論曲線にはなほ近い。ことに l_p/R の異なる実験点列が $l_s/l_p=0$ のときことごとく $1+\cosh \lambda \cos \lambda = 0$ の根に収れんするのは理論の有力な支持と考えてさしつかえなからう。また Meyer の値は基本振動を除き、筆者の値と著しく異なるのであるから、ここに改めて問題とする必要もなからう。

III. 結 語

第1報で述べた翼板-軸系の自由連成振動の理論を簡単な模型実験により確認することができた。

第3報においては機関側にトルクの周期的変動がある場合の強制振動について論じる予定である。

なお翼板に取付角のある場合の計算並びに実験に関しては Japan Science Review に投稿した。

終りに御指導を賜った早稲田大学教授伊原貞敏博士、実験装置に関し有益な御指教を得た同大学電気工学科野本、高木両教授並びに機械工学科難波助教授に深謝するとともに、種々お世話になった藤本昇氏に謝意を表する。

注：一

- (1) 昭和 24 年 4 月 4 日 定期總會において講演。
原稿受付 昭和 24 年 4 月 18 日。

第 3 図 理論と実験との比較

(2)(3) 正員, 早稲田大學。

(4) 學生員, 早稲田大學。

(5) 高橋, 奥村, 堀江, 機械學會論文集, 17 卷 64 號。

(6) 坂山, 電氣音響機器の研究 (丸善)。

翼板と軸の連成振動に関する研究⁽¹⁾

(第3報 強制振動の理論)

高橋 利衛⁽²⁾ 奥村 敦史⁽³⁾ 堀江 秀夫⁽⁴⁾

On a Coupled Vibration of Propeller Blades and Shaft

(3rd Report Theory of Forced Vibration)

by Tosie TAKAHASI, Atubumi OKUMURA and Hideo HORIE

The coupled vibration of propeller blades and shaft, the former in bending, and the latter in torsion, under periodical excitation of torque in the engine part, was analytically studied, and the amplitude and resonance-frequency were made clear. The author concludes that there are serious differences of amplitude and resonance-frequency between the present theory and the usual theory, in which the blades are considered as rigid bodies.

The theory will be experimentally verified in the following Report.

I. 緒 言

筆者はさきに軸-翼板系の連成自由振動の理論と実験とにつき報告したが⁽⁵⁾, 本報においては機関側にトルクの周期的変動がある場合の強制振動につき論じる. 座標, 記号および考え方は第1報と同じである.

II. 解 析

2.1 振動

方程式とその

解 第1図

のごとき系において軸端の慣性モーメント Θ_e に $M \cos \omega t$ なるトルクが加わるものとする.

軸のねじれ振動の方程式は

$$GJ \partial^2 \varphi / \partial x_s^2 - \rho_s J \partial^2 \varphi / \partial t^2 = 0 \quad (1)$$

翼板のたわみ, 振動の方程式は

$$EI \partial^4 y / \partial x_p^4 + \rho_p a \partial^2 y / \partial t^2 = 0 \quad (2)$$

強制振動に対応する(1), (2)の解を

$$\varphi = \theta(x_s) \cos \omega t, \quad y = u(x_p) \cos \omega t$$

と置けば, θ, u は

$$\theta = A_s \cos m_s x_s + B_s \sin m_s x_s, \quad (3)$$

$$u = A_p \cosh m_p' x_p + B_p \sinh m_p' x_p$$

$$+ C_p \cos m_p' x_p + D_p \sin m_p' x_p \quad (4)^*$$

$$\theta = \frac{M}{GJ/l_s} \frac{1}{\Delta_1} \left[\left\{ \left(\cot \mu' - \frac{\Theta_b}{\Theta_s} \right) - \Delta_2 \right\} \sin \mu' \cos \mu' \frac{x_s}{l_s} + \left\{ \left(\tan \mu' + \frac{\Theta_b}{\Theta_s} \right) + \Delta_2 \right\} \cos \mu' \sin \mu' \frac{x_s}{l_s} \right], \quad (5)$$

$$\frac{u}{l_p} = \frac{M}{GJ/l_s} \frac{1}{\Delta_1} \frac{1}{2\lambda' \mu' (1 + \cosh \lambda' \cos \lambda')} \left[\left\{ \frac{R}{l_p} \lambda' (\sinh \lambda' - \sin \lambda') + (\cosh \lambda' + \cos \lambda') \right\} \times \left(\sinh \lambda' \frac{x_p}{l_p} + \sin \lambda' \frac{x_p}{l_p} \right) - \left\{ \frac{R}{l_p} \lambda' (\cosh \lambda' + \cos \lambda') + (\sinh \lambda' + \sin \lambda') \right\} \left(\cosh \lambda' \frac{x_p}{l_p} + \cos \lambda' \frac{x_p}{l_p} \right) \right] \quad (6)$$

ただし, ここに

$$\lambda' = m_p l_p = \sqrt{\frac{M_p \omega^2}{EI l_p^3}}, \quad \mu' = m_s l_s = \sqrt{\frac{\Theta_s \omega^2}{GJ l_s}},$$

$$\Delta_1 = \left\{ \left(\frac{\Theta_e \Theta_b}{\Theta_s^2} \mu'^2 - 1 \right) \sin \mu' - \frac{\Theta_e + \Theta_b}{\Theta_s} \mu' \cos \mu' \right\} - \mu' \left(\cos \mu' - \frac{\Theta_e}{\Theta_s} \mu' \sin \mu' \right) \Delta_2 \quad (7)$$

$$\Delta_2 = \frac{NM_p l_p^2}{\Theta_s} \frac{(R^2 l_p^{-2} \lambda'^2 - 1) \sinh \lambda' \cos \lambda' + (R^2 l_p^{-2} \lambda'^2 + 1) \cosh \lambda' \sin \lambda' + 2R l_p^{-1} \lambda' \sinh \lambda' \sin \lambda'}{\lambda'^3 (1 + \cosh \lambda' \cos \lambda')} \quad (8)$$

(5)および(6)式は強制トルクの振動数, および連成系の慣性, 剛性等を表わす因子が振幅に及ぼす影響を示す式である. いまその特別な場合として, 翼板の曲げ剛性が極端に高まって剛体化する極限を考えて, $EI \rightarrow \infty$ すなわち $\lambda' \rightarrow 0$ の極限移行を行えば,

$$\lim_{\lambda' \rightarrow 0} \Delta_1 = \left\{ \Theta_e (\Theta_b + \Theta_p) \Theta_s^{-2} \mu'^2 - 1 \right\} \sin \mu' - (\Theta_e + \Theta_b + \Theta_p) \Theta_s^{-1} \mu' \cos \mu',$$

*ここに $A_s, \dots, D_p$ は積分定数で, また m_s', m_p' は

$$m_s'^2 = \rho_s \omega^2 / G, \quad m_p'^4 = \rho_p a \omega^2 / (EI)$$

である.

2.2 境界条件 境界条件は次のごとくなる. まず翼の自由端 $x_p = 0$ では

$$EI \partial^2 y / \partial x_p^2 = 0, \quad EI \partial^3 y / \partial x_p^3 = 0$$

であるから,

$$(i) \quad (d^2 u / dx_p^2)_{x_p=0} = 0, \quad (ii) \quad (d^3 u / dx_p^3)_{x_p=0} = 0$$

翼とボスとの接合点 $x_p = l_p (x_s = l_s)$ では変位と傾斜の連続の式として,

$$y = -R\varphi, \quad \partial y / \partial x = \varphi.$$

$$\therefore (iii) \quad (u)_{x_p=l_p} = -R(\theta)_{x_s=l_s},$$

$$(iv) \quad (du/dx_p)_{x_p=l_p} = (\theta)_{x_s=l_s}.$$

また同じ箇所でボスの運動方程式として,

$$-GJ \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} - NREI \frac{\partial^3 y}{\partial x_p^3} - NEI \frac{\partial^2 y}{\partial x_p^2} = \Theta_b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

$$\therefore (v) \quad \left(\frac{d\theta}{dx_s} \right)_{x_s=l_s} + \frac{NEI}{GJ} \left\{ R \left(\frac{d^3 u}{dx_p^3} \right)_{x_p=l_p} + \left(\frac{d^2 u}{dx_p^2} \right)_{x_p=l_p} \right\} = \frac{\Theta_b \omega^2}{GJ} (\theta)_{x_s=l_s}$$

最後に $x_s = 0$ にて Θ_e の運動方程式として,

$$GJ \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} - \Theta_e \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M \cos \omega t = 0.$$

$$\therefore (vi) \quad \left(\frac{d\theta}{dx_s} \right)_{x_s=0} + \frac{\Theta_e \omega^2}{GJ} (\theta)_{x_s=0} + \frac{M}{GJ} = 0.$$

2.3 振幅 以上6個の境界条件を解(3), (4)

に適用して6個の積分定数を求め, θ, u を表わす式を整理した結果は次の通りである.

$$\lim_{\lambda' \rightarrow 0} \Delta_2 = \frac{NM_p l_p^2}{\Theta_s} \left(\frac{R^2}{l_p^2} + \frac{R}{l_p} + \frac{1}{3} \right) = \frac{\Theta_p}{\Theta_s}$$

等を用いて(5)式は

$$(\theta)_{\lambda=0} = \frac{M}{GJ/l_s} \frac{(\mu'^{-1} \cot \mu' - \overline{\Theta_b + \Theta_p}/\Theta_s) \sin \mu' \cos \mu' x_s/l_s + (\mu'^{-1} \tan \mu' + \overline{\Theta_b + \Theta_p}/\Theta_s) \cos \mu' \sin \mu' x_s/l_s}{\{\Theta_e \Theta_s^{-2} (\Theta_b + \Theta_p) \mu'^2 - 1\} \sin \mu' - \Theta_s^{-1} (\Theta_e + \Theta_b + \Theta_p) \mu' \cos \mu'} \quad (9)$$

となる。これは両端に $\Theta_b + \Theta_p$, Θ_e なる慣性モーメントを有する軸において Θ_e 側に $M \cos \omega t$ が作用したときの強制振幅を表わす式であって、初めからこの問題を独立に取り扱って得た結果に一致する。

一方において、 $\lambda \rightarrow 0$ のとき、(6)式は

$$\left(\frac{u}{l_p} \right)_{\lambda=0} = \frac{M}{GJ/l_s} \frac{(x_p/l_p - R + l_p/l_p)}{\{\Theta_e \Theta_s^{-2} (\Theta_b + \Theta_p) \mu'^2 - 1\} \mu' \sin \mu' - \Theta_s^{-1} (\Theta_e + \Theta_b + \Theta_p) \mu'^2 \cos \mu'} \quad (10)$$

となる。 $EI \rightarrow \infty$ のとき翼板は剛体となるから弾性的たわみを生じない。ゆえにその変位は剛体としての回転に基づくものであるから、 x_p の一次式であり、 $x_p = R + l_p$ にて0であるべきである。(10)式はこの関係を示している。上式は翼を剛体と考えたときの変位を*

$$\left(\frac{u}{l_p} \right)_{\mu'=0} = \frac{-M}{2NEI/l_p} \left[-\frac{\{Rl_p^{-1}\lambda'(\sinh \lambda' - \sin \lambda') + (\cosh \lambda' + \cos \lambda')\}(\sinh \lambda' x_p/l_p + \sin \lambda' x_p/l_p)}{\lambda'^3 \{ (R^2 l_p^{-2} \lambda'^2 + 1) \cosh \lambda' \sin \lambda' + (R^2 l_p^{-2} \lambda'^2 - 1) \sinh \lambda' \cos \lambda' \}} \right] \quad (11)$$

を得る。ただしここに $\Theta = \Theta_e + \Theta_s + \Theta_b$ と置いた。上式は固定端に $\Theta = \Theta_e + \Theta_s + \Theta_b$ なる慣性モーメント(半径 R)を有する片持はりに $M \cos \omega t$ を作用せしめたときの強制振幅を表わすものである。事実この問題を独立に解いても(11)式と同じ結果に到達することが確かめられる。

2・4 共振 強制振動数 ω が系の固有振動数 p に一致すれば共振が起こる。固有振動数を与える式は第1報の(6)式に示した通り。

$$\frac{1}{\mu} \left[\frac{(\Theta_e \Theta_b \Theta_s^{-2} \mu^2 - 1) \sin \mu - \Theta_s^{-1} (\Theta_e + \Theta_b) \mu \cos \mu}{\cos \mu - \Theta_e \Theta_s^{-1} \mu \sin \mu} \right] = \frac{NM_p l_p^2 \Theta_s^{-1}}{\lambda^3 (1 + \cosh \lambda \cos \lambda)} \left[\left(\frac{R^2}{l_p^2} \lambda^2 - 1 \right) \sinh \lambda \cos \lambda + \left(\frac{R^2}{l_p^2} + 1 \right) \cosh \lambda \sin \lambda + \frac{2R}{l_p} \lambda \sinh \lambda \sin \lambda \right]$$

である。ここに

$$\lambda = \sqrt{\frac{M_p p^2}{EI/l_p^3}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{\Theta_s p^2}{GJ/l_s}}$$

上の振動数決定式を、 $p = \omega$ すなわち $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$ の場合、(7), (8)を用いて書き改めれば、

$$\Delta_1 = 0 \quad (12)$$

となる。(12)が成立する場合(5), (6)式の右边が共に ∞ となることは明らかである。ゆえに共振の条件式は(12)であって、これが固有振動数決定式に一致するのは当然である。

特別な場合として(9)式において共振を考え、右边の分母を0と置けば、

$$\tan \mu' = \frac{\{(\Theta_p + \Theta_b) + \Theta_e\}/\Theta_s}{\{(\Theta_p + \Theta_b)/\Theta_s\} \{\Theta_e/\Theta_s\} \mu'^2 - 1} \quad (13)**$$

* 表わすものであるから、翼を弾性体と考える(6)式と比較検討されるべき重要な式である。

次に軸のねじれ剛性を極端に高めた極限を考えれば、 $GJ \rightarrow \infty$ すなわち $\mu' \rightarrow 0$ の極限移行を(6)式で行った結果

** となる。これは両端に $(\Theta_p + \Theta_b)$, Θ_e を有する軸のねじれ振動数決定式として周知の式である。ゆえに $p = \omega$ すなわち $\mu = \mu'$ のとき共振することがわかる。(10)式においても同様である。

次に(11)式について考えてみるに、この式の分母において $\{ \} = 0$ と置いたものは一端が半径 R , 慣性モーメント Θ なる剛体を介して鉸節され、他端自由なるはりの横振動数決定式と同じ形である。さらにここで $\left\{ \begin{matrix} \Theta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow 0 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \Theta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty \end{matrix} \right\}$ 等の極限移行を行えば

$$\cosh \lambda' \sin \lambda' \mp \sinh \lambda' \cos \lambda' = 0$$

が得られ、これらは一端鉸節(-), 滑節(+), 他端自由の場合におのおの対応する周知の振動数決定式に一致する。ゆえに $p = \omega$ すなわち $\lambda' = \lambda$ のときそれぞれ共振を生じ、合理的な結果を与える。

III. 数 値 計 算

数値計算のため、諸定数間の関係を

$$\frac{R}{l_p} = \frac{1}{9}, \quad \frac{\Theta_b}{\Theta_s} = \frac{1}{10}, \quad \frac{\Theta_p}{\Theta_s} = \frac{13}{10},$$

$$\frac{\Theta_e}{\Theta_s} = 100, \quad N = 2$$

と仮定する。また

$$\lambda = 1.800, \quad \mu = 0.355$$

と置く、 λ, μ を与えることは、その定義から明らかに翼板の曲げ剛性と軸のねじれ剛性の比を指定することである。この場合第1報で使ったパラメータ η を計算すれば、

$$\eta = N \frac{\Theta_b}{\Theta_p} \frac{EI/l_p}{GJ/l_s} \times 10^3 = 0.261$$

強制振動による撓み, および 換れ角.

第 2 図

第 3 図

となる。これらの数値の下に最低次の固有振動数 p_0 を第1報の結果から計算すれば

$$\xi = \frac{(\Theta_b + \Theta_p)p_0^2}{GJ/l_s} = 0.175$$

となる。以下この最低次固有振動数 p_0 を単位として強制振動数 ω を表現することにする。すなわち ω/p_0 をパラメータにとるのである。 λ' , μ' とこのパラメータとの関係は

$$\begin{aligned}\lambda' &= \sqrt[4]{\frac{M_r \omega^2}{EI/l_p^3}} = \sqrt[4]{\frac{M_p p_0^2}{EI/l_p^3}} \sqrt{\frac{\omega}{p_0}} \\ &= \lambda \sqrt{\frac{\omega}{p_0}} = 1.800 \sqrt{\frac{\omega}{p_0}}, \\ \mu' &= \sqrt{\frac{\Theta_s \omega^2}{GJ/l_s}} = \sqrt{\frac{\Theta_s p_0^2}{GJ/l_s}} \frac{\omega}{p_0} = \mu \frac{\omega}{p_0} = 0.355 \frac{\omega}{p_0}\end{aligned}$$

で与えられる。

いま(5),(6)式において上の関係を用い、 ω/p_0 の種々の値について振幅の分布を求めれば第2図のようになる。ねじれ角 θ およびたわみは表現の都合上

$$\theta : M/(GJl_s^{-1}), \quad u/l_p : M/(GJl_s^{-1})$$

のごとくとてあるが、この比の後項 $M/(GJl_s^{-1})$ は一端固定されたねじれ剛性 GJl_s^{-1} の軸の一端に M なるモーメントを静的に加えたときのねじれ角に相当する。

$x_s/l_s=1$ $x_p/l_p=1$ にて相対応する両振幅曲線が一致しないのは次の理由による。もともとこの点でたわみとねじれとは

$$u = -R\theta,$$

$$\text{すなわち} \quad -u/l_p = \theta \cdot R/l_p$$

の関係がありいま $R/l_p=1/9$ と置いているからである。

以上は振幅の分布について述べたのであるが、次に

翼端 ($x_p=0$)、およびボス ($x_s=l_s$) の振動に注目してみよう。(5),(6)式でそれぞれ $x_s=l_s$, $x_p=0$ と置き、 ω/p_0 を変化させてこの両点の振幅を図示すれば、第3図のようになる。実線および点線はそれぞれ $\eta=0.261$ のときの翼端並びにボスの振幅を表わす。鎖線および二重鎖線は翼を剛体 ($\eta=\infty$) と考えた式(10),(9)から求めたものである。ただし $\eta=\infty$ のときには p_0 は(13)式を満足する最低次振動数をとるべきである。

この両系統の差異は最低次共振点以前では単に数値上の差——翼に剛性があるときは弾性的たわみが剛体としての変位に附加される——に過ぎないが、最低次共振点を越すと数値的には大した差はないが位相が全く逆になることがあることに注意する必要がある。すなわち翼を剛体と考える単純な理論は本理論に対して最低次共振点以前では数値的、それ以後では主として位相に差を生じるのである。

IV. 結 語

本報においては軸-翼板連成系の強制振動を論じて以上述べたとき結果を得た。実験については後報で報告する。

終りに御指導を賜った早稲田大学教授伊原貞敏博士、種々御援助下さった藤本昇氏に謝意を表する。

注：一

(1) 昭和23年11月24日 連合應用力学講演會において講演、原稿受付 昭和24年4月23日。

(2)(3) 正員、早稲田大學。

(4) 學生員、早稲田大學。

(5) 機械學會論文集、17 卷 64 號。

同形微分方程式の支配する任意段接続系の固有値問題の一解法

第1報 (方法論)⁽¹⁾

奥 村 敦 史⁽²⁾

On a Method for the Eigen-value Problems of Multiply-connected Systems

(1st Report : Methodology)

by Atsubumi OKUMURA

The practical aim of this method is to simplify the process to derive the characteristic equations of structures, which are built up of simple elastic bars or shafts, in their vibration or stability problems. The analyses of the problems of this kind usually become very tedious with the increase of number of connections. Then, the author tries to simplify the process of the analyses in a form of reiterated substitutions in some recurrence formulae. In this 1st report, the method is proposed in some general manner preparing for applications to practical problems which are to be discussed in the annexed reports.