される場合を取り扱ったが、この節では有限の場合を取り扱ってみよう。

$$1. \frac{d^2s}{dt^2} + \alpha s + \gamma s^3 = 0 \quad (3.1)$$

$$(2.23) \text{ より } K_2^2 = 1 - \frac{p^2}{p_1^2} = \frac{3}{4} A^2 c - \frac{3}{128} A^4 c^2$$

$$\therefore p_1^2 = p^2 + \frac{3}{4} A^2 \gamma - \frac{3}{128} A^4 \frac{\gamma^2}{p^2} \quad (3.2)$$

$$(2.24) \text{ より } s_2(\tau) = \frac{A^5 c^2}{1024} (\cos 5\tau - \cos \tau)$$

$$(2.15) \text{ より } s_1(\tau) = \frac{A^3 c}{32} (\cos 3\tau - \cos \tau)$$

$$\therefore [s(\tau)]_2 = A \cos \tau + \frac{A^3 c}{32} (\cos 3\tau - \cos \tau) + \frac{A^5 c^2}{1024} (\cos 5\tau - \cos \tau) \quad (3.3)$$

$$2. \frac{d^2s}{dt^2} + \alpha s + \gamma s^3 + \epsilon s^5 = 0 \quad (3.4)$$

$$K_2^2 = \frac{3}{4} A^2 c + \frac{5}{8} A^4 \epsilon - \frac{3}{128} A^4 c^2$$

$$\therefore p_1^2 = p^2 + \frac{3}{4} A^2 \gamma + \frac{5}{8} A^4 \epsilon - \frac{3}{128} A^4 \frac{\gamma^2}{p^2} \quad (3.5)$$

3. 円振子へ応用した場合(精度の問題) 円振子の曲率半径 $l=100$ cm, 振幅 $\alpha=1$ rad とするとき, その周期 T sec を求めてみよう。

だ円積分を用いた厳密な値;

$$T_1 = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right) = 2.140229$$

(3.2) より求めた近似値;

$$T_2 = \frac{2\pi}{p_1} = 2.146467$$

(3.5) より求めた近似値;

$$T_3 = \frac{2\pi}{p_1} = 2.140103$$

この三つの値を比較すると、精密な周期の値 T_1 に T_2 では小数第2位まで、 T_3 では小数第3位まで一致していることがわかる。それは T_3 が振動数の二乗 p_1^2 を求めるときに $5/8 A^4 \epsilon$ の項を取り入れたためであって、この値は $3/128 \cdot A^4 \cdot \gamma^2 / p^2$ の値よりはるかに大きい。ゆえに始めの式(3.4)で ϵs^5 の項を取り入れることの重要さがわかる。

一般に近似解を求めるとき、繰りかえし近似度を上げるよりも、原方程式を精密に立てることの方がさらに重要なことが多いので、ここに例をあげて示した。

IV. 結 び

この方法では、復元力の項を無限級数として解いてあるので、それぞれの問題にとって、項数をいくつとればよいかということを全般的な精度の問題として判断して決めるがよい。それから第III節で示したように有限項として計算すれば、以後の操作は簡単である。この論文では、自由振動の場合だけ取り扱ったが強制振動も全く同様にして解き得る。

終りに臨み、この研究に始終御激励をたまわった鶴戸口先生に厚く御礼申上げる次第である。

注: 一

- (1) 昭和22年11月3日 創立50周年記念講演会において講演、原稿受付 昭和24年9月6日。
- (2) 准員、東京大学第一工學部。
- (3) 林、航研彙報、218 號、297 頁 (昭 17-10)。
- (4) 林、航研彙報、225 號、111 頁 (昭 18-5)。
- (5) テイモシエンコ、工業振動論、111 頁では最後の符號が違うが、これは111頁11行目以来の計算が間違っているためである。これは林氏によつて指摘された。

非線型復元力を有する振動系の $\frac{1}{3}$ 分数調波振動について⁽¹⁾

西原 利夫⁽²⁾ 榎木 義一⁽³⁾ 岡田 幸雄⁽⁴⁾

On the $1/3$ Sub-Harmonic Resonance of the System
with Non-Linear Restoring Force

by Toshio NISHIHARA, Yoshikazu SAWARAGI and Yukio OKADA

In this report the sub-harmonic resonance of the dissipative system with the restoring force represented by a cubic curve is treated. The authors tried to solve this problems by Fourier series and investigate the stability of the solutions, and then acquired the graphical solution which is useful for actual practice. We made an experiment to see the validity of the calculation, that is, we could find how the magnitudes of damping force and external force affect occurrence of sub-harmonic resonance in the non-linear system.

緒 言

この論文では変位の 1 乗と 3 乗の項の和であらわされる復原力および減衰の項を有する振動系の強制振動をあらわす非線型微分方程式をフーリエ級数による方法で解き、その安定不安定を確かめこの方法に対する図式解を見出した。またこれに適当な実験装置をつくり減衰の大きさおよび外力の大きさを変化し、上の図式解による計算値が実験値とよく一致することを確認するとともに分数調波振動の種々の性質をきわめることができた。

解 析

(1) 基礎方程式 まず変位を x , 復原力を

$$f(x) = \alpha x + \beta x^3$$

ただし α, β は定数とすると運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = P_0 \sin 3\omega t \quad (1)$$

ここに m は振動体の質量, c は粘性減衰係数, P_0 は外力の振幅, 3ω は外力の円振動数, t は時間とする。さて変位 x として

$$x = A_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + A_3 \sin(3\omega t - \varphi_3) \quad (2)$$

と仮定する。 A_1 は外力の $\frac{1}{3}$ の振動数をもつ項で, A_3 は外力と同じ振動数をもつ項である。 A_5 以上は小さいとして省略するがこれは後でのべる実験結果から妥当なことがわかる。(2)を(1)に代入し $\sin(\omega t - \varphi_1)$, $\cos(\omega t - \varphi_1)$, $\sin(3\omega t - \varphi_3)$ および $\cos(3\omega t - \varphi_3)$ の係数を比較すると次の四つの式が得られる。

$$\begin{aligned} -mA_1\omega^2 + \alpha A_1 + \beta \left[\frac{3}{4}A_1^3 - \frac{3}{4}A_1^2A_3 \cos(3\varphi_1 - \varphi_3) + \frac{3}{2}A_1A_3^2 \right] &= 0 \\ \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$cA_1\omega + \beta \left[-\frac{3}{4}A_1^2A_3 \sin(3\varphi_1 - \varphi_3) \right] = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} -9mA_3\omega^2 + \alpha A_3 + \beta \left[-\frac{A_1^3}{4} \cos(3\varphi_1 - \varphi_3) + \frac{1}{4}A_3^3 + \frac{3}{2}A_1^2A_3 \right] &= P_0 \cos \varphi_3 \\ \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3cA_3\omega + \beta \left[\frac{1}{4}A_1^3 \sin(3\varphi_1 - \varphi_3) \right] &= P_0 \sin \varphi_3 \\ \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

(2) A_1, A_3 の解 (3)および(4)式から $\cos(3\varphi_1 - \varphi_3)$, $\sin(3\varphi_1 - \varphi_3)$ を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{9}{16}\beta^2A_1^4 + \frac{27}{16}\beta^2A_1^2A_3^2 + \frac{9}{4}\beta^2A_3^4 \\ - (m\omega^2 - \alpha)\frac{3}{2}\beta A_1^2 - (m\omega^2 - \alpha)3\beta A_3^2 \\ + (m\omega^2 - \alpha)^2 + c^2\omega^2 = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

が得られる。簡単のため

$$A_1^2 = \xi, A_3^2 = \eta, \frac{3}{4}\beta = L, m\omega^2 - \alpha = M, c\omega = N$$

なる記号を用いると(7)式は

$$\begin{aligned} L^2\xi^2 + 3L^2\xi\eta + 4L^2\eta^2 - 2L\cdot M\cdot\xi \\ - 4L\cdot M\cdot\eta + M^2 + N^2 = 0 \quad (7') \end{aligned}$$

となる。これは ξ, η の平面では だ円 となる。すなわち

$$\xi' = \frac{4}{7} \frac{M}{L}, \eta' = \frac{2}{7} \frac{M}{L}, \tan 2\theta = -1$$

なる座標系の平行移動ならびに回転移動を行くと(7')式は

$$\frac{\xi'^2}{a^2} + \frac{\eta'^2}{b^2} = 1 \quad (7'')$$

となる。ここに

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{2}{7} \cdot \frac{M^2 - 7N^2}{5 + 3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{L^2}} \\ b &= \sqrt{\frac{2}{7} \cdot \frac{M^2 - 7N^2}{5 - 3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{L^2}} \end{aligned}$$

である。 ω をパラメータとした だ円群 の包絡線は直角双曲線となる。次に(3)式の $\cos(3\varphi_1 - \varphi_3)$, (4)式の $\sin(3\varphi_1 - \varphi_3)$ をそれぞれ(5)および(6)式に代入して得られる2式から $\sin \varphi_3, \cos \varphi_3$ を消去すると次の式が得られる。ただし $A_1 > A_3$ として A_3^6, A_3^8 の項は省略してある。

$$\begin{aligned} \left[\frac{63}{8}\beta^2A_1^4 + \frac{3}{2}\beta(m\omega^2 - \alpha)A_1^2 - 18\beta(9m\omega^2 - \alpha)A_1^2 \right. \\ \left. + 9(9m\omega^2 - \alpha)^2 + 81c^2\omega^2 \right] A_3^4 \\ + \left[-\frac{9}{2}\beta^2A_1^6 + 6\beta(m\omega^2 - \alpha)A_1^4 \right. \\ \left. + \frac{9}{2}\beta(9m\omega^2 - \alpha)A_1^4 \right. \\ \left. - 6(m\omega^2 - \alpha)(9m\omega^2 - \alpha)A_1^2 \right. \\ \left. + 18c^2\omega^2A_1^2 - 9P_0^2 \right] A_3^2 + \left[(m\omega^2 - \alpha)^2A_1^4 \right. \\ \left. + c^2\omega^2A_1^4 - \frac{3}{2}\beta(m\omega^2 - \alpha)A_1^6 + \frac{9}{16}\beta^2A_1^8 \right] = 0 \\ \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

(8)式において A_1^2 に種々の値を与えると A_3^2 の値が求められる。 A_1, A_3 の解としては(7)式と(8)式の交点として与えられる。第1図において だ円 は(7)式で, A_1^2 軸にほぼ平行な曲線は(8)式である。この図に用いた数値は後にのべる実験により得られたものである。第1図から求められた A_1, A_3 の値は第2図に実線と点線で示されている。なお同図には だ円 (7)が $c=0$ のとき A_1 軸に切する点として与えられる

$$A_1 = \frac{m\omega^2 - \alpha}{\frac{3}{4}\beta}$$

の値が示されている。これはフーリエ級数の一次近似として自己振動を表すものである。この自己振動*

第 1 図

第 2 図

* と A_1 の実線の部分が大変接近していることは注目すべきことである。第 2 図からわかるように A_1 , A_3 の解は ω すなわち外力の振動数のある範囲のみで求められるものである。第 3 図は第 1 図の数値において復原力の 3 乗の項の符号が負になった場合である。

第 3 図

(3) 解の安定, 不安定について だ円(7)と(8)との交点としては一般に 2 点あり, これには不安定の解もふくまれるからその解の安定不安定を吟味しなければならない。まず変位 x を

$$x = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t + a_3 \sin 3\omega t + b_3 \cos 3\omega t \dots\dots\dots (9)$$

とし, (9) 式を基礎方程式(1)に代入し $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ の係数を比較する。ただし(9)式において a_1 , b_1 は時間のかん数とし, しかも時間に対する変化は小さいとして $\frac{d^2 a_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 b_1}{dt^2}$ を省略すると

$$\left. \begin{aligned} -2m \frac{db_1}{dt} \omega + c \frac{da_1}{dt} + a_1 \left\{ (\alpha - m\omega^2) + \beta \left[\frac{3}{4} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{3}{2} (a_3^2 + b_3^2) \right] \right\} \\ - \beta \left[\frac{3}{4} a_3 (a_1^2 - b_1^2) + \frac{3}{2} a_1 b_1 b_3 \right] &= 0 \\ 2m \frac{da_1}{dt} \omega + c \frac{db_1}{dt} + b_1 \left\{ (\alpha - m\omega^2) + \beta \left[\frac{3}{4} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{3}{2} (a_3^2 + b_3^2) \right] \right\} \\ - \beta \left[\frac{3}{4} b_3 (a_1^2 - b_1^2) - \frac{3}{2} a_1 a_3 b_1 \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

が得られる。さて a_1 に Δa_1 , b_1 に Δb_1 の変化を与え, a_1 , b_1 にそれぞれ $a_1 + \Delta a_1$, $b_1 + \Delta b_1$ を代入すると(10)式は

$$\left. \begin{aligned} -2m\omega \frac{d\Delta b_1}{dt} + c \frac{d\Delta a_1}{dt} + E \Delta a_1 + F \Delta b_1 &= 0 \\ 2m\omega \frac{d\Delta a_1}{dt} + c \frac{d\Delta b_1}{dt} + G \Delta a_1 + H \Delta b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} E &= (\alpha - m\omega^2) + \frac{3}{4} \beta (3a_1^2 + b_1^2) \\ &+ \frac{3}{2} \beta (a_3^2 + b_3^2) - \frac{3}{2} \beta (a_1 a_3 + b_1 b_3) \end{aligned}$$

$$F = \frac{3}{2} \beta (a_1 b_1 + a_3 b_1 - a_1 b_3) - c\omega$$

$$G = \frac{3}{2} \beta (a_1 b_1 + a_3 b_1 - a_1 b_3) + c\omega$$

$$\begin{aligned} H &= (\alpha - m\omega^2) + \frac{3}{4} \beta (a_1^2 + 3b_1^2) \\ &+ \frac{3}{2} \beta (a_3^2 + b_3^2) + \frac{3}{2} \beta (a_1 a_3 + b_1 b_3) \end{aligned}$$

とする。いま(11)の 2 式から Δb_1 を消去すると

$$\begin{aligned} 2m\omega (c^2 + 4m^2\omega^2) \frac{d^2 \Delta a_1}{dt^2} + [2m\omega c (E + H) \\ + 4m^2\omega^2 (G - F)] \frac{d\Delta a_1}{dt} \end{aligned}$$

$$+ [2m\omega(EH - FG)] \cdot \Delta a_1 = 0 \quad (12)$$

が得られる。 a_1 が安定なるためには Δa_1 は 0 に収束しなければならない。その条件としては

$$2m\omega c(E + H) + 4m^2\omega^2(G - F) > 0$$

$$2m\omega(EH - FG) > 0$$

すなわち

$$(\alpha + m\omega^2) + \frac{3}{4}\beta(A_1^2 + A_3^2) > 0 \quad (13)$$

$$\beta \left[\frac{3}{2}\beta A_1^2 + \frac{9}{4}\beta A_3^2 - 2(m\omega^2 - \alpha) \right] > 0 \quad (14)$$

(13) 式の条件は事実図に描くと常に満足される。また(14)の条件は だ円(7)の中心を通る線を境界としてあらわされ、第1図において直線 $l-l$ がこれを与え、斜線の部分が不安定となる。第2図においては点線で示し安定である。すなわち2解のうち一つは安定で他の一つは不安定となる。

(4) 分数調波振動発生可能の範囲 第1図からわかるように(8)式をあらわす曲線はほとんどそれが A_3^2 軸と交わる点から引いた A_1^2 軸への平行線に等しい。すなわち(8)式において $A_1^2 = 0$ とすると

$$A_3 = \frac{P_0}{9m\omega^2 - \alpha} \quad (15)$$

が得られる。この式を(8)式の近似式として用いると だ円(7)と切する範囲が簡単に求められる。(7)式を ξ で微分し $\frac{d\eta}{d\xi}$ を 0 とおくと

$$2L^2\xi + 3L^2\eta - 2L \cdot M = 0 \quad (16)$$

が得られる。(16)と(7)式から ξ を消去し、 η として(15)式を代入すると

$$\frac{63}{16} \frac{\beta^2}{(9m\omega^2 - \alpha)^4} \cdot P_0^4 - 3 \frac{\beta(m\omega^2 - \alpha)}{(9m\omega^2 - \alpha)^2} P_0^2 + 4c^2\omega^2 = 0 \quad (17)$$

が得られる。この式において ω を与えると P_0 が求められる。この(17)式が だ円(7)と(15)式との切する限界である。(17)式において $c=0$ とすると

$$P_0^2 = \frac{16}{21} \frac{(m\omega^2 - \alpha)(9m\omega^2 - \alpha)^2}{\beta} \quad (18)$$

となる。(18)式から $\beta > 0$ ならば $\omega > \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$, $\beta < 0$ ならば $\omega < \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$ でなければならないことがわかる。第4図は(17)および(18)式による範囲を示し、減衰が大になると発生範囲が狭くなることがわかる。

(5) 位相差 φ_1 および φ_3 位相差 φ_1 および φ_3 が求められると A_1 および A_3 が求められているからその波形が求められる。(3)および(5)式から $\cos(3\varphi_1 - \varphi_3)$, (4)および(6)式から $\sin(3\varphi_1 - \varphi_3)$ を消去すると

第 4 図

$$\cos \varphi_3 = \frac{1}{3P_0A_3} \left[-(\alpha - m\omega^2)A_1^2 + 3(\alpha - 9m\omega^2)A_3^2 - \frac{3}{4}\beta(A_1^4 - A_3^4) + 3\beta A_1^2 A_3^2 \right] \quad (19)$$

$$\sin \varphi_3 = \frac{1}{3 \cdot P_0 \cdot A_3} \cdot c \cdot \omega (A_1^2 + 9A_3^2) \quad (20)$$

の2式が得られる。この(20)式から $\sin \varphi_3$ の値がわかりまた(19)式により $\cos \varphi_3$ の値がわかり φ_3 が求められる。次に(3)および(4)式から

$$\sin(3\varphi_1 - \varphi_3) = \frac{4c\omega}{3\beta A_1 A_3} \quad (21)$$

$$\cos(3\varphi_1 - \varphi_3) = \frac{4}{3\beta A_1 A_3} \left[(\alpha - m\omega^2) + \frac{3}{4}\beta(2A_3^2 + A_1^2) \right] \quad (22)$$

の2式が得られる。この2式から $3\varphi_1 - \varphi_3$ がわかり、すでに φ_3 がわかっているから φ_1 が求められる。第5図はかくして計算された φ_1 および φ_3 を示している。

第 5 図

やはりこれらにも安定な解と不安定な解とがあり、 φ_3 はほとんど 180° に近いことがわかる。これで A_1 , A_3 , φ_1 , φ_3 が求められて変位波形を描くことができ、その最大振幅 $A_{\max}$ が求められる。第6図は $A_{\max}$ の

値を示したものであり、実線は安定な値、点線は不安定な値である。

第 6 図

実験装置および実験結果

(1) 実験装置 以上の計算結果を確かめるために実験を行ったのであるがその実験装置の大略を第 7 図に図示する。すなわち振動体の棒は支点よりたれ、

第 7 図

その下端にはばね S_3 をつけている。

このばねによりこの振動系の復原力に非線型の性質を与えている。なおこの振動系に外力モーメントを与えるために支点近くに同じ強さのばね S_1 および S_2 をとりつけ、 S_1 の他端は固定し S_2 の他端を正弦波形で移動させて正弦波形の外力を加える。なおこの振動系に減衰を与えるために流体減衰器を附加した。すなわち液体をみたした幅のせまい容器の中で振動体につけた薄板を動かすことにより抵抗を与えた。この振動系の慣性率率は S_1 , S_2 , S_3 および減衰器をのぞいて自己振動を行わせてその周期から計算しうる。なお復原力はおもりによりモーメントをかけそのたわみを読んでたわみとモーメントの図を描きその図から最少自乗法により α , β を決定した。第 8 図はかくして得られた復原力を示すものである。なお外力の大きさは S_2 のばね定数と外力の振幅と支点とばね S_2 との距離の積で表わされるが、運転中に外力の振幅を任意に変化

第 8 図

できるように第 7 図の右に示すような装置を作った。すなわち電動機により偏心板をまわし A に上下運動を与えて、てこ B により C に上下の正弦波運動が伝えられ、それがばね S_2 につたえられる。この装置でてこ B の支点を左右することにより運転中にレバー C の運動の大きさを变化するのである。なおこの振動系の振幅は固定したスケールの前に振動系につけた指針を出して読みとった。また変位波形を見るために指針のかけを電磁オシログラフの印画紙に感光させて撮影した。減衰器の減衰係数の測定にあたっては系を自由振動をさせてその波形を撮影し、対数減衰率を求めてその係数を得た。用いた減衰器用液は水と機械油の 2 種類である。かくして実験における数値は次のようである。

$$f(x) = 160x + 250\,000x^3 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$m = 3.742 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{cm}$$

$$c = 1.555 \text{ (ただし油の場合) } \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec} / \text{rad}$$

$$= 0.974 \text{ (ただし水の場合) } \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec} / \text{rad}$$

$$P_0 = \text{約 } 3 \sim 11 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

第 9 図

(2) 実験結果 第 9 図にスケールで読みとった最大振幅 $A_{\max}$ が示されている。図からわかるように振幅はほとんど外力に無関係で発生範囲のみ外力に影響されることがわかる。第 6 図にこの実験値のうち $P_0 = 8$ の場合が示されている。なお $P_0 = 8$ で油減衰のときと水減衰のときの発生範囲の実験結果が第 10 図、第 11 図に示してある。同図中の実線は (8) 式の切点として求めた限界、点線は第 4 図と同じもの

第 10 図

第 11 図

で P_0 と (15) 式の切点として求めたものである。実線およびその近似解としての点線はよく実験と一致していることがわかる。次に $P_0=8$, 外力振動数毎分 206,

220, 240 の場合の波形を撮影し, それをフーリエ級数に分析し, $A_1, A_3, \varphi_1, \varphi_3$ を求め, その結果を第 2 図および第 5 図に示してある。この分析の結果 A_5 以上は非常に小となることがわかった。

結 論

上に示したように計算結果と実験結果はきわめてよく一致し, 以上の解析の妥当なことが確かめられた。以上の考察により得られた分数調波振動の重要な性質を述べると,

1. 分数調波振動は外力の大きさ, 振動数並びに減衰力のある範囲内においてのみ起るもので, 減衰力が大きくなると発生範囲は狭くなる。
2. 第 2 図に示すように分数調波振動の最大振幅は自己振動にきわめて近く外力にほとんど無関係に一定である。
3. A_3 に関しては (15) 式なる簡単な式で表示すること。

終りにのぞみ本研究にあたり終始懇切なる御助言を賜った京都大学国井教授に満腔の感謝の意を表す。なお本研究は文部省科学研究費の援助によったものである。

注: 一

- (1) 昭和 24 年 10 月 16 日 機械学会関西連合大会において講演, 原稿受付 昭和 25 年 5 月 11 日。
- (2)(3) 正員, 京都大学。
- (4) 准員, 京都大学。

翼板と軸の連成振動に関する研究⁽¹⁾

(第 1 報 自由振動の理論)

高橋 利衛⁽²⁾ 奥村 敦史⁽³⁾ 堀江 秀夫⁽⁴⁾

On a Coupled Vibration of Propeller Blades and Shaft

(1st Report Theory of Free Vibration)

by Tosie TAKAHASHI, Atubumi OKUMURA and Hideo HORIE

A coupled vibration of propeller blades and shaft, the former in bending and the latter in torsion, was studied analytically. The authors pointed out some mistakes in the boundary conditions used by J. Meyer in the similar problem (D. V. L. Jahrbuch 1938), and obtained rigorous results. The conclusion indicates that the negligence of distributed shaft mass, as done by J. Meyer, leads to some irrationality in the higher modes of vibration.

I. 緒 言

プロペラおよび軸より成る振動系の振動に関しては既に多くの研究⁽⁵⁾があるが, その多くは質点系あるいは

は剛体の力学としての見地に立つものである。これを弾性力学的に取り扱ったのは J. Meyer⁽⁶⁾ である。もちろん, この行き方は計算が複雑となるから, 取り扱