} & 24 & \frac{32}{3} & 0 \\ 9 & K^2 - \frac{68}{3} & 0 & 12 \\ 2 & 0 & K^2 - \frac{88}{3} & 27 \\ 0 & \frac{16}{3} & 12 & K^2 - 39 \end{vmatrix} = 0 \dots (18)$$

$$\therefore 18K^8 - 2223K^6 + 92395K^4 - 1492608K^2 + 7617168 = 0 \dots (19)$$

最小根を求めれば, $K=3.092 \dots (20)$

$$\therefore A=1, B=0.685, C=0.610, D=0.373 \dots (21)$$

$$(iii) \quad a=1, b=\frac{1}{2}$$

(13)式より

$$\begin{vmatrix} K^2 - 50 & \frac{128}{3} & \frac{32}{3} & 0 \\ 8 & K^2 - 32 & 0 & 12 \\ 2 & 0 & K^2 - 48 & 48 \\ 0 & \frac{16}{3} & \frac{64}{3} & K^2 - 60 \end{vmatrix} = 0 \dots (22)$$

$$\therefore 3K^8 - 570K^6 + 3565K^4 - 839680K^2 + 6297600 = 0 \dots (23)$$

最小根を求めれば, $K=3.822 \dots (24)$

$$\therefore A=1; B=0.692, C=0.546, D=0.337 \dots (25)$$

V. 結 語

以上により, あきらかなごとく, 本解法は, (1)式のごとき二階線型偏微分方程式を解く場合においては, 分割数を4とすれば, 実用上, さしつかえのない程度の解が得られるも, なお, 分割数を増大する時はさらに, 高精度の解が得られる. また同様な高階線型偏微分方程式を解く場合にも, 容易に拡張せられる.

終りにのぞみ, 終始, 御懇切なる御指導をいただいた東大教授日高孝次博士に厚く感謝の意を表する次第である.

注: 一

(1) 昭和25年9月18日 第505回講演会において講演, 原稿受付昭和25年9月21日.

(2) 正員, 桐生工業専門学校.

階差法による周辺自由なる正方形弾性板のたわみ振動に対する一数值解法について⁽¹⁾

宮 崎 孔 友⁽²⁾

On a Numerical Solution for the Problem of Free Vibration of a Square Plate with Free Edges

by Kōyū MIYAZAKI

The existing numerical solutions of linear partial differential equations by means of the difference-methods can be applied only to the cases with simple boundary conditions, but not to the cases with complicated boundary conditions.

In the present paper, the author tried to obtain a general numerical solution free from such inconvenience, and applying this new solution to the heading problem, examined whether it is of general practical use by comparing the result with that of Ritz's solution of the same problem.

I. 緒 言

従来, 線型偏微分方程式の階差法による代表的な解法は, Collatz 法⁽³⁾であり, 本解法により, 幾多の重要な問題が解決されている⁽⁴⁾. しかしながら, 本解法は, 後述のごとく, 境界条件が簡単なる場合においてのみその解が得られるもので, 境界条件が複雑な場

合には, その解が得られない欠点がある. ここに, 別な見地から, 後者の場合においてもなおその解が得られるような一般的な階差法による解法を案出し, 本解を既に解の得られている表題の問題に適用し, 得られたる解を同問題の Ritz の解⁽⁵⁾と比較し, その実用性を検討した.