621-567:534.37

非線形弾性体材料を用いた吸振台について⁽¹⁾西 野 宏⁽²⁾

On the Shock-Absorber with Non-linear Elastic Materials

by Hiroshi NISHINO

This report describes the calculation of the shape and transmissibility of the vibration of the shock-absorber made of rubber or leathers, so-called non-linear elastic materials, in which the spring force is not proportional to the stress.

Using the stress x as variable, the spring force P is approximately represented as follows:—

$$P = n^2 x + \alpha x^3$$

When the external force is $A \sin \omega t$, the effect on the transmissibility, owing to the non-linearity, depends on the term $\alpha A^2/n^6$. But the ratio ω/n is generally high in the shock-absorber, and so that the effect can be ignored.

ゴムまたは革等の復原力がひずみに比例しない非線形特性を有する弾性体を振動防止装置に用いた場合、振動の模様ならびに振動の伝達について計算する。このような材料では変位が大きくなると復原力はもはやひずみに比例せず、やや大きくなる。そこでその復原力を近似的に次式で表わす。

$$P(x) = n^2 x + \alpha x^3 \quad (1)$$

$P(x)$ は振動系の単位質量当り変位 x を生じたときの復原力である。 α は小さな量である。減衰力は速度に比例すると見なせば $c \frac{dx}{dt}$ で表わされる。ここに c は正の定数である。吸振台その他振動防止装置を施した機械に、正弦的な振動外力が生ずるとして、それを振動系の単位質量当り $F \cos \omega t$ で表わせば振動系の運動方程式は

$$\ddot{x} + c\dot{x} + n^2 x + \alpha x^3 = F \cos \omega t \quad (2)$$

これを解くのに逐次近似法を用いて

$$x = x_1 + x_2 + \dots$$

ただし x_2 は x_1 に対して第 2 位の微小量とする。近似解として $x_1 + x_2$ までとれば、 x_1 について

$$\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + n^2 x_1 = F \cos \omega t$$

第 2 位微小量 x_2 については

$$\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + n^2 x_2 = -\alpha x_1^3$$

をそれぞれ解けば x の近似解として

$$\begin{aligned} x \approx x_1 + x_2 = & \frac{F}{\sqrt{c^2 \omega^2 + (n^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \\ & - \frac{3}{4} \alpha \frac{F^3}{\{c^2 \omega^2 + (n^2 - \omega^2)^2\}^2} \cos(\omega t - 2\varphi) \\ & - \frac{\alpha}{4} \frac{F^3 \cos(3\omega t - \varphi' - \tau')}{\{9c^2 \omega^2 + (n^2 - 9\omega^2)^2\}^{\frac{1}{2}} \{c^2 \omega^2 + (n^2 - \omega^2)^2\}^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\text{ここに } \varphi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{n^2 - \omega^2}$$

$$\begin{aligned} \varphi' &= \tan^{-1} \frac{3c\omega}{n^2 - 9\omega^2} \\ \tau' &= \tan^{-1} \left\{ \frac{c\omega}{n^2 - \omega^2} \times \frac{3(n^2 - \omega^2)^2 - c^2 \omega^2}{(n^2 - \omega^2)^2 - 3c^2 \omega^2} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

を得る。同様にして、更に近似の度を高めることができる。

次に吸振台などの振動防止装置の振動伝達率を求める。この時の強制振動は (3) で示されるように単弦振動ではないけれども、定常振動は ω の振動率を有しているので次のように表わすことができる。

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t \quad (4)$$

ここに a, b は時間 t のかん数である。(3) よりわかるように、 a, b の変化は緩慢であるから

$$\begin{aligned} \dot{a} &\ll \omega a, \quad \ddot{a} \ll \omega \dot{a} \\ \dot{b} &\ll \omega b, \quad \ddot{b} \ll \omega \dot{b} \end{aligned}$$

が成立する。この条件を考慮して (4) を (2) に代入して $\cos \omega t, \sin \omega t$ の係数を比較すると

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{da}{dt} + ca + \frac{n^2 - \omega^2}{\omega} b + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\omega} b(a^2 + b^2) &= \frac{F}{\omega} \\ 2 \frac{db}{dt} - \frac{n^2 - \omega^2}{\omega} a + cb - \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\omega} a(a^2 + b^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

の連立方程式を得る。最大振幅を与える条件は

$$\frac{d}{dt} (a^2 + b^2) = 2 \left(a \frac{da}{dt} + b \frac{db}{dt} \right) = 0$$

であるから (5) から最大振幅として

$$A = \frac{F}{\sqrt{c^2 \omega^2 + \left(n^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \alpha A^2 \right)^2}} \quad (6)$$

を得る。すなわち最大振幅は線形弾性体の場合とくらべると、非線形項の入ったため幾分小さくなる。この

振動の安定を調べるために a, b に変化 $\Delta a, \Delta b$ を与えて、これが時と共に 0 に近づくか否かを計算する。

$$\frac{da}{dt}=0, \quad \frac{db}{dt}=0 \quad \dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} ca + \frac{n^2 - \omega^2}{\omega} b + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\omega} b(a^2 + b^2) &= \frac{F}{\omega} \\ -\frac{n^2 - \omega^2}{\omega} a + cb - \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\omega} a(a^2 + b^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (8)$$

の条件のもとに (5) の a, b に $a + \Delta a, b + \Delta b$ をそれぞれ代入すると結局

$$\left. \begin{aligned} 4 \frac{d^2(\Delta a)}{dt^2} + 4c \frac{d}{dt}(\Delta a) + (c^2 + \gamma^2) \Delta a &= 0 \\ 4 \frac{d^2(\Delta b)}{dt^2} + 4c \frac{d}{dt}(\Delta b) + (c^2 + \gamma^2) \Delta b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

を得る。ここに $\gamma = \frac{n^2 - \omega^2}{\omega} + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\omega} (a^2 + b^2)$

(9)において c は正であるから $\Delta a, \Delta b$ は時間の経過と共に減衰する。ゆえに (5) を解いて (4) に代入して得られる振動は安定であることがわかる。

最大振幅の近似計算は次のようにすればよい。

$$A_1 = \frac{F}{\sqrt{c^2 \omega^2 + (n^2 - \omega^2)^2}}$$

これを (6) に代入して

$$A_2 = \frac{F}{\sqrt{c^2 \omega^2 + (n^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \alpha A_1^2)^2}}$$

以下このようにして近似度を高めることができる。以上の計算は非線形共振の近傍では使用することはできない。

振動の際、吸振合を経て基礎合に伝達される力はばね力と減衰力の合力であるが、この二力は (3) からわかるように必ずしも 90° の位相差を有しないけれども、近似的には位相差 90° として取り扱い得る。かくして計算される振動伝達率は真の振動伝達率よりも若干、大きくなる。

合力の最大値は

$$F' = A \sqrt{(n^2 + \alpha A^2)^2 + c^2 \omega^2}$$

強制力の最大値は F であり F と F' の比、すなわち伝達力は、結局

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{n^2 + \alpha A^2}{c\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{n^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \alpha A^2}{c\omega}\right)^2}} \quad \dots\dots (10)$$

すなわち伝達率は振幅により異なってくる。 ε を計算するには近似値として

$$A_1 = \frac{F}{c\omega \sqrt{1 + \left(\frac{n^2 - \omega^2}{c\omega}\right)^2}}$$

を求め、これを (10) に代入すればよい。ただしこれ

は共振点の近傍では用いられない。計算を容易にするために臨界減衰係数

$$c_c = 2n$$

を用いて A_1 および ε を求めると

$$A_1 = \frac{F}{n^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{n^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{c}{c_c} \frac{\omega}{n}\right)^2}} \quad \dots\dots (11)$$

$$\varepsilon = \left\{ \frac{4 \left(\frac{c}{c_c} \frac{\omega}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{\alpha A_1^2}{n^2}\right)^2}{4 \left(\frac{c}{c_c} \frac{\omega}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{n^2} + \frac{3}{4} \frac{\alpha A_1^2}{n^2}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

となる。ここに

$$\frac{\alpha A_1^2}{n^2} = \frac{\alpha F^2}{n^6 \left(1 - \frac{\omega^2}{n^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{c}{c_c} \frac{\omega}{n}\right)^2} \quad \dots\dots (13)$$

$\frac{\alpha A_1^2}{n^2}, \frac{\alpha F^2}{n^6}$ は共に次元を持たない。数値計算の変数として $\frac{\omega}{n}, \frac{c}{c_c}, \frac{\alpha F^2}{n^6}$ を取る。吸振合などの振動防止

装置では $\frac{\omega}{n}$ は 1 より相当大きく、共鳴点から離れた振動であるので以上のような近似計算は可能である。振動が非線形でなく、線形であるときは $\alpha=0$ とすればよい。減衰のない振動のときは $c=0$ となる。

計算結果は表に示してある。

振 動 伝 達 率 ε

$\frac{c}{c_c}=0$	$\frac{\alpha F^2/n^6}{\omega/n}$	0	0.2	0.5	1.0
	1.5	0.800	(0.865)	(0.990)	(1.299)
	1.75	0.485	0.516	0.565	0.653
	2.0	0.333	0.335	0.338	0.343
	2.25	0.245	0.249	0.255	0.261
	2.5	0.190	0.191	0.191	0.191
	3.0	0.125	0.125	0.125	0.125
	3.5	0.089	0.089	0.089	0.089

$\frac{c}{c_c}=0.1$	$\alpha F^2/n^6$	0	0.2	0.5	1.0
	ω/n				
	1.5	0.812	(0.970)	(1.249)	(1.918)
	1.75	0.515	0.535	0.582	0.657
	2.0	0.356	0.366	0.377	0.400
	2.25	0.268	0.279	0.295	0.324
	2.5	0.212	0.214	0.217	0.219
	3.0	0.145	0.146	0.147	0.148
	3.5	0.110	0.110	0.110	0.110

$\frac{c}{c_c}=0.25$	$\alpha F^2/n^6$	0	0.2	0.5	1.0
c_c	ω/n				
	1.5	0.857	(0.948)	(1.100)	(1.400)
	1.75	0.592	0.598	0.647	0.704
	2.0	0.447	0.454	0.464	0.481
	2.25	0.358	0.360	0.363	0.369
	2.5	0.298	0.299	0.300	0.302
	3.0	0.221	0.221	0.222	0.224
	3.5	0.176	0.176	0.176	0.176

$\frac{c}{c_0} = 0.5$	$\alpha F^2/n^6$	0	0.2	0.5	1.0
	ω/n				
	1.5	0.923	(0.950)	(0.983)	(1.063)
	1.75	0.694	0.709	0.728	0.773
	2.0	0.620	0.624	0.629	0.639
	2.25	0.530	0.531	0.535	0.538
	2.5	0.463	0.464	0.465	0.467
	3.0	0.370	0.370	0.371	0.371
	3.5	0.308	0.308	0.308	0.310

表中、カッコを附したものは、非線形共振の近傍であって、近似計算の適用できないことを示している。以上の計算結果より次のことがわかる。ばねの復原力が

$$P(x) = n^2 x + \alpha x^3$$

で表わされるときは振動が非線形であるために、吸振

台の伝達率によぼす影響は係数 α に比例し、強制外力の大きさの二乗に比例し、 n^2 の三乗に逆比例する。すなわち振動系の第1近似解の自由振動数に相当する振動率 n が小さいとき、非線形の影響は最も著しい。外部強制力振動率と n との比が増加するにつれて非線形項の影響は小さくなる。粘性減衰も大きく外部強制力振動率 ω と n との比も大きいときは非線形項の影響は見えない。

一般に吸振台においては ω/n が大きいから、非線形項の影響は実際には無視できる。

注：—

(1) 昭和23年5月10日 北陸地方講演会において講演、

原稿受付 昭和25年7月21日。

(2) 正員、東海大学。

621-272.31 : 534.121.1.014

端面に摩擦を伴った板ばねの振動⁽¹⁾

高 橋 敏 雄⁽²⁾

Vibrations of Plate Springs with Solid Friction Damping at their Ends

by Tosio TAKAHASHI

On vibrations with solid friction damping there are Den Hartog's essays and the others, but these essays treat only the case that frictional forces are constant during the vibrations. On the contrary, as one of the cases that the frictional forces vary with the motion, the author investigated theoretically and experimentally the free and forced vibrations of plate springs consisted of one sheet with solid friction damping at their ends.

The plate springs are circular arc shapes, the curvatures of which are comparatively large and the thicknesses are very small compared with the radii.

The frictional forces consist in the return forces, the characteristic return force curve has two natural frequencies and the free and forced vibrations which are acted upon by a periodic disturbing force were solved theoretically.

On the experimental measurements of the vibrations, models of the plate spring were made and the vibrations were measured by electro-magnetic oscillograph. And the results of the experiment agreed with the calculations by the theory.

1. 緒 言

固体摩擦を伴った振動に関しては Den Hartog をはじめとしてその他の論文があるがそのいずれもが摩擦抵抗力が振動中一定の場合である。著者はこの摩擦抵抗力が振動中変動する一つの例として端面に摩擦抵抗をうける一枚の板ばねの振動についてその自由振動と強制振動を理論計算と、実験の両面より研究した。

2. 板ばねに作用する力と、たわみとの関係

板ばねの形状は第1図に示すごとく1枚の板ばねで

第 1 図

比較的大きな曲率をもった半径 R の円弧ばねとする。