注：—

- (1) 昭和 25 年 5 月 13 日 關西支部第 170 回講演會において講演，
原稿受付 昭和 25 年 9 月 12 日。
(2) 正員，京都大學。
(3) 正員，京都大學。
(4) 正員，立命館大學。

- (5) W. Oppelt, Vergleichende Betrachtung verschiedener
Regelaufgaben hinsichtlich der geeigneten Regelgesetzmä-
ssigkeit, Luft f. -Forsch. Bd. 16 (1939), S. 447/72.
(6) 寒川武，自動制御の理論と實際(下巻) (1948) 197/200 頁。
(7) 寒川武，自動制御の理論と實際(上巻) (1948) 87 頁。

機 関 車 の 上 下 動 に つ い て⁽¹⁾

(機関車の動揺について 第1報)

大 野 豊⁽²⁾

On the Vertical Oscillations of Locomotive

(On Oscillations of Locomotive. Part I)

by Yutaka ŌNO

An effect of rails on the vertical oscillations of locomotive is theoretically investigated under the following assumptions : rails are infinitely seamless elastic bars supported by elastic foundation (with distributed spring constant k) and locomotive is an oscillating system with body M , wheel m and spring K between them. This analysis is carried out for both cases of free oscillations, and forced oscillations caused by unbalanced forces of the locomotive engine, at constant speed V .

The results obtained are as follows : deflections of rails at loaded points increase as V^2 . Periods of vertical oscillations also slightly increase as V^2 . Two waves with different velocities propagate along rails. And by introducing the dynamic factors and the effective mass of rail, we can simplify the problems, etc.

緒 言

機関車の上下動を，レールの影響を考慮に入れて計算したものは今までにあるが⁽³⁾，それらは大体，レールをばねと質量とから成る振子におきかえている。ここではレールを無限長の弾性棒と仮定し，機関車をばねを有する振動系と考え，機関車の不平衡力および速度の大きさ等が，上下振動状態にいかなる影響を及ぼすかを解析した。弾性力学上からいっても，この種の興味ある問題の一つであると思われる。最後に実用に供し得る簡単な算式を示した。

I. 軌道に対する仮定

普通計算を容易にするために，次のような仮定をおく⁽⁴⁾。

- (a) レールは継目無しの無限長弾性棒とする。
(b) 道床，枕木等による減衰作用を無視する。
(c) 道床，枕木等による反撥力は，その長さの方向に分布しているばね作用と考え，そのばね定数は一定とする。

(a) の仮定をおくことにより，従来の仮定では表われなかった，エネルギー分散の影響が見られる。

II. 不平衡力の軌道に対する作用

本論に入る前に，その準備を兼ねて，機関車の不平衡力 $P_0 e^{i\omega t}$ が一定速度 V でレール上を移動する場合を考える。この問題は今まで余り解かれていないようであるが，ここでは V の大きさが小さい場合だけ示す。

第 1 図

実際上は p と V とは比例関係にあるが，一般化するため，互に無関係であるとする。

E =レールのヤング係数 kg/cm^2 ， I =レールの断面二次モーメント cm^4 ， k =軌道の分布ばね定数 kg/cm^2 ， ρ =レールおよびそれに附帯して振動する部分の単位長さ当りの質量 $\text{kg sec}^2/\text{cm}^2$ とおく。 $p(x, t)$ が外力であれば，次の方程式を得る。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + ky + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

不平衡力 $P_0 e^{i\omega t}$ は，レール上の移動する一点に作

用するから、これを分布の形に書き直す。それには、いわゆる unit-impulse function⁽⁵⁾ を用いればよい。そのか

第 2 図

$$S(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varepsilon}{\lambda \varepsilon} \cdot e^{i\lambda \xi} d\lambda$$

これを用いれば、 V の速度で働く $P_0 e^{i\lambda t}$ なる力は、

$$\begin{aligned} p(x, t) &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_0}{2\pi} \cdot e^{i\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varepsilon}{\lambda \varepsilon} \cdot e^{i(\lambda x - Vt)\lambda} d\lambda \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varepsilon}{\lambda \varepsilon} \cdot e^{i\lambda x} \cdot e^{i(\lambda - Vt)\lambda} d\lambda \end{aligned} \quad (2)$$

これを(1)式に用いて、強制振動解を求めればよい。解を求めるには、 y もやはり積分で表わせるとし、

$$y = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varepsilon}{\lambda \varepsilon} \cdot Y(x, t, \lambda) d\lambda \quad (3)$$

とおき、(1)に代入して、 $Y(x, t, \lambda)$ をもとめると、

$$Y(x, t, \lambda) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{Z(\lambda)} \cdot e^{i\lambda x} \cdot e^{i(\lambda - Vt)\lambda}$$

$$\begin{cases} Z(\lambda) = a^2 \lambda^4 - (p - \lambda V)^2 + \nu_0^2 \\ a^2 = EI/\rho, \quad \nu_0^2 = k/\rho \end{cases} \quad (4)$$

また $\xi = x - Vt$ において、

$$\begin{aligned} y &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_0}{2\pi\rho} \cdot e^{i\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varepsilon}{\lambda \varepsilon} \cdot Z(\lambda) d\lambda \\ &= -\frac{P_0}{2\pi\rho} \cdot e^{i\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda \xi}}{Z(\lambda)} d\lambda \end{aligned} \quad (5)$$

したがって、 y を求めるには右辺の積分を行わねばならぬが、 $Z(\lambda)$ は λ に関する四次代数方程式で、因数分解がなかなか困難である。後に述べるが、 $V_c = \sqrt{2a\nu_0}$ なるレールの限界速度に比して V が小さい時(実際上は常にそうである)には、 $(V/V_c)^4$ 以上の項を省略して、かつ、 $\nu_0^2 > p^2$ (これも大体実現されている)であるとして、省略算を行えば、

$$\begin{aligned} Z(\lambda) &\doteq \left\{ a\lambda^2 - \frac{\nu_0^2 V^2}{2a(\nu_0^2 - p^2)} \right\}^2 \\ &\quad + \left\{ \sqrt{\frac{pV}{\nu_0^2 - p^2}} \lambda + \sqrt{\nu_0^2 - p^2} \right\}^2 \end{aligned}$$

と書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{2a} \left\{ \sqrt{2a\sqrt{\nu_0^2 - p^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{(2\nu_0^2 - p^2)V^2}{(\nu_0^2 - p^2)\sqrt{2a\sqrt{\nu_0^2 - p^2}}} \right\} \\ \mu_1 &= \frac{1}{2a} \left\{ \sqrt{2a\sqrt{\nu_0^2 - p^2}} + \frac{pV}{\sqrt{\nu_0^2 - p^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{(2\nu_0^2 - p^2)V^2}{(\nu_0^2 - p^2)\sqrt{2a\sqrt{\nu_0^2 - p^2}}} \right\} \\ \mu_2 &= \frac{1}{2a} \left\{ \sqrt{2a\sqrt{\nu_0^2 - p^2}} - \frac{pV}{\sqrt{\nu_0^2 - p^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{(2\nu_0^2 - p^2)V^2}{(\nu_0^2 - p^2)\sqrt{2a\sqrt{\nu_0^2 - p^2}}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

と置けば、 $Z(\lambda)$ は次のごとく因数分解される。

$$Z(\lambda) = \{(\lambda - \lambda_0)^2 + \mu_1^2\} \{(\lambda + \lambda_0)^2 + \mu_2^2\} \cdots (7)$$

すなわち、 $Z(\lambda) = 0$ の解は、 $\lambda_0 \pm i\mu_1$ 、 $-\lambda_0 \pm i\mu_2$ である。ただし、ここで $\lambda_0, \mu_1, \mu_2 > 0$ 、 $\mu_1 > \mu_2$ である。

$$N^2 = \{4\lambda_0^2 + (\mu_1 + \mu_2)^2\} \{4\lambda_0^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2\} \quad (8)$$

とおけば、積分を行うに便利のように $a^2/Z(\lambda)$ を次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{Z(\lambda)} &= -\frac{1}{N^2} \left\{ \frac{4\lambda_0(\lambda - \lambda_0)}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \mu_1^2} - \frac{4\lambda_0^2 - \mu_1^2 + \mu_2^2}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \mu_1^2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{N^2} \left\{ \frac{4\lambda_0(\lambda + \lambda_0)}{(\lambda + \lambda_0)^2 + \mu_2^2} + \frac{4\lambda_0^2 + \mu_1^2 - \mu_2^2}{(\lambda + \lambda_0)^2 + \mu_2^2} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

これを用いて、各項ごとに積分を行う。

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_0}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \mu_1^2} \cdot e^{i\lambda \xi} d\lambda \\ &= e^{i\lambda_0 \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \mu_1^2} \cdot e^{i\alpha \xi} d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{i\lambda_0 \xi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha \xi}}{\alpha + i\mu_1} d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha \xi}}{\alpha - i\mu_1} d\alpha \right\} \\ &= \frac{1}{2} e^{i\lambda_0 \xi} \{ -2\pi i e^{\mu_1 \xi} 1(-\xi) + 2\pi i e^{-\mu_1 \xi} 1(\xi) \} \end{aligned}$$

第 3 図

ここで、 $1(\xi)$ は unit-step function⁽⁵⁾ であり、
 $\xi > 0$; $1(\xi) = 1$,
 $\xi < 0$; $1(\xi) = 0$.

同様にして、

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda + \lambda_0}{(\lambda + \lambda_0)^2 + \mu_2^2} \cdot e^{i\lambda \xi} d\lambda \\ &= \frac{1}{2} e^{-i\lambda_0 \xi} \{ -2\pi i e^{\mu_2 \xi} 1(-\xi) + 2\pi i e^{-\mu_2 \xi} 1(\xi) \}, \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \mu_1^2} \cdot e^{i\lambda \xi} d\lambda \\ &= \frac{-i}{2\mu_1} e^{i\lambda_0 \xi} \{ 2\pi i e^{\mu_1 \xi} 1(-\xi) + 2\pi i e^{-\mu_1 \xi} 1(\xi) \}, \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda + \lambda_0)^2 + \mu_2^2} \cdot e^{i\lambda \xi} d\lambda \\ &= \frac{-i}{2\mu_2} e^{-i\lambda_0 \xi} \{ 2\pi i e^{\mu_2 \xi} 1(-\xi) + 2\pi i e^{-\mu_2 \xi} 1(\xi) \} \end{aligned}$$

そこで今、次のごとく置く。

$$A(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda \xi}}{Z(\lambda)} d\lambda \quad (10)$$

しかるときは、今の積分結果を用いて、

$$\begin{aligned} a^2 A(\xi) &= - (1/N^2) [4\pi i e^{i\lambda_0 \xi} \{ -e^{\mu_1 \xi} 1(-\xi) \\ &\quad + e^{-\mu_1 \xi} 1(\xi) \} - \left(\frac{4\lambda_0^2 - \mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1} \right) \pi e^{i\lambda_0 \xi} \\ &\quad \{ e^{\mu_1 \xi} 1(-\xi) + e^{-\mu_1 \xi} 1(\xi) \}] \\ &\quad + (1/N^2) [4\pi i e^{-i\lambda_0 \xi} \{ -e^{\mu_2 \xi} 1(-\xi) + e^{-\mu_2 \xi} 1(\xi) \}] \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{4\lambda_0^2 + \mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_2}\right)\pi e^{-i\lambda_0\xi}\{e^{\mu_2\xi}1(-\xi) + e^{-\mu_2\xi}1(\xi)\}] \dots\dots\dots (11)$$

*すべて偶数次の微係数であるから、もし外力 $P_0 \cos pt$ に対する解を求めようとするならば、 $e^{ipt}A(\xi)$ の実数部分を求めればよい。すなわち $\Re\{e^{ipt}A(\xi)\}$ である。

かくして $A(\xi)$ が求められたから $-(P_0/2\pi\rho)e^{ipt}$ を乗ずれば、 y が得られる。方程式(1)を見ると各項は*

$\xi > 0$;

$$\Re\{a^2 e^{ipt} A(\xi)\} = \frac{1}{N^2} \left\{ 4\pi\lambda_0 e^{-\mu_1\xi} \sin(\lambda_0\xi + pt) + \left(\frac{4\lambda_0^2 - \mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1}\right)\pi e^{-\mu_1\xi} \cos(\lambda_0\xi + pt) + 4\pi\lambda_0 e^{-\mu_2\xi} \sin(\lambda_0\xi - pt) + \left(\frac{4\lambda_0^2 + \mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_2}\right)\pi e^{-\mu_2\xi} \cos(\lambda_0\xi - pt) \right\}$$

$\xi < 0$;

$$\Re\{a^2 e^{ipt} A(\xi)\} = \frac{1}{N^2} \left\{ -4\pi\lambda_0 e^{\mu_1\xi} \sin(\lambda_0\xi + pt) + \left(\frac{4\lambda_0^2 - \mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1}\right)\pi e^{\mu_1\xi} \cos(\lambda_0\xi + pt) - 4\pi\lambda_0 e^{\mu_2\xi} \sin(\lambda_0\xi - pt) + \left(\frac{4\lambda_0^2 + \mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_2}\right)\pi e^{\mu_2\xi} \cos(\lambda_0\xi - pt) \right\}$$

ここで、次の位相値を用いる。

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= 4\lambda_0\mu_1/N, \quad \sin \theta_1 = (4\lambda_0^2 - \mu_1^2 + \mu_2^2)/N \\ \cos \theta_2 &= 4\lambda_0\mu_2/N, \quad \sin \theta_2 = (4\lambda_0^2 + \mu_1^2 - \mu_2^2)/N \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

そうすると求むる最後の結果として次式を得る。

$\xi > 0$;

$$y = -\frac{P_0}{\rho a^2} \left\{ \frac{e^{-\mu_1\xi}}{2\mu_1 N} \sin(\lambda_0\xi + pt + \theta_1) + \frac{e^{-\mu_2\xi}}{2\mu_2 N} \sin(\lambda_0\xi - pt + \theta_2) \right\}$$

$\xi < 0$;

$$y = \frac{P_0}{\rho a^2} \left\{ \frac{e^{\mu_1\xi}}{2\mu_1 N} \sin(\lambda_0\xi + pt - \theta_1) + \frac{e^{\mu_2\xi}}{2\mu_2 N} \sin(\lambda_0\xi - pt - \theta_2) \right\}$$

ここで、 $\xi = x - Vt$ である。一応解として y が得られたが、形をもっと整えるために、以下二三の事項を補足することにする。

(i) **レールの有効径間**⁽⁶⁾ 先に仮定したときレールの一点に静的に力 P_0 が作用して生ずるたわみと同一のたわみを、同一の力 P_0 によって生ぜしめるように、長さ $2L$ を切り取り、しかしてその $2L$ のレールは剛体のごとくたわみを生じないとする。しかるときこの $2L$ を有効径間といい、次式であらわされる。

$$L = \sqrt{2a/\nu_0} = (4EI/k)^{1/4}$$

この L は、現用の 50 kg レールでは、約 1 m である。また、 P_0 によるたわみは、

$$y_{0st} = P_0/2kL$$

で表わせる。

(ii) **レールの固有振動率**⁽⁶⁾ 先に示した $\nu_0 = **$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \left\{ (1 - \sigma^2)^{1/4} + \frac{(2 - \sigma^2)r^2}{4(1 - \sigma^2)^{5/4}} \right\} \left(\frac{1}{L} \right) \\ \mu_1, \mu_2 &= \left\{ (1 - \sigma^2)^{1/4} \pm \frac{\sigma r}{(1 - \sigma^2)^{1/4}} - \frac{(2 - \sigma^2)r^2}{4(1 - \sigma^2)^{5/4}} \right\} \left(\frac{1}{L} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

これらを用いて計算を遂行すれば

$\xi > 0$;

$$y = -y_{0st} \{ \Phi_1 e^{-\mu_1\xi} \sin(\lambda_0\xi + pt + \theta_1) + \Phi_2 e^{-\mu_2\xi} \sin(\lambda_0\xi - pt + \theta_2) \}$$

$\xi < 0$;

$$y = y_{0st} \{ \Phi_1 e^{\mu_1\xi} \sin(\lambda_0\xi + pt - \theta_1) + \Phi_2 e^{\mu_2\xi} \sin(\lambda_0\xi - pt - \theta_2) \}$$

** $\sqrt{k/\rho}$ をいう。これは道床の弾性 k によるレール単位長さの振動率である。レールの一点に周期力を加える時その振動率が、 ν_0 に近づくとき共振状態になる。この値も後に示すが、50 c/s 以上である。 p の値は数サイクルにすぎない。

(iii) **レールの限界速度**⁽⁶⁾ 単一荷重が、レール上をこの速度で移動すると共振を生ずる。

$$Vc^2 = 2a\nu_0 = 2\sqrt{kEI/\rho}$$

現用レールでは、大体 1 000 km/h 程度である。したがって、実際の車両の速度に比すると著しく大きい。ゆえに V/Vc は実用上常にきわめて小さいとしてよい。これだけの事項を用いて、

$$\sigma = p/\nu_0, \quad r = V/Vc$$

なる無次元数を用いて、 λ_0, μ_1, μ_2 を表わせば、

ここで、 Φ, Φ_2 は y_{ost} に対する振幅の動的倍率であり、次式で表わされるものである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Phi_1} &= \sqrt{2} \left\{ (1-\sigma^2)^{3/4} + \sigma r + \frac{\sigma^2 r^2}{2(1-\sigma^2)^{3/4}} + \frac{\sigma(2+\sigma^2)r^3}{4(1-\sigma^2)^{3/4}} \right\} \\ \frac{1}{\Phi_2} &= \sqrt{2} \left\{ (1-\sigma^2)^{3/4} - \sigma r + \frac{\sigma^2 r^2}{2(1-\sigma^2)^{3/4}} - \frac{\sigma(2+\sigma^2)r^3}{4(1-\sigma^2)^{3/4}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Φ_1, Φ_2 の傾向は σ

が 1 に近づくにつれて単調に増大する。減衰が無視してあるから、 $\sigma \rightarrow 1$ では、 Φ_1, Φ_2 は ∞ になる。以上の近似式は σ が 1 に

余り近い時は、近似程度が悪く使用することができなくなる。

(15)式で示される波は、2 種の波であって、波面はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0(x-Vt) + pt &= \text{const} \\ \lambda_0(x-Vt) - pt &= \text{const} \end{aligned} \right\}$$

である。したがって、波の伝り速度はそれぞれ

$$V_1 = V - (p/\lambda_0), \quad V_2 = V + (p/\lambda_0) \quad (17)$$

すなわち、一方の波 Φ_1 の方は荷重 $P_0 \cos pt$ に相対的に p/λ_0 なる速度で後退し、 Φ_2 の方は同じ相対速度で前進する。振動率はそれぞれ $p - \lambda_0 V$, $p + \lambda_0 V$ である。波長 S は、両者同一で、

$$\frac{1}{S} = \frac{\lambda_0}{2\pi} = \frac{1}{S_{st}} \left\{ (1-\sigma^2)^{1/4} + \frac{1}{4} \frac{(2-\sigma^2)r^2}{(1-\sigma^2)^{5/4}} \right\} \quad (18)$$

ここで $S_{st} = 2\pi L$ であって、これは (i) で示した静的荷重に対する波長である。

また、位相の関係を見るために、まず $r=0$ とすれば、 $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = 1/\sqrt{2}$, $\therefore \theta_1 = \theta_2 = \pi/4$ である。また $r=0.1$, $\sigma=0.36$ では $\theta_1=0.238\pi$, $\theta_2=0.258\pi$ である。すなわち θ_1 は 0.25π より減少して行き、 θ_2 は逆に増加してゆく。したがって、この二つの波動に

第 5 図

対して説明的に図示すれば、第 5 図の通りである。

なお、負荷点における曲線の傾きは

$$[(\mu_1 - \mu_2) \{ 4\lambda_0^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 \} / \mu_1 \mu_2] \sin pt$$

に比例する。したがって $r=0$ では $\mu_1 = \mu_2$ で、傾きは 0 である。 r はきわめて小さく、したがって μ_1, μ_2 の差もきわめて小さく、原点における傾きは小さい。

$\xi=0$, すなわち負荷点の振幅 これは (15) 式に $\xi=0$ を代入して求めることができるが、(11) 式に $\xi=0$ を代入しても簡単に求められる。

$$\begin{aligned} a^2 A(0) &= \frac{\pi}{N^2} \left\{ \frac{4\lambda_0^2 - \mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1} + \frac{4\lambda_0^2 + \mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_2} \right\} \\ &= \frac{\pi(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2 \{ 4\lambda_0^2 + (\mu_1 + \mu_2)^2 \}} \end{aligned}$$

これを用いて、 $\xi=0$ における振動は

$$y_0 = -y_{ost} \cdot \Phi e^{ipt}$$

とすることができる。ここで

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{(1-\sigma^2)^{3/4}} \left\{ 1 + \frac{r^2}{4} \frac{2+3\sigma^2}{(1-\sigma^2)^{3/4}} \right\} \\ y_{ost} &= P_0 / 2kL \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

第 6 図

すなわち、 Φ は動的倍率である。これは本論において用いるので、 σ, r のかん数として数値計算をしておく。第 6 図がその結果である。図からわかるごとく $\sigma \rightarrow 1$ で $\Phi \rightarrow \infty$ である。また、速度の小さい範囲 ($r \leq 0.5$)

で速度の影響を示したが、 r が大になるにつれて Φ も大になる。

III. 機関車の上下動

これは非常に複雑な問題で種々の因子が影響するが、ここではその中特に不平衡力による強制振動を考える。強制力は、この外、レールの不整、継目によるものがあるが、これについては、簡単な解析を許さぬので後にゆずる。

さて機関車を、ばね上質量 M , ばね下質量 m , そ

の間のばね K なる系におき換える。かかる振動系が、レール上を走行する問題は、今まで余り行われていない。ばね K は実際は重ね板ばねで固体摩擦的減衰作用があるが、ここでは簡単のために減衰のないばねとする。

第 7 図

(i) 自由振動 第7図のような系を考える。 $p(t)$ をばね下質量とレールとの接触圧力とすれば、次の方程式を得る。

$$M\ddot{y}_2 = -Mg - K(y_2 - y_1) \quad (20)$$

$$m\ddot{y}_1 = -mg + K(y_2 - y_1) + P(t) \quad (21)$$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + ky + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{P(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda \xi} \cdot e^{i\lambda \xi} d\lambda \quad (22)$$

ここで、 $\xi = x - Vt$ であり、更に

$$y_1 = y_{\xi=0} \quad (23)$$

なる条件がある。方程式が4個、変数が4個で解くことができる。この解は、非振動項と振動項とに分け得ると考えられるから、次のごとくおいて見る。

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A \cdot e^{i p t} + A_0 \\ y_2 &= B \cdot e^{i p t} + B_0 \\ P(t) &= P \cdot e^{i p t} + P_0 \end{aligned} \right\}$$

ここで A, A_0, B, B_0, P, P_0 は定数。 P は $P(t)$ と区別される。また、 p は、これから求める自由振動率である。上式を(20), (21)に代入し、

$$\nu_1^2 = K/m, \quad \nu_2^2 = K/M \quad (24)$$

を用いれば、

$$P_0 = (M+m)g \quad (\text{静荷重})$$

$$B_0 - A_0 = -g/\nu_2^2 = -Mg/K, \quad (\text{はば } k \text{ の静的たわみ})$$

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{\nu_2^2}{p^2(p^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2)} \cdot \frac{P}{m} \\ A &= \frac{\nu_2^2 - p^2}{p^2(p^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2)} \cdot \frac{P}{m} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

を得る。レールのたわみの方は、やはり非振動項と振動項とに分けて、前者を u_1 、後者を u_2 として、

$$y = u_1 + u_2$$

$$a^2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + \nu_0^2 u_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$= -\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{(M+m)g}{2\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda \xi} \cdot e^{i\lambda \xi} d\lambda$$

$$a^2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + \nu_0^2 u_2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$$= -\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{P}{2\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda \xi} \cdot e^{i\lambda \xi} \cdot e^{i(p - \lambda V)t} d\lambda$$

この方程式の解法は、Iで行ったのと全く同一である。

$$\left. \begin{aligned} Z_1(\lambda) &= a^2 \lambda^4 - V^2 \lambda^2 + \nu_0^2 \\ Z_2(\lambda) &= a^2 \lambda^4 - (p - \lambda V)^2 + \nu_0^2 \end{aligned} \right\}$$

とおけば、

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{(M+m)g}{2\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda \xi}}{Z_1(\lambda)} d\lambda \\ u_2 &= -\frac{P}{2\pi\rho} \cdot e^{i p t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda \xi}}{Z_2(\lambda)} d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

したがって、(23)式を考えれば、

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\frac{(M+m)g}{2\pi\rho} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda \xi}}{Z_1(\lambda)} d\lambda \right]_{\xi=0} \\ \frac{\nu_2^2 - p^2}{p^2(p^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2)} \cdot \frac{1}{m} \\ &= -\frac{1}{2\pi\rho} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda \xi}}{Z_2(\lambda)} d\lambda \right]_{\xi=0} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

この第1の式は A_0 を定めるから、したがって B_0 も定まる。第2の方は p を定める方程式である。Iで行った表示法を用いて、

$$\frac{\nu_2^2 - p^2}{p^2(p^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2)} \cdot \frac{1}{m} = -\frac{1}{2\pi\rho} A(0) = -\frac{1}{2kL} \Phi$$

Φ は、 σ, r のかん数であるから、 $\Phi(\sigma, r)$ と書くことにする。ここで $\nu_0^2 = k/\rho$ を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\nu_2^2 - p^2)\nu_0^2}{p^2(\nu_1^2 + \nu_2^2 - p^2)} &= \mu_1 \Phi(\sigma, r) \\ \mu &= m/2\rho L \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

この左辺を Ψ とおけば、

$$\Psi = \frac{(\nu_2^2 - p^2)\nu_0^2}{p^2(\nu_1^2 + \nu_2^2 - p^2)} = \frac{\Omega_2^2 - \sigma^2}{\sigma^2(\Omega_{12}^2 - \sigma^2)}$$

ただし、ここで、 $\Omega_2 = \nu_2/\nu_0$ 、 $\Omega_{12} = \sqrt{(\nu_1^2 + \nu_2^2)}/\nu_0$ である。しかるときは、

$$\Psi(\sigma) = \mu \Phi(\sigma, r) \quad (28)'$$

第 8 図

σ 、したがって p を示すものである。これで大体の傾向がわかる。第1次振動も第2次振動も速度が増大すると共に、振動数が減少する。これは速度の増大と共にレールの effective stiffness は次第に小になることを示す。しかし實際上、数値的にいえば、この効果は

(28)' を用いて、Iの $\Phi(\sigma, r)$ の結果を用い、図式から σ の値を求めることができる。第8図のごとくである。すなわち Φ と Ψ の両曲線の交点が求める

非常に小である。

第1次振動の方は、主として車体 M の振動で、振動数も小さく、「動揺」といわれている。第9図に示したように、普通の場合と同じく y_1

と y_2 は同位相である。第2次の方は主として車輪 m の振動で振動数が大で、「びびり振動」といわれる。 y_1 と y_2 の位相は逆である。

(ii) 強制振動 次に第7図において、質量 m に $Q \cdot e^{i\omega t}$ が作用するときを考える。この力は機関車では不釣り合質量の遠心力によって生ずるものである。また、一般的にいて、別の原因から作用すると考えてもよい。

$$M\ddot{y}_2 = -Mg - K(y_2 - y_1) \quad (29)$$

$$m\ddot{y}_1 = -mg + K(y_2 - y_1) + P(t) + Q \cdot e^{i\omega t} \quad (30)$$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + ky + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(t)}{2\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varepsilon}{\lambda \varepsilon} \cdot e^{i\lambda \xi} d\lambda \quad (31)$$

$$y_1 = y_2 = 0 \quad (32)$$

これは、(i)の結果を用いれば、直ちに解を得ることができる。

$$y_1 = \frac{\nu_2^2 - \omega^2}{\omega^2(\omega^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2)} \cdot \frac{P+Q}{m} \cdot e^{i\omega t} - A_0$$

$$y_2 = \frac{\nu_2^2}{\omega^2(\omega^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2)} \cdot \frac{P+Q}{m} \cdot e^{i\omega t} + B_0$$

$$P(t) = P \cdot e^{i\omega t} + (M+m)g$$

$$y = - \frac{(M+m)g}{2\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda \xi}}{Z_1(\lambda)} d\lambda - \frac{P}{2\pi\rho} \cdot e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda \xi}}{Z_2(\lambda)} d\lambda$$

更に、 $B_0 - A_0 = -g/\nu_2^2$,

したがって、(32)の条件を考えれば、

$$A_0 = - \frac{(M+m)g}{2\pi\rho} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda \xi}}{Z_1(\lambda)} d\lambda \right]_{\xi=0} - \frac{\nu_2^2 - \omega^2}{\omega^2(\omega^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2)} \cdot \frac{P+Q}{m} \\ = - \frac{P}{2\pi\rho} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda \xi}}{Z_2(\lambda)} d\lambda \right]_{\xi=0}$$

しかして、ここで $\sigma' = \omega/\nu_0$ とすれば、上の第2式は次のように書くことができる。

$$(P+Q)\Psi(\sigma') = P\mu\Phi(\sigma', r) \\ P = - \frac{\Psi(\sigma')}{\Psi(\sigma') - \mu\Phi(\sigma', r)} Q \\ P+Q = - \frac{\mu\Phi(\sigma', r)}{\Psi(\sigma') - \mu\Phi(\sigma', r)} Q$$

かくしてすべての未知数が求められたわけである。したがって、各変位の $e^{i\omega t}$ に対する振幅を示せば、

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= - \frac{\nu_2^2 - \omega^2}{\omega^2(\omega^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2)} \cdot \frac{\mu\Phi(\sigma', r)}{\Psi(\sigma') - \mu\Phi(\sigma', r)} \cdot \frac{Q}{m} \\ y_2 &= - \frac{\nu_2^2}{\omega^2(\omega^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2)} \cdot \frac{\mu\Phi(\sigma', r)}{\Psi(\sigma') - \mu\Phi(\sigma', r)} \cdot \frac{Q}{m} \\ &\quad - \frac{\Psi(\sigma')}{\Psi(\sigma') - \mu\Phi(\sigma', r)} \cdot Q \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

第11図

これによって共振曲線の大略の図をかけば、第11図のごとくである。もちろん $e^{i\omega t}$ の項のみである。これでわかることは振動率が ν_2 のときは、 y_1 の方は振幅が

0になる。しかして $p = \nu_I, \nu_{II}$ において振幅は ∞ になる。これは機関車のばねおよびレールの減衰作用を無視してあるからであって、実際は ∞ にならず。ここで山の頂上を形づくるわけである。減衰作用が大きいときは、この山がなかなかみとめがたい。実際の機関車では重ね板ばねを用いているので、その減衰作用によって、外力の振幅が小さくなるにつれて山の頂上に当る振動率は次第に大きい方へずれてゆく。それにつれて山の頂上は低くなる。しかし、大きな振幅を生ずる共振点としては、今求めた ν_I, ν_{II} の点で、実際上大切なものである。

IV. 上下固有振動数算式

(28)'の式より

$$\frac{\Omega_2^2 - \sigma^2}{\Omega_{12}^2 - \sigma^2} = \frac{\mu\sigma^2}{(1-\sigma^2)^{3/4}} \left\{ 1 + \frac{r^2}{4} \cdot \frac{2+3\sigma^2}{(1-\sigma^2)^{3/2}} \right\} \quad (34)$$

これが振動数方程式であるが、實際上 $\Omega_2 < 1$, $\Omega_{12} < 1$ また $r < 1$ であって、これらの四次以上の項は省略してさしつかえない。また σ^2 は先にも述べたように Ω_2^2 , Ω_{12}^2 と大きなへだたりにない。そこでまず、近似式を得るために、 σ^2 のべき級数に展開して、 σ^4 までの項を取る。その時は(34)式は次のごとく書ける。

$$\left[\frac{3}{4}(1 - \Omega_2^2/8) + \mu \{ (1 + r^2/2) - (3/2)\Omega_{12}^2 r^2 \} \right] \sigma^4$$

$$-\{(1+3Q_2^2/4)+\mu(1+r^2/2)Q_{12}^2\}\sigma^2+Q_2^2=0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

ただし、この式は、 Q_2, Q_{12} に関しては省略していない。ゆえに Q_2, Q_{12} が大きい値でも用いることができる。次に特殊な場合を考えて見る。

$K=0; Q_2=Q_{12}=0$, これは質量 M が全然切りはなされた場合である。

$$\{3/4+\mu(1+r^2/2)\}\sigma^2-1=0$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{3/4+\mu(1+r^2/2)} \quad \dots\dots\dots (36)^*$$

$$\sigma_I^2 = \frac{Q_2^2}{1+(3/4)Q_2^2+\mu(1+r^2/2)Q_{12}^2}$$

$$\sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 = \frac{1+(3/4)Q_2^2+\mu(1+r^2/2)Q_{12}^2}{(3/4)(1-Q_2^2/8)+\mu\{(1+r^2/2)-(3/2)r^2Q_{12}^2\}} \quad \dots\dots\dots (37)^*$$

ここで、更に $r^2Q_2^2, r^2Q_{12}^2$ 等を省略すれば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_I^2 &= \frac{1}{1+3Q_2^2/4+\mu Q_{12}^2} \\ \sigma_{II}^2 &= \frac{1+\mu(Q_{12}^2-Q_2^2)}{(3/4)(1-Q_2^2/8)+\mu(1+r^2/2)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (38)'$$

すなわち、實際上、 σ_I^2 は $r=V/V_c$ にほとんど無関係で、 Q_{12}^2 が大きい時に限り影響が表われる。

機関車およびその他の車両では、大体(38)'の式で十分である。

第 12 図 C57 型略図

V. 数 値 計 算 例

C57 型機関車に対して、以前に計算が行われたの⁽⁸⁾、ここでも同形式について行ってみる。

全ばね上重量 $M'g=52\,300\text{ kg}$

全ばね下重量 $m'g=15\,180\text{ kg}$

全にないばねのこわさ $K'=5\,876\times 2$

$=11\,752\text{ kg/cm}$

ここで K' は摩擦を無視してある。

$$\nu_1^2 = K/m \equiv K'/m'$$

$$=11\,752 \times 980 \div 15\,180 = 758\text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\nu_2^2 = K/M \equiv K'/M'$$

$$=11\,752 \times 980 \div 52\,300 = 220\text{ rad}^2/\text{s}^2$$

したがって、 $\nu_1=27.5\text{ rad/s}$, $f_1=\nu_1/2\pi=4.41\text{ c/s}$,

$$\nu_2=14.8\text{ rad/s}, f_2=\nu_2/2\pi=2.36\text{ c/s}.$$

また、 ν_0 を計算するには、松平氏⁽⁹⁾の結果を用いる。

50 kg レール; $\rho g=1.25\text{ kg/cm}^2$, $k=150\text{ kg/cm}^2$,

$$\nu_0^2=k/\rho=150 \times 980 \div 1.25=11.8 \times 10^4\text{ rad}^2/\text{s}^2,$$

$$\nu_0=343\text{ rad/s}, f_0=\nu_0/2\pi=54.6\text{ c/s}.$$

これを用いて

$$Q_2=\nu_2/\nu_0=0.043\,3, Q_{12}=\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}/\nu_0=0.091\,1$$

また μ の値を求めねばならぬが、 $\mu=m/2\rho L$ であるから、 m に適当な仮定をしなくてはならぬ。これは理**

* $K \rightarrow \infty; Q_2 \rightarrow \infty, Q_{12} \rightarrow \infty$, これは m と M が固く結ばれた場合である。

$$\frac{m}{M+m}(1-3\sigma^2/4)=\frac{m}{2\rho L}\{(1+r^2/2)+3r^2\sigma^2/2\}\sigma^2,$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{3/4+\mu'(1+r^2/2)}, \mu' = \frac{M+m}{2\rho L} \quad \dots\dots\dots (37)^*$$

この二つの結果は前述の論文⁽⁷⁾の結果と良く一致する。この式で $r=0$ とすればよいからである。

(35)式で、先に述べた理由から、 $Q_2^4, Q_{12}^4, Q_2^2 \cdot Q_{12}^2$ 等およびそれ以上の項を省略すれば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_I^2 &= \frac{Q_2^2}{1+(3/4)Q_2^2+\mu(1+r^2/2)Q_{12}^2} \\ \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 &= \frac{1+(3/4)Q_2^2+\mu(1+r^2/2)Q_{12}^2}{(3/4)(1-Q_2^2/8)+\mu\{(1+r^2/2)-(3/2)r^2Q_{12}^2\}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

**論の初めの仮定に適合するように定めねばならぬ。それには、質量 m が一点に集中されていると考え得るものでなければならぬ。

各車輪軸距は、C57 型の動輪軸距で 1 900 mm であって、一方の動輪によるレールのたわみが隣の動輪の点に及ぼす影響は、(15)式を用い、 $e^{-\mu_1\xi}$, $e^{-\mu_2\xi}$ を計算すればわかる⁽¹⁴⁾。それによると、振幅にして、5 % 程度の影響となる。これは道床のこわさが 5 % 減少した効果と同じで、そのように考えれば、各動輪は互に独立であると考えてよい。したがって、ここではこの影響は無視して、したがって各動輪が単独にある場合と同一と考える。そうすれば、ばね下重量として各車輪に従属するばね下重量を個々と考えねばならぬ。C57 型では、片側だけで各動輪についてそれぞれ 1 418 kg, 1 961 kg, 1 390 kg⁽⁹⁾である。各動輪が皆独立であれば、 mg として上掲の値を別々に採用しなければならぬが、実際には、そうははっきりしたものではないので、平均を取る。

$$\therefore mg=1\,590\text{ kg}$$

$$2\rho gL=198.8 \times 1.25=249\text{ kg}^{(10)}$$

$$\mu=1\,590/249=6.39$$

松平氏の結果によれば、 $V_c=1\,227\text{ km/h}$ であるから、 V/V_c は非常に小さく、実用範囲は、 $r=V/V_c=0\sim 0.1$ 位である。(38)'式によれば、 σ_I^2 は r に無関係としてよい。

$$\sigma_I^2=0.001\,77, \nu_I=14.4\text{ rad/s}, f_I=2.30\text{ c/s}$$

一方、 σ_{II} は、 r によって多少変るが、大したことはない。

$$r=0 \begin{cases} \nu_{II}=131\text{ rad/s}, \\ f_{II}=20.9\text{ c/s}. \end{cases} \quad r=0.5 \begin{cases} \nu_{II}=124\text{ rad/s}, \\ f_{II}=19.8\text{ c/s}. \end{cases}$$

したがって実用上は $r=0$ としてよいであろう。逐次近似によって計算すると、 $\sigma_{II}^2=0.145\,6$ であり、(38)'式から計算すると、 $\sigma_{II}^2=0.145\,9$ である。すなわち、

差はないと見てさしつかえない。

次に比較のため、従来行われている方法で計算して見る。第 13 図のごとき系として計算すると、

第 13 図

$$\nu^2 = \frac{g}{2Ww} \left[(W+w)K' + Wk_1 \pm \sqrt{\{(W+w)K' + Wk_1\}^2 - 4Wwk_1K'} \right]$$

k_1 の値は、先の計算の k kg/cm² の値から、機関車のレールに乗っている範囲を考慮して計算しうる。

$k_1 = k \times (\text{機関車の有効長})$

機関車の有効長とは、次のごとき考え方で求める。すなわち先に述べたように、各車輪は互に独立であるから、そのおのおのが受けるレールの反力も、それぞれ有効径間 $2L$ によって定まる力であると考えてよい。しかして、これは、軸距が C57 型では、1 900 mm で大体 $2L$ と同じ位の値であって、別にさしさわりのない。そこで各車輪に $2L$ なる有効径間が従属しているとして、すべての車輪の $2L$ の和が、機関車の有効長であるとする。先従輪は、軸重が小さいので、二軸でも一軸とする。しかる時は、C57 型で、

$$(\text{機関車の有効長}) = 2 \times (2+3) \times 2 = 20 \text{ m}$$

である。したがって

$$k_1 = 150 \text{ kg/cm}^2 \times 2000 \text{ cm} = 3.00 \times 10^4 \text{ ton/m}$$

この値は、以前の計算⁽¹¹⁾で用いられている。 $k_1 = 2.84 \times 10^4 \text{ ton/m}$ に比すると多少大きいが、動輪間の作用、軸距の大きさ等を更にくわしく考えれば、もっと正確な値を得ることができよう。

$$K' = 1.18 \times 10^3 \text{ ton/m}, W = 52.3 \text{ ton}$$

w としては、 $m'g$ に上述の有効長 20 m の間のレールおよびそれに附帯して振動する部分を加えて、

$$w = 15200 \text{ kg} + 5000 \text{ kg} = 20.2 \text{ ton}$$

これらを用いれば、

$$\nu_I = 14.6 \text{ rad/s}, f_I = 2.33 \text{ c/s},$$

$$\nu_{II} = 123 \text{ rad/s}, f_{II} = 19.6 \text{ c/s}.$$

これと前に出した値とは、十分近い値である。また前掲の論文⁽¹²⁾⁽¹³⁾に出ている結果では、それぞれ、

$$\nu_I = 11.4 \text{ rad/s}, \nu_{II} = 188 \text{ rad/s},$$

$$\nu_I = 13.1 \text{ rad/s}, \nu_{II} = 150 \text{ rad/s}.$$

動的係数およびレールの有効質量： 従来の方法と本文の方法とは、結果互に移行し得るものであるが、第 13 図の各記号を第 7 図の相当記号と関連せしめ、第 13 図に対する振動数の式を書き直すと、小さい項を省略して、

$$\begin{cases} \nu_I^2 = \frac{K'}{M'} \cdot \frac{1}{1 + (K'/k_1)(1 + m_1/M')} \\ \nu_{II}^2 = \frac{k_1 + K'}{m_1} + \frac{K'}{M'} \cdot \frac{(K'/k_1)(1 + m_1/M')}{1 + (K'/k_1)(1 + m_1/M')} \end{cases}$$

となる。ここで $m_1 g = w \text{ kg}$ で、機関車全ばね下質量 m' と振動にあずかる軌道の質量 m_0 との和である。また(38)式を同じように書き直すと、上式中

$$k_1 \text{ の代りに } k_1/(1+r^2/2)$$

$$m_1 = m' + m_0 \text{ の代りに } m' + 3m_0/4(1+r^2/2)$$

と改めればよいことがわかる。すなわち、これによると、道床のばね定数は速度の増大と共に減少し、振動にあずかる軌道の部分も同じく減少することがわかる。 $1/(1+r^2/2)$ を動的係数、 $3m_0/4$ を軌道の有効質量といえることができる。

VI. 結 語

以上の考察の結果から、機関車の走行速度が、レールの限界速度に近いと考えた場合には、固有振動数はその速度によってかなり影響されるが、現用の軌道で現用の走行速度では、速度による影響はほとんどないことがわかった。しかして軌道の有効質量は普通考えるより $1/4$ 程度少く考えねばならぬ。また、機関車が道床から受けるばね作用は、機関車の有効長を仮定すれば簡単に計算される。また、純理論的に、軌道には波長は同じであるが、進行速度の異なる二つの波動が発生することがわかった。

ここでは紙数が限られて言及しなかったが、レールの不整、継目による強制振動が考えられ、実際には大切なものであるが、未だ十分理論が尽されていない。しかし、最近の現車測定結果等には、はっきり強制振動としてあらわれている⁽¹⁵⁾。

最後に、本稿を草するに当り、閲読と御便宜を賜った。当研究室の横堀技官、および非常な御多忙中にもかかわらず、誤謬を指摘していただき、更に不足事項を補足御教示していただいた松平技官の両氏に厚く謝意を表する。

注：一

(1) 昭和 23 年 11 月 14 日 日本機械学会日本応用力学連合応用力学講演において講演、原稿受付 昭和 23 年 11 月 25 日。

(2) 准員、運輸省鉄道技術研究所第一部。

(3) 穂坂、機械学会誌、51 卷 357 号。

(3), (8), (12) 武蔵、福島、鐵道業務研究資料、3 卷 13 号。

(3), (11), (13) 竹内、福島、根岸、鐵道業務研究資料、1 卷 10 号。

(4), (6), (7), (9), (10) 松平、昭和 22 年 1 月 21 日 鐵研第一部談話會、昭和 22 年 2 月 4 日 應力談話會にて講演。

(5) Kármán & Bist, Mathematical Methods in Engg. p. 297 Chap. X, Operational Calculus.

(14) $e^{-\mu \xi}$ の大きさは、 ξ を隣り合う軸間距離とすれば大體 0.149 程度で、これに位相のずれを考慮すると、5% くらいの影響が出て来る。

(15) 最近當研究所の國枝技官が行われた振動数解析結果によると、良く解される。