の内容を(39)としたものであり、強制振動数 ω が与えられれば直ちに決定するもので、したがって A は数値的に決定される。かくして系中の一点 P (強制点) における絶対振幅が求められたのであるから、以後はこれを出発点として(37)により全系の絶対振幅曲線を求めることができる。なお変位強制振動の時は、強制点における振幅 A は直接与えられることになり、以後の解析は全く同様である。多くの強制振動トルクの作用した場合の解は、個々の強制トルクについて上記の方法で求めた結果を重ねたものにすぎない。

V. 結 言

以上に寸度のさまざまな均一弾性軸 (分布質量を持つ) が集中的な弾性拘束、慣性モーメント、歯車等を介して任意に接続されたきわめて一般的な軸系のねじれ振動問題において、主としてその固有値決定一般式の誘導について述べ、また固有かん数の決定および分岐状接続系、強制振動の取り扱いについても言及した。ただし自由振動を主としたため減衰力の存在を一切無視したが、この方法で速度比例形の集中減衰力を接続点に考慮することは、境界および接続条件の線形を乱さないから、何の本質的な困難も伴わない。すなわち、ここに得られた結果よりすれば、任意に接続した軸系のねじれ振動問題は単に漸化式(20)、(37)についての、その接続段数だけの反復代入の操作により扱われることになる。

しかしこれらの結果は問題の性質上、すでに洗練された形で完成されている電気回路理論に analogous な範囲を出るものでないことは容易に気付かれよう。ただ従来、ねじれ振動系の解析においては、かならずしもこの種の簡潔な扱い方が常識化してはいないように思われるので、多少とも寄与するところあれば幸である。

いずれにしても、この第2報において筆者の企図したところは、第1報に与えた一般的方法を最も卑近な問題に適用し、その具体的解析経過を示すと同時に、一つの見やすい検証例を提供することであった。

終りに、常に御指導御鞭撻を賜わる伊原貞敏先生に厚く感謝する。また多くの点で有力な御助言を与えられた高橋利衛学兄に心から御礼申上げる。

注：—

- (1) 原稿受付 昭和24年9月10日。
- (2) 正員、早稲田大学。
- (3) 筆者、本論同表題 (第1報)、本論文集 43 頁。
- (4) 歯車は、左から右への増速比を r_i としている。歯車の全慣性は左側に換算して I_i に含める。
- (5) 本論 IV 章 8 節参照。
- (6) 同上、この場合、系の右端の点は左右よりその柔さが各々 $\alpha_2, 0$ (固定) である弾性拘束を受けていると考えられ、したがって固有値決定式は $1/\alpha_2 + 1/0 = 0 \therefore \alpha_2 = 0$ または $\nu_2 = 0$ 。
- (7) たとえば、日本航空学会編、航空工学便覧、341 頁(昭 16)。
- (8) 高橋、森井、角本、早稲田機友会誌、33 号 31 頁(昭 15—7)。
- (9) たとえば、發動機プロペラシャフト軸系とプロペラ翼との連成振動等はこの形式で容易に扱うことができる。

やせはりの一般的な基礎式についての覚書⁽¹⁾

(附：集中慣性質量を負ったやせはりの振動)

奥 村 敦 史⁽²⁾

Note on General Fundamental Equations of Deep Beams

(Appendix : Free Vibrations of Deep Beams with a Concentrated Inertia Mass)

by Atsubumi OKUMURA

The problems of deep beams have been discussed by L. Prandtl, J. Prescott and many other authors mainly on "Kipperscheinungen" or the phenomena of lateral bucklings. But their analyses start from fundamental equations which were derived individually under the consideration of definite boundary conditions, and have no generality in them. Therefore, in this paper the author tries to generalize the analyses of deep beams.

First, most general fundamental equations are proposed which can cover very widely the problems of deep beams without being restricted by any boundary conditions and loading conditions. Second, general solution of these fundamental equations in some simple special cases are shown. Finally in the appendix, starting from these fundamental equations, some vibration problems of deep beams having concentrated inertia mass on them are discussed.

I. 緒 言

やせはり，すなわちその断面の二つの主慣性モーメントが大きな比をなす，縦に用いられた帯片状の特殊なはりの解析は，もっぱら安定問題いわゆる横倒れ現象 (Kipperscheinung) に関して多くの著者により研究され，その基礎式もそれぞれの観点より種々な流儀で誘導されている⁽³⁾．しかしそれらの基礎式は はりの微小部分の平衡条件式ではなく，特定の境界条件を考慮してそれぞれ導かれた，はりの断面に作用する曲げおよびねじりモーメントの表示式に止っているため，一般に境界よりの反力および境界における変位等の未知定数が含まれた形をもつ．したがってその解は流通性を欠き，他の境界条件の場合はまた始めから基礎式を建直さねばならない．すなわちこれらの基礎式は一般性を持たず，またその誘導過程および以後の解析過程も透明性を欠くうらみがある．のみならず，より高級な問題，たとえば側方からも小さな集中または分布荷重を与えた時の境界値問題，あるいは集中または分布慣性質量を負わせた場合の振動問題等は，従来のごとき形の基礎式ではきわめて扱いにくきものとなるらう．

そこで筆者はできるだけ一般的な形で，また透明な過程により基礎式を導くことを試みた．軸方向および曲げ剛性大なる方向への変形は問題の本質から分離するから，この基礎式の一般解は横変位に対して四つ，ねじり変位に対して二つ，合計六つの境界条件を満たすべき六つの任意定数を持った形で得らるべきである．

II. 一般的な基礎式の誘導

ひずみのない状態において直線状の軸を有し，かつねじれていない形状の はり を考えている．第 1 図に見るごとく，

このひずみのない状態におけるある垂直断面を基準にとり，その図心 O を原点として，はりの軸に x 軸を

第 1 図

二つの断面慣性主軸に y, z 軸をおのおの一致させて空間座標系 $O-xyz$ を定める．次に O より x の距離にある任意垂直断面 O' を考え，同じ要領で断面座標系 $O'-abc$ をとろう．はりの軸線が x 座標軸の位置より偏倚してある空間弾性曲線 $A-A$ をなせば，それにつれて断面座標系 $O'-abc$ は移動のみならず一般にある回転を生ずる．したがって原点 O' の変位を x 方

向のそれを無視して y, z, c 軸の z 軸よりの回転を θ (x 軸に関連して符号を与える) とすれば，はりの変形状態は z, θ で決定されることになる．しかし y, z, θ および $\partial y / \partial x, \partial z / \partial x$ 等はきわめて小さいとして通常行われるごとく，両座標系間の方向余弦は：

	x	y	z
a	1	$\partial y / \partial x$	$\partial z / \partial x$
b	$-\partial y / \partial x$	1	θ
c	$-\partial z / \partial x$	$-\theta$	1

で与えられること，および任意断面 O' において x 座標の大なる側から小なる側に及ぼすモーメント $\bar{M}$ の abc 成分は変位成分により次のごとく近似的に表示されることを認めよう．

$$M_a = K_a \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad M_b = -K_b \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad M_c = K_c \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに K_a はねじり剛性， K_b, K_c は曲げ剛性であって一般に x の任意連続かん数であってさしつかえないが，はりの全長にわたって $K_c \ll K_b, K_a$ なることがやせはりたるゆえんである．

ここで (1) により変換すれば， M の xyz 成分はその abc 成分により次のごとく与えられる．

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_a - M_b \frac{\partial y}{\partial x} - M_c \frac{\partial z}{\partial x} \\ M_y &= M_a \frac{\partial y}{\partial x} + M_b - M_c \theta \\ M_z &= M_a \frac{\partial z}{\partial x} + M_b \theta + M_c \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

さて M_y をある既知の荷重項として与えた時の安定問題，振動問題等がわれわれの目下の対象であって，問題の本質上 M_y は有限であるに対し， M_x, M_z は 0 または y, θ 等の変位に関連してのみ現われる微量である． M_b と M_a, M_c についても同様であって，すなわち M_b は有限であるに比し M_a, M_c は微量である．以上の考察の下に高次微小項を無視すれば (3) は $M_x = M_a - M_b \partial y / \partial x$ ， $M_y = M_b$ ， $M_z = M_b \theta + M_c$ のごとく簡単になり，これに (2) を代入すれば：

$$M_y = -K_b \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= K_a \frac{\partial \theta}{\partial x} - M_y \frac{\partial y}{\partial x} \\ M_z &= K_c \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M_y \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

上式 (4) に見るごとく，この程度の近似においては z -変位は他の変位成分とは独立に M_y のみにより定まり⁽⁴⁾，問題の本質とは分離する．のみならず曲げ剛性 K_b がきわめて大なるため z -変位は小さく，以下これを単純に無視しよう——このことはかならずしも以下

の取り扱いに常に必要ではないが、 z -変位を無視すれば(5)の関係はより一般的に M_a, M_c を有限値としても成立し、また軸力が存在する場合でも以下の平衡条件式を複雑にしない。

一方(5)は荷重状態のいかんを問わず一般に成立する $\bar{M}$ の x, z 成分の変位成分による表示であって、従来多くの著者が基礎式として出発したものは M_x, M_z を荷重状態、境界条件等を考慮して具体的に書いた(5)式に外ならないが、ここでははりの微小部分に対する平衡条件式の形に進もう。

第2図にははりの δx 微小部分が両端において受ける諸力を xyz 成分で記してある (F : 力, M : モーメント)。したがって他に外部より

はりの軸線の単位長さについてそれぞれ x, y, z 方向に作用する分布外力 w_x, w_y, w_z , および x 方向に作用する分布外モーメント q_x 等の存在を仮定すれば、これら諸力の作用を計上することにより、 δx 微小部分に対する力の平衡条件は

$$x \text{ 成分: } \frac{\partial F_x}{\partial x} + w_x = 0 \quad \text{..... (i)}$$

$$y \text{ 成分: } \frac{\partial F_y}{\partial x} + w_y = 0 \quad \text{..... (ii)}$$

$$z \text{ 成分: } \frac{\partial F_z}{\partial x} + w_z = 0 \quad \text{..... (iii)}$$

またこれに対するモーメントの平衡条件は

$$x \text{ 成分: } \frac{\partial M_x}{\partial x} + F_z \frac{\partial y}{\partial x} + q_x = 0 \quad \text{..... (iv)}$$

$$y \text{ 成分: } \frac{\partial M_y}{\partial x} - F_z = 0 \quad \text{..... (v)}$$

$$z \text{ 成分: } \frac{\partial M_z}{\partial x} - F_x \frac{\partial y}{\partial x} + F_y = 0 \quad \text{..... (vi)}$$

これら六つの平衡条件式 (i)~(vi) のうちやせはりの問題として主要なものは下線をほどこした(ii), (iv)であって、その他の内には問題の本質とは分離した意味を持つものもある。すなわち (i) は他とは独立に軸力 F_x を決定する式に外ならず、(iii)式は(v)および(4)と共に M_y が不静定な性質の場合、他の変位成分とは独立にこれを決定するに役立つものである⁽⁶⁾。さて(v), (vi)および(5)式から横力 F_y, F_z は変位成分による次の表式を得る。

$$\left. \begin{aligned} F_y &= -\frac{\partial M_z}{\partial x} + F_x \frac{\partial y}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(K_c \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M_y \Theta \right) + F_x \frac{\partial y}{\partial x} \\ F_z &= \frac{\partial M_y}{\partial x} \left(\dots = -\frac{\partial}{\partial x} \left(K_b \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (6)}$$

ここでは F_x, M_y は既知として、(5)および(6)の与える M_x, F_y, F_z の表式を(ii), (iv)に与えれば：

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K_c \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M_y \Theta \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(F_x \frac{\partial y}{\partial x} \right) + w_y &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_a \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) - M_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + q_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (7)}$$

($K_a, K_c, F_x, M_y, w_y, q_x$: x の関数)

これは何ら境界を予期せず導かれた、いわゆるやせはりの問題をきわめて一般的に包括する基礎である。一見して明らかごとく、これらは単なるたわみおよびねじりに対する周知の平衡条件式が特殊な荷重項 M_y の存在により連成したものにすぎない。各項の物理的意味は明瞭であって、この基礎よりすればあらゆる問題はここに任意関数とした $K_a \dots q_x$ 等を具体的に与えて解くことに帰する。たとえば分布慣性質量を考慮した振動問題の基礎式は(7)において、単に w_y, q_x の具体的内容として $w_y = -\rho(\partial^2 y / \partial t^2)$, $q_x = -\rho r_a^2(\partial^2 \Theta / \partial t^2)$ —— ρ : 線密度, r_a : 断面極回転半径 —— 等の慣性力を与えたものにすぎない。また弾性壁にはさまれたやせはりの問題等も、弾性壁の影響は結局 w_y, q_x の内容として基礎式に導入されることとなろう。

III. 簡単な場合の解

ここに導かれた基礎式(7)はきわめて一般的なもので、もちろんその一般解などは示し得ない。そこで以下容易に解き得るきわめて簡単な二つの場合の解を例示するにとどまるが、従来扱われた問題の多くもこの範囲内に限られている。

場合-1. “ $w_y, q_x = 0$; $K_1, K_c, F_x, M_y = \text{一定}$ ” の場合、基礎式(7)はきわめて簡単になって：

$$\left. \begin{aligned} -K_c \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - M_y \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + F_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= 0 \\ K_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (8)}$$

$w_y, q_x = 0$ であるから分布質量を無視した場合であるが、振動問題として扱い、また変数を無次元化する目的で

$$x = l\xi, \quad y = l\eta e^{ip\tau}, \quad \Theta = \theta e^{ip\tau} \quad \text{..... (9)}$$

(l : ある長さ, p : 円振動数)

とおけば、 $d/d\xi = ()'$ と略記して、(8)より次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \eta'''' + \alpha_M \theta'' + \alpha_T \epsilon^2 = 0 \\ \theta'' - \alpha_M \eta'' = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8')$$

$$\left(\alpha_{Ma} = \frac{M_y}{K_a l}, \alpha_{Mc} = \frac{M_y}{K_c l}, \alpha_{Te^2} = \frac{-F_x}{K_c l^2} \right)$$

(8')より θ を消去した式:

$$\eta'''' + \alpha^2 \eta'' = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\left(\alpha^2 = \alpha_{Ma} \alpha_{Mc} + \alpha_{Te^2} = \frac{M_y^2}{K_a K_c l^2} - \frac{F_x}{K_c l^2} \right)$$

の一般解は直ちに得られ, これを(8')の下式に代入して積分すれば η, θ の一般解:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= C_1 \cos \alpha \xi + C_2 \sin \alpha \xi + C_3 \xi + C_4 \\ \theta &= \alpha_{Ma} (C_1 \cos \alpha \xi + C_2 \sin \alpha \xi) + C_5 \xi + C_6 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

を得る. ここに $C_1, \dots, C_6$ 等は, この問題に期待されるすべての境界条件を満し得る六つの積分定数である.

場合-2. “ $w_y, q_x, F_x = 0$; $K_a, K_c = \text{一定}$; $M_y = (M_{yl}/l)x$, (M_{yl} :一定, l :ある長さ)” この場合の基礎式は次のごとくなる.

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K_c \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{M_{yl}}{l} x \theta \right) = 0 \\ K_a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{M_{yl}}{l} x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

前の場合と同様に振動問題として扱い, (9)のごとくおいて得られる式:

$$\left. \begin{aligned} (\eta'' + \alpha_c \xi \theta)'' = 0 \\ \theta'' - \alpha_c \xi \eta'' = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12')^*$$

$$s_1^*(\alpha, \xi) = \int \int \{s_1''(\alpha, \xi) / \xi\} d\xi d\xi$$

$$= -\alpha^2 \left(\frac{1}{2 \cdot 3} \xi^3 - \frac{\alpha^2}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \xi^7 + \frac{\alpha^4}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11} \xi^{11} - \frac{\alpha^6}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15} \xi^{15} + \dots \right)$$

$$s_2^*(\alpha, \xi) = \int \int \{s_2''(\alpha, \xi) / \xi\} d\xi d\xi$$

$$= -\alpha^2 \left(\frac{1}{3 \cdot 4} \xi^4 - \frac{\alpha^2}{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} \xi^8 + \frac{\alpha^4}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12} \xi^{12} - \frac{\alpha^6}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 16} \xi^{16} + \dots \right)$$

$$s_3^*(\alpha, \xi) = \int \int \{s_3''(\alpha, \xi) / \xi\} d\xi d\xi = \left(3\xi^2 - \frac{\alpha^2}{5 \cdot 6} \xi^6 + \frac{\alpha^4}{6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} \xi^{10} - \frac{\alpha^6}{6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 14} \xi^{14} + \dots \right)$$

また $C_1, \dots, C_6$ は積分定数である.

これ等の一般解は従来扱われた多くの問題を単に合理的に包括するものにすぎないが, かかる簡単な場合についても境界条件に拘束されない, 真の意味での一般解は従来示されなかったように思われるので, あえて例示した.

IV. 結 び

以上主として一般的な基礎式の誘導について述べたが, その誘導方法はけっして従来より厳密に扱われたわけではない. ただ断面, 軸力, 荷重分布等を任意かん数として, 従来基礎式として出発した曲げおよびね

$$* \left(\alpha_1 = \frac{M_{yl}}{K_a l}, \alpha_2 = \frac{M_{yl}}{K_c l} \right)$$

より η を消去すれば次の式を得る.

$$\{(\theta'' + \alpha^2 \xi^2 \theta) / (\alpha \xi)\}'' = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$(\alpha^2 = \alpha_1 \alpha_2 = M_{yl}^2 / (K_a K_c l^2))$$

(13)は Bessel の微分方程式の変形であるが, その解は $\theta = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \xi^s$ とおいて係数を決定しても簡単に得られる. しかして(12')の上式を用いて η を導けば, 一般解は:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= C_1 s_1(\alpha, \xi) + C_2 s_2(\alpha, \xi) + C_3 s_3(\alpha, \xi) + C_4 \\ \eta &= \alpha^{-1} \{C_1 s_1^*(\alpha, \xi) + C_2 s_2^*(\alpha, \xi) \\ &\quad + C_3 s_3^*(\alpha, \xi)\} + C_5 \xi + C_6 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ただし, ここに

$$\begin{aligned} s_1(\alpha, \xi) &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{3 \cdot 4} \xi^4 + \frac{\alpha^4}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} \xi^8 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha^6}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} \xi^{12} + \dots \right) \\ &\propto \xi^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\alpha}{2} \xi^2 \right) \\ s_2(\alpha, \xi) &= \left(\xi^3 - \frac{\alpha^2}{6 \cdot 7} \xi^7 + \frac{\alpha^4}{6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 11} \xi^{11} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha^6}{6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 15} \xi^{15} + \dots \right) \\ &\propto \xi^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\alpha}{2} \xi^2 \right) \\ s_3(\alpha, \xi) &= \left(\xi^3 - \frac{\alpha^2}{6 \cdot 7} \xi^7 + \frac{\alpha^4}{6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 11} \xi^{11} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha^6}{6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 15} \xi^{15} + \dots \right) \end{aligned}$$

じりモーメントの表示式を微小部分の平衡条件式に進め, したがって境界条件に何ら拘束されない, いわゆるやせはりの問題をきわめて一般的に包括する基礎式を筆者自身“わかりやすく”導く試みの覚書にすぎない. その冗長をここに謝する次第であるが, この基礎式よりすればやせはりの問題に対する総括的な見透しが得られ, より高級な問題への発展に対し何らかの寄与するところがあれば望外の幸である. なお以下附録として一二の具体例に触れ, この基礎式よりすれば以後の解析はきわめて透明に行われ得ることを示すと同時に, ここに例示したような簡単な場合の一般解をもつ

としても、なお直ちに扱ひ得る興味ある問題の多くが
のこされていることを指摘したい。

終りに、筆者にやせはりの問題に対する興味を喚起
された高橋利衛学兄に厚く感謝する。

— 附 録 —

(集中慣性質量を負ったやせはりの振動)

具体例-A “純曲げ M_y および軸力 F_x を受け

る、長さ $2l$ の均

一なやせはりが、

その両端において

y, z, θ 変位のみ

を拘束するごとく

支持され、かつ中

央に集中慣性質量

$2m$ (重力は考え*

第 3 図

$$\xi=0; \begin{cases} \eta=0 \\ \eta''=0, \\ \theta=0 \end{cases} \quad \xi=1; \begin{cases} \eta'=0 \\ \eta''' + \alpha_{Mc}\theta' + \lambda\eta=0 \\ -\theta' + \mu\theta=0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (A1'), (A2')$$

$$\left(\lambda = \frac{m}{K_c/l^3} p^2, \quad \mu = \frac{mr_a^2}{K_a/l} p^2 \right)$$

これらと一般解(11)とより固有値決定式：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{Ma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha \sin \alpha & \alpha \cos \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} \lambda \cos \alpha \\ + \\ \alpha \alpha_{Te}^2 \sin \alpha \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda \sin \alpha \\ - \\ \alpha \alpha_{Te}^2 \cos \alpha \end{pmatrix} & \lambda & \lambda & \alpha_{Mc} & 0 \\ d_{Mc} \begin{pmatrix} \alpha \sin \alpha \\ - \\ \mu \cos \alpha \end{pmatrix} & \alpha_{Ma} \begin{pmatrix} -\alpha \cos \alpha \\ + \\ \mu \sin \alpha \end{pmatrix} & 0 & 0 & (\mu-1) & \mu \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 \sigma (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$+ \lambda \{ \sigma (\alpha \alpha_{Te}^2 \cos \alpha + \alpha_{Mc} \alpha_{Ma} \sin \alpha) - (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) \} - \alpha^3 \cos \alpha = 0 \quad \dots\dots\dots (A3)$$

を得る。ただしここに $\mu/\lambda = (K_c r_a^2)/(K_a l^2) = \sigma$ とおいて、振動数を含むパラメータを λ に統一した。この問題においては多くの現象が合成されており、固有値決定式(A3)は適当な極限移行の下に、その個々の純粋な現象に対応するものに分離する。すなわち：

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Delta = (\sigma \lambda - 1) \{ \lambda (\alpha_{Te} \cos \alpha_{Te} - \sin \alpha_{Te}) + \alpha_{Te}^3 \cos \alpha_{Te} \} = 0 \quad \dots\dots\dots (A4)$$

を導けば、これより次の二つの関係が分離して得られる。

$$\mu=1; \lambda = \frac{\alpha_{Te}^3 \cos \alpha_{Te}}{\sin \alpha_{Te} - \alpha_{Te} \cos \alpha_{Te}}$$

この前者は純粋なねじれ振動に、後者は軸力を受けた時の横振動に対する固有値決定式に外ならない。さらに後者において、

*ない) を負った時の自由振動(第3図)”。

これは「場合-1」に属し、基礎式および一般解はそれぞれ(8), (11)である。しかし mode の中央対称を仮定すれば、境界条件は：

$$x=0; \begin{cases} y=0, K_c \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M_y \theta = 0, \theta = 0 \end{cases} \quad (A1)$$

$$x=l; \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_c \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M_y \theta \right) \\ -F_x \frac{\partial y}{\partial x} - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (A2) \\ -K_a \frac{\partial \theta}{\partial x} + M_y \frac{\partial y}{\partial x} - m r_a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

(r_a : 集中慣性質量の a 軸まわりの回転半径)

これらは無次元化した形で書けば：

$$\text{軸力} \rightarrow 0: \lambda_{T=0} = \lim_{\alpha_{Te} \rightarrow 0} \frac{\alpha_{Te}^3 \cos \alpha_{Te}}{\sin \alpha_{Te} - \alpha_{Te} \cos \alpha_{Te}} = 3$$

$$\text{振動数} \rightarrow 0: 0 = \frac{\alpha_{Te}^3 \cos \alpha_{Te}}{\sin \alpha_{Te} - \alpha_{Te} \cos \alpha_{Te}}$$

$$\therefore \cos \alpha_{Te} = 0$$

を導けば、これらはそれぞれ単なる横振動および軸圧による長柱の座屈に対応する周知の関係である。なお(A3)において直ちに振動数 $\rightarrow 0$ とすれば

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Delta = -\alpha^3 \cos \alpha = 0 \quad \therefore \cos \alpha = 0$$

これは曲げモーメント M_y と軸力 F_x とを受けるやせはりの安定に対する固有値決定式であって、安定限界条件はこの第1根により

$$\alpha = \sqrt{\alpha_{Mc} \alpha_{Ma} + \alpha_{Te}^2} \\ = \sqrt{\frac{M_y^2}{K_a K_c / l^2} - \frac{F_x}{K_c / l^2}} = \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots\dots (A5)$$

で与えられる。純粋なはり座屈 (Kippung) および柱座屈 (Knickung) に対するそれは、この特別な場合 ($F_x = 0, M_y = 0$) として上式に含まれる。

以上で明白なごとく、この振動系は二自由度であって、固有値決定式 (A3) は (A4) に見るごとく $\lim_{My \rightarrow 0}$ においてそれぞれ純粋なねじれ振動、および横振動に到達する二系統の根を有し、またこれらは共に α の増加にしたがって減少し、(A5) の与える条件に達して 0 となり、座屈することを示している。

一方、固有かん数も容易に求められ、たとえば C_2 で整理すれば：

$$\left. \begin{aligned} \eta &= C_2 \{ \sin \alpha \xi - (\alpha \cos \alpha) \xi \} \\ \theta &= C_2 \alpha M a \left\{ \sin \alpha \xi - \left(\frac{\sigma \lambda \sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\sigma \lambda - 1} \right) \xi \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (A6)$$

(λ : (A3) の根)

また座屈時のそれは、 C_1 で整理して

$$\left. \begin{aligned} \eta &= C_1 \sin \alpha \xi \\ \theta &= C_1 \alpha M a \sin \alpha \xi \end{aligned} \right\} \left(\alpha = \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots \dots \dots (A6')$$

具体例—B “自由端に慣性質量 m を附した、長さ l の均一なやせ片持はりの自由振動 (第4図)”。

自由端に作用する荷重を W_z とすれば

第 4 図

$$M_y = -W_z x = (M_{yl}/l) x \quad \therefore \quad M_{yl} = -W_z l.$$

すなわちこれは「場合—2」に属し、基礎式および一般解は (12), (14) である。境界条件は：

$$x=0; \left\{ \begin{aligned} \left(K_a \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{M_{yl}}{l} x \frac{\partial y}{\partial x} \right) - m r a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0 \\ \left(K_c \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{M_{yl}}{l} x \theta \right) - m r c^2 \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} &= 0 \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_c \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{M_{yl}}{l} x \theta \right) - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right. \quad \dots \dots \dots (B1)$$

$$x=l; \left\{ \theta=0, y=0, \frac{\partial y}{\partial x}=0 \right. \quad \dots \dots \dots (B2)$$

ここに r_a, r_c はそれぞれ慣性質量 m の a 軸および c 軸まわりの回転半径。(B1), (B2) を無次元化すれば

$$\xi=0; \left\{ \begin{aligned} \theta' + \mu \theta &= 0 \\ \eta'' + \nu \eta' &= 0 \\ -\eta''' - \alpha \theta + \lambda \eta &= 0 \end{aligned} \right. , \quad \xi=1; \left\{ \begin{aligned} \theta &= 0 \\ \eta &= 0 \\ \eta' &= 0 \end{aligned} \right. \quad \dots \dots \dots (B1'), (B2')$$

$$\left(\lambda = \frac{m}{K_c/l^3} p^2, \mu = \frac{m r a^2}{K_a/l} p^2, \nu = \frac{m r c^2}{K_c/l} p^2 \right)$$

これらと一般解 (14) とより固有値決定式は：

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu & 1 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6/\alpha_1 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & \lambda \\ s_1 & s_2 & s_3 & 1 & 0 & 0 \\ s_1^*/\alpha_1 & s_2^*/\alpha_1 & s_3^*/\alpha_1 & 0 & 1 & 1 \\ s_1^*/\alpha_1 & s_2^*/\alpha_1 & s_3^*/\alpha_1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\infty \lambda^3 \sigma_1 \sigma_2 \{ (s_1-1)(s_2^* s_3^* - s_2^* s_3^*) - s_2(s_1^* s_3^* - s_1^* s_3^*) + (s_1^* s_2^* - s_1^* s_2^*) \} / \alpha^2 \\ &- \lambda^2 [6 \sigma_1 \{ (s_1-1)(s_2^* - s_2^*) - s_2(s_1^* - s_1^*) \} / \alpha^2 \\ &- \sigma_1 \sigma_2 (s_2 s_3^* - s_2^* s_3) - \sigma_2 (s_1^* s_3^* - s_1^* s_3^*) / \alpha^2] \\ &- \lambda \{ 6(s_1^* - s_1^*) / \alpha^2 - 6 \sigma_1 s_2 - \sigma_2 (s_1 s_3^* - s_1^* s_3) \} + 6 s_1 = 0 \quad \dots \dots \dots (B3) \end{aligned}$$

ただしここに $\mu/\lambda = (K_a r_a^2)/(K_c l^2) = \sigma_1, \nu/\lambda = r_c^2/l^2 = \sigma_2$, また $s_1, \dots, s_3^*$ 等は $s_1(\alpha, \xi) \big|_{\xi=1}, \dots, s_3^*(\alpha, \xi) \big|_{\xi=1}$ 等を略記したもので、すべて α のみのかん数である。さて λ の三次式である (B3) の根として振動数は与えられるが、試みに

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Delta \infty s_1 = 0, \text{ すなわち } J_{-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (B4)$$

を導けば、これは自由端に集中荷重を受けるやせはりの安定に対する固有値決定式である。また荷重 $W_z \rightarrow 0$ すなわち $\alpha \rightarrow 0$ の極限移行を行えば、この場合もまた先の例と同様に、ねじれ振動と横振動は次のごとく分離する。

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta \infty (\sigma_1 \lambda - 1) \{ \sigma_2 \lambda^2 - 4 \lambda (1 + 3 \sigma_2) + 12 \} = 0 \quad \dots \dots \dots (B5)$$

ただしここに現われた横振動はなお二つの形式の慣性 ($m, m r c^2$) を持つため、それ自身二自由度の連成振動であることが見られる。

以上で、この振動系は三自由度であり、固有値決定式は三つの根を持つが、その一つはねじれ振動の系統に、他の二つは横振動の系統に属し、これらはすべて α の増加につれて減少し、(B4) の条件に達して 0 となり座屈することがわかる。

なおこの問題は既に最近小泉氏⁽⁷⁾によりきわめて巧みに扱われ、詳細な数値計算がある。そこでは附加質量の c 軸まわりの慣性モーメント $m r c^2$ が考慮されていないから、(B3) において $\sigma_2 = 0$ とした場合に相当し、すなわち一つの自由度が消失して固有値決定式は：

$$\lambda^2 \sigma_1 \{ (s_1-1)(s_2^* - s_2^*) - s_2(s_1^* - s_1^*) \} / \alpha^2 + \lambda \{ (s_2^* - s_1^*) / \alpha^2 - \sigma_1 s_2 \} - s_1 = 0 \quad \dots \dots \dots (B3')$$

となる。これは表現は異なるが同氏の与えたそれと内容において一致する。

注：—

(1) 昭和24年4月4日 定時總會講演會において講演、原稿受付 昭和24年6月7日。

- (2) 正員, 早稲田大學.
 (2) たとえば A.G.M. Michell, Phil. Mag., Vol. 48 (1899);
 L. Prandtl, 'Kipperscheinungen' (Diss.), Nürnberg, 1899;
 J. Prescott, Phil. Mag., Vol. 36 (1918), Vol. 39 (1920).
 (4) M_y が不静定な性質の場合は, 後に觸れるごとく他とは別立に

單に z -變位のみ考慮し, 與えられた境界條件の下に普通の不静定
 はりを解くごとくして求めればよいことになる.

- (5) z -變位を考慮すれば, この平衡條件(v)は $\partial M_y / \partial x + F_x \partial z / \partial x - F_z = 0$ となる.
 (6) M_y の決定に對してのみ z -變位を考慮するのである.

534.113.011:534.015

支点の移動による弾性棒の横振動数の変化特性について⁽¹⁾

鵜 戸 口 英 善⁽²⁾

On the Characteristic Variation of Natural Frequency in the Lateral Vibration of an Elastic Bar due to Transferring of its Support

by Teruyoshi UDOGUCHI

In the lateral vibration of an elastic bar, the natural frequency varies during the transferring of its support and presents definite numbers of definite maximum and minimum values in accordance with a general rule. In this paper the reality of this rule is first verified by an example of a canti-lever beam. Then the generality of this rule is ascertained by the aid of the solution of the integral equation in the forced vibration of a bar, and the meaning and interpretation of the rule are expressed in view of Rayleigh's principle.

1. 緒 言

任意の端末条件で, かつその径内に一つの剛性支持点を有する弾性棒の自由たわみ振動を考える. この支持点は棒のたわみは 0 に拘束するが, 支点的傾斜には全然拘束を加えないいわゆる自由支点とする. 今この支点を棒の軸線に沿って移動して行く時は, それに伴い弾性棒の呈する固有振動数は当然変化するが, その変化には次のような面白い法則にしたがった特性の現われることが認められる. すなわち「支点附加系の第 n 次振動数には必ず n 個の極大値と $(n-1)$ 個の極小値とが現われる. そしてそれらの極大値は該移動支点を取り去った系の第 $(n+1)$ 次振動に對する n 個の節点位置のいずれかに支点を置く時に現われ, その値は該 $(n+1)$ 次振動数に合致してすべて相等しい. また極小値はそれら n 個の節点の中間に移動支点を置き, 支点における振動形の傾斜が 0 となるごとき場合に現われ, 支点除外系の第 n 次および第 $(n+1)$ 次振動数の中間の値をとる」という法則である. 後者の極小値を生ずる附加支点の位置は厳密には上の表現になるが, 一般にそれは支点除外系の振幅の山の位置に近い.

さて附加支点が支点除外系の節点に到れば支点反力は 0 となり, したがって支点はこの時棒の振動に何等の拘束をも加えない (かのごとく見える) から, その時の振動数は拘束を及ぼす他の支点位置に對する振動数に比して極小値をとるべきであり, また附加支点が支点除外系の振幅の山をおさえる位置に行けば支点反

力は最大となり, したがって支点はこの時棒の振動に最大の拘束を及ぼす (かのごとく見える) から, その時の振動数は極大になるはずである, という具合に一見考えやすいかと思うが, 事實は正にその逆を行くのである. 従来この問題について言及した報告ないし実験結果等多少耳にしたこともあるが, 理論的にこの法則を確立しその意義を明確に述べたものは余り見受けられないように思うゆえ, 以下簡単な例題についてまずこの法則の真なることを実証し, 次にその一般性を確かめて, もって支点的移動によって生ずる自由振動数の変化の模様と, そこに現われる極値の性質ならびにその生ずるゆえんを明らかにしたい.

2. 例証, 一支点を附加した片持はりの横振動

均一な横断面を有する弾性棒の横振動を表わす方程式は

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho f}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

であって, その解の一般形は

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi(x) \cdot \sin(pt - \epsilon), \quad p = m^2 \sqrt{EIg/\rho f}, \\ \varphi(x) &= A \cosh mx + B \sinh mx \\ &\quad + C \cos mx + D \sin mx \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

である. 第 1 図(a)のごとく長さ l なる片持はりの径内の任意の一点 S (両端より a, b) に剛性支点を附加して, 同点のたわみを拘束する場合の自由振動に對し